

水面重力波のカオスにおけるモード間干渉の役割について

岐阜大学 安田孝志 (Takashi YASUDA)

岐阜大学 森 信人 (Nobuhito MORI)

1. はじめに

外力によらない場合の水面重力波のカオスについては, 準単色波のカオスを扱った Yuen・Lake(1982) や Caponi ら (1982) の研究が良く知られており, 吉永 (1992) による解説もなされている. これらの結果によれば, 2 組以上の側帯波が不安定領域内に置かれた場合には, 初期の時間発展が再帰的であっても最終的にはカオス的な現象が現れることが明らかにされている. これに対し, 1 組の側帯波が不安定領域に与えられた場合, 不安定領域内の位置に応じて FPU 再帰と準周期的時間発展の 2 種類の現象が生じることが示された. また, 側帯波が不安定領域外に与えられた場合には搬送波の波列が維持され, 何組の側帯波がどこに位置するかが搬送波の振舞いに決定的に重要となることが示された. しかしながら, これらの研究は $0.4 \leq k/k_p \leq 1.6$ の波数空間上に 7 個のフーリエモードしか存在しない狭帯少数自由度系としての近似によって行われているため, Shen・Nicholson(1987) が Nonlinear Schrödinger 方程式 (NLS 方程式) を用いて指摘しているように, 波数空間上での打ち切りによる Lyapunov 指数の変化等の問題がある.

そこで, ここでは Dommermuth・Yue(1987) の手法にならって水面重力波の基礎式を 4 次干渉まで厳密に評価して解き, 十分な大きさを持つ波数空間および自由度の下で準単色波の長時間発展を調べ, 側帯波の位置やモード間干渉の影響について検討をしたい.

2. 計算手法

鉛直 2 次元無限水深の非圧縮非回転流体場での水面重力波を考え、未知量を平均水面周りの水面変動 η および水面での速度ポテンシャル ϕ^s とすれば、支配方程式は次式のように書かれる。

$$\eta_t + \phi_x^s \eta_x - (1 + \eta_x^2) \phi_z = 0, \quad (1)$$

$$\phi_t^s + \eta + \frac{1}{2} \phi_x^{s2} - \frac{1}{2} (1 + \eta_x^2) \phi_z^2 = 0, \quad (2)$$

ここに、

$$\phi_z = \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{M-m} \frac{\eta^j}{j!} \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)}(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{j+1} \psi_n(x, z) |_{z=0}, \quad (3)$$

$$\psi_n(x, z) = \exp(k_n z + i k_n x), \quad (4)$$

であり、添字 x, z, t はそれぞれ偏微分を k_n は n 番目のフーリエモードの波数、 N はフーリエモードの個数（自由度の大きさ）、 M は ϕ_z に対して評価する非線形干渉の次数、 $\phi_n^{(m)}(t)$ は次式を逐次解くことによって決定されるフーリエ係数である。

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(1)} \psi_n(x, 0) = \phi_s, \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)} \psi_n(x, 0) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^j \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m-j)} \psi_n(x, z) |_{z=0}, \quad m=2, 3, \dots, M \quad (6)$$

時間発展については、式(1)および(2)をフーリエ空間上で4次のRunge-Kutta-Gill法で発展させ、全ての非線形項について aliasing 誤差を除去した。

これより得られる数値解の精度については、初期波として Stokes 波の数値的厳密解 (Tanaka, 1987) を与え、その時間発展を厳密解と比較することにより行うとともに、エネルギー保存則に対する誤差を調べることも行った。前者に対しては $\varepsilon_1 = |k[\eta_n(x, t) - \eta_e(x, t)]|_{max}$ 、後者に対しては $\varepsilon_2 = |1 - E(t)/E(0)|_{max}$ によって Stokes 波

が100周期伝播する間の精度評価を行った。ここで、 η_n は数値解、 η_e は厳密解および $E(t)$ は全エネルギーの時間変化を示す。その結果、 $M=4$, $N=16$ の下で $ka=0.2$ の Stokes 波を初期波と与えたときの ε_1 および ε_2 の値はそれぞれ 6.7×10^{-4} および 2.4×10^{-5} となり、 $M=4$ とすれば厳密解に近い精度を持つ解が得られることがわかった。

3. 計算条件

Yasuda・Mori(1994)によって、カオスの振舞いを示す準単色波の記述には $0 \leq k/k_p \leq 4$ 以上の領域の波数空間と不安定領域内に4組以上のモードが存在できる自由度が必要となることが明らかにされている。そこで、 $0 \leq k/k_p \leq 4$ の波数空間上に128個のフーリエモードを与え、 $k = k_p \pm 2\Delta k, 4\Delta k, 6\Delta k$ および $8\Delta k$ の位置にそれぞれ1組、および $k = k_p \pm 10\Delta k$ & $\pm 11\Delta k$ の位置に2組の側帯波を伴う初期波形勾配 $k_p a_p = 0.10$ および 0.12 の Stokes 波の時間発展を調べることにした(図-1)。なお、 $\Delta k = k_p/32$ として $0 \leq k/k_p \leq 4$ の波数域を離散化している。このときの側帯波の振幅は Stokes 波のものの $1/100$ とし、その位相は Stiassnie & Krozynski(1982)の結果より増幅率が最大となるように Stokes 波に対して $-1/4\pi$ とした。

4. 側帯波不安定とモード間干渉の役割

Caponiら(1982)の結果は、不安定波数域外の側帯波はカオス化には関与せず、主波(搬送波)とのエネルギー分配に関与する側帯波の不安定のみ Stokes 波のカオス化が根本的に支配されていることを示していた。そして、カオス化に関わるモード間のエネルギー分配が不安定波数域内に限定されている点に水面重力波のカオスの特色があるとして、これを 'confined chaos' と呼んだが、ここでは、十分な波数空間の領域と自由度(離散化)の下でこの結果を検証し、水面重力波のカオスの正しい描像を明らかにする。

図-2は、上述の側帯波を伴う Stokes 波の無次元スペクトルの時間発展を示したものである。Yuen・Lake(1982)によれば、 $k_p a_p = 0.10$ としたときの NLS 方程式より導かれる不安定

波数領域は $0.141k_p (\doteq 0.453\Delta k) < |k - k_p| < 0.283k_p (\doteq 9.05\Delta k)$ となるから、 $k = k_p \pm 6\Delta k$ および $\pm 8\Delta k$ でのそれぞれの1組の側帯波に振幅を与えた場合にはFPU再帰現象が予想されるが、最終的な計算結果は共にカオス化している。これを $k = k_p \pm 6\Delta k$ の場合について考えると、波数 k_p の主波と $k_p + 6\Delta k$ の側帯波の干渉によって波数 $6\Delta k$ の低波数モードが励起され、さらに $30\Delta k$ の波数を持つこれの5倍の高調波モードと $k_p (= 32\Delta k)$ の波数を持つ主波との干渉によって $2\Delta k$ の低波数モードが励起されることがわかる。この $2\Delta k$ およびその高調波のモードが主波と干渉することによって、離散的に不安定領域内に $k_p \pm 2\Delta k, \pm 4\Delta k, \pm 6\Delta k$ および $\pm 8\Delta k$ の側帯波が励起され、これらが主波とのエネルギー分配に関与することによってカオス化することになる。そして、これらの側帯波が主波のエネルギーレベルに到達する $t/T_p \sim 1000$ までは図-2(c)に見られるような再帰現象が保たれることになる。これは、Yuen・LakeやCaponiらのように7個のモードで近似する少数自由度系の扱いでは説明できないことであり、自由度を大きくした場合にはカオス化に不安定波数域外のモード間干渉が重要な役割を果たすことを示すものといえる。

これに対し、後者の $k = k_p \pm 8\Delta k$ の側帯波の場合では主波との干渉によって波数 $8\Delta k$ の低波数モードが励起されるが、主波の波数がこれの倍数の $32\Delta k$ であるため、 $8\Delta k$ の倍数以外のモードが励起されない。この結果、不安定波数域の側帯波は初期の $k_p \pm 8\Delta k$ における1組に留まり、再帰現象が続くことになる。しかしながら、この場合でも $t/T_p \sim 1500$ 以降はカオス化しているが、この原因は、フーリエ変換等により数値的に生み出される極微少な誤差によって不安定域内のモードにも主波の振幅に対して 10^{-30} のオーダーの振幅が付与され、これらが側帯波の不安定によって $t/T_p \sim 1500$ において主波と同オーダーとなるまでに発達することにある。自然界においてはこのような微少攪乱はむしろ一般的であり、このことからすれば、定常波動やFPU再起現象が実際に永続することはあり得ず、側帯波不安定を起こすような水の波の‘end-state’はカオスになると言っ

てよい。

1組の側帯波が $k_p \pm 2\Delta k$ に置かれる場合は、主波との干渉によって直ちに $2\Delta k$ の波数の低波数モードが励起され、その高調波と主波との相互干渉によって不安定波数域内に $k_p \pm 4\Delta k$, $k_p \pm 6\Delta k$ および $k_p \pm 8\Delta k$ の側帯波が生成される。このため、これらの側帯波が主波とのエネルギー分配を通して主波と同オーダーに到達するまでの時間は短かく、 $t/T_p \sim 500$ 付近において既にカオス化が生じている。

これらに対し、1組の側帯波が $k_p \pm 4\Delta k$ に置かれる場合、同様な干渉を通して不安定波数域内に $k_p \pm 8\Delta k$ の波数を持つ側帯波が励起され、主波と同オーダーまで速やかに到達するが、主波とのエネルギー分配に関与する側帯波は $k_p \pm 4\Delta k$ および $k_p \pm 8\Delta k$ の2組に留まる。このことが、図-2(b)に見られるように、FPU再起でも、またカオス状態でもない中間的な時間発展につながっているものと考えられる。 $k_p \pm 8\Delta k$ の場合にはフーリエ変換の数値誤差によって生じた側帯波の不安定発達のために $t/T_p \sim 1500$ 以降はカオス化していたのに対し、この場合には $t/T_p=2500$ においても一定の秩序を保ち、準周期的過程を維持していることがわかる。この場合も、フーリエ変換等に伴う数値誤差によって不安定波数域内の全モードに 10^{-30} 程度の振幅が与えられているが、主波のエネルギーは $k_p \pm 4\Delta k$ および $k_p \pm 8\Delta k$ での側帯波に分配され、これらの間での交換が継続されるため、これらの側帯波以外には十分に分配されず、主波とこれら両側帯波の変調に支配される準周期的時間発展になったものと考えられる。

以上のいずれも1組の側帯波が不安定波数域に置かれたものであり、数値的誤差の影響が現れるまでの $t/T_p \leq 1500$ において見れば、1組の側帯波であってもその位置に応じてFPU再起、準周期過程およびカオスの3種類の時間発展に大別されることがわかる。

ついで、上述したように $k_p \pm 10\Delta k$ および $k_p \pm 11\Delta k$ の波数を持つ2組の側帯波を安定波数域においた場合のStokes波の時間発展について検討する。図-3はその結果を示した

ものであり、この場合は不安定波数域に側帯波が存在しないため、主波の振幅は一定値に保たれ、定常波として永続的に伝播するはずである。事実、 $t/T_p \sim 600$ 付近まで定常波として伝播しているが、その後急激に定常性が失われ、上述したような数値的誤差の影響が現れる $t/T_p \sim 1500$ の遙か前にカオス化している。これは、Caponiらの水の波のカオスを‘*confined chaos*’とする考え方では説明できず、水の波ではモード間干渉を通してカオスが‘*confine*’されないことを示すものと言える。すなわち、 $k_p \pm 10\Delta k$ および $k_p \pm 11\Delta k$ の側帯波の干渉によって Δk の波数を持つ低波数モードが励起されると、直ちにこれと主波との干渉によって不安定波数域内の $k_p \pm \Delta k$ から $k_p \pm 9\Delta k$ までの側帯波が形成され、これらが主波とのエネルギー分配に加わってカオス化を引き起こすことになる。このように、不安定波数域内に側帯波が存在していなくても、十分な自由度があればモード間干渉によって主波とのエネルギー分配に関与する側帯波が励起され、さらにそれが全波数域に広がるため、‘*confined chaos*’は水の波には当てはまらないと言える。

5. おわりに

十分な広さを持つ波数空間上で十分な自由度を与えて水面重力波の伝播シミュレーションを行うことによって、カオス化にモード間干渉が重要な役割を果たしていることを明らかにした。モード間干渉は、初期側帯波の位置に関係なく不安定波数域内に側帯波を励起させ、カオス化させると同時に、これらの側帯波のカオス的振る舞いを波数空間全域に広げる役割を果たすため、水の波のカオスは‘*unconfined chaos*’と呼べる。このような水面重力波のスペクトル特性や分散関係など諸特性に関する詳細な検討は前述の Yasuda・Mori(1994)でおこなわれている。

最後に、本研究は文部省科学研究費一般(C)(06650559)および特別研究員奨励費(JSPS0440)による成果であり、ここに謝意を表す。

参考文献

- Caponi, E.A., Saffman, P.G. and Yuen, H.C.(1982) Instability and confined chaos in a nonlinear dispersive wave system, *Phys. Fluids* 25(12), pp.2159-2166.
- Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.P.(1987) A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 184, pp.267-288.
- Shen, M.M. and Nicholse, D.R.(1987) Stochasticity in numerical solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Fluids* 30(10), pp.3150-3153.
- Stiassnie, M., Kroszynski, U.I.(1982) Long-time evolution of an unstable water-wave train, *J. Fluid Mech.*, 116, pp.207-225.
- Tanaka, M.(1983) The stability of steep gravity waves, *J. Phy. Soc. Japan*, 52, pp.559-568.
- Yasuda, T. and Mori, N.(1994) Roles of sideband instability and mode coupling in forming a water wave chaos(submitted).
- Yuen, H.C. and Lake, B.M.(1982) Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves, *Adv. Appl. Mech.* 22, pp.67-229.

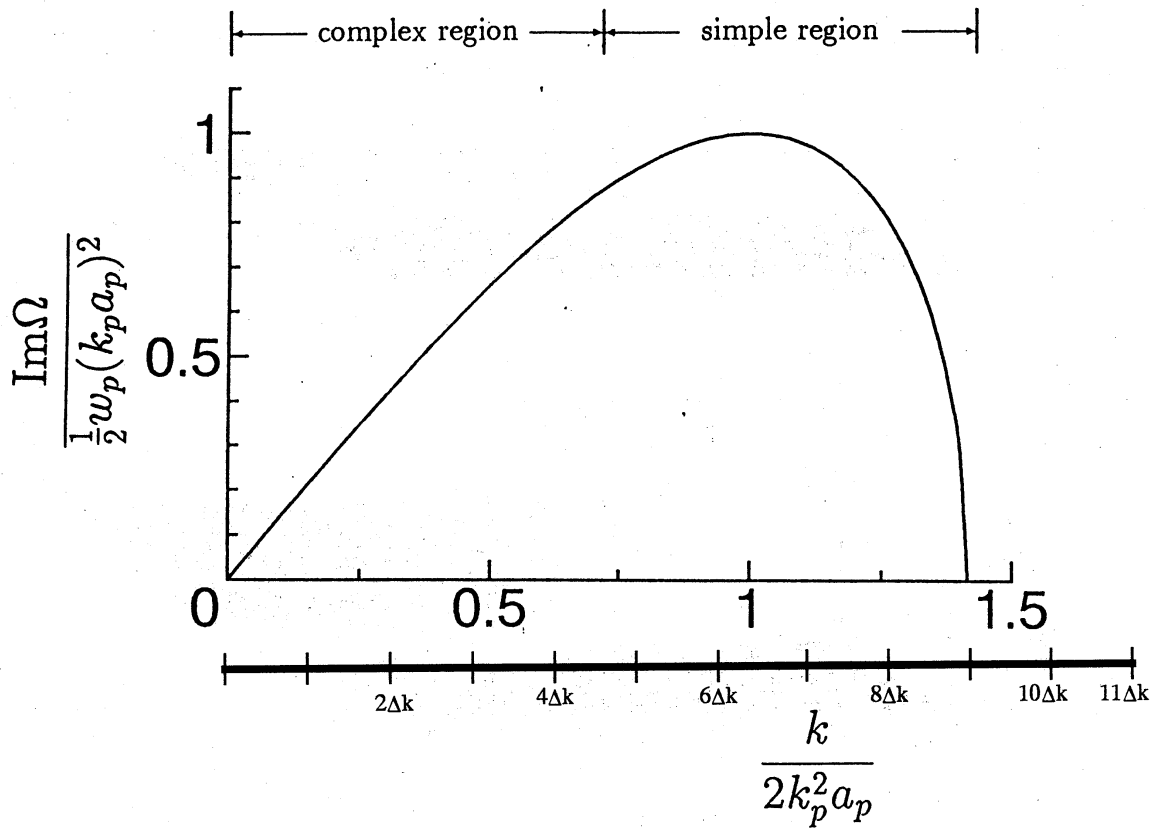
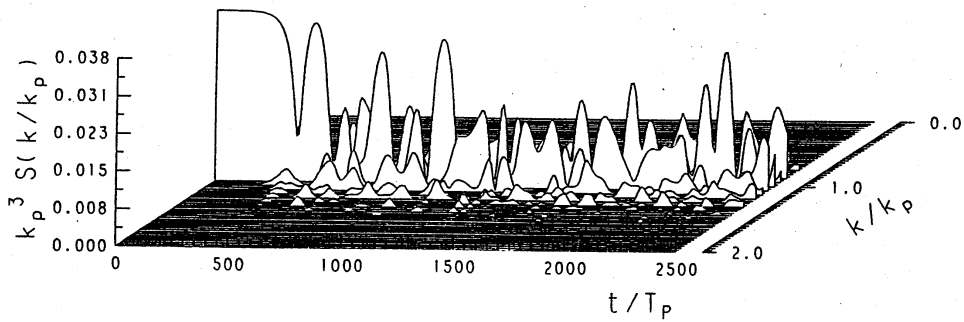
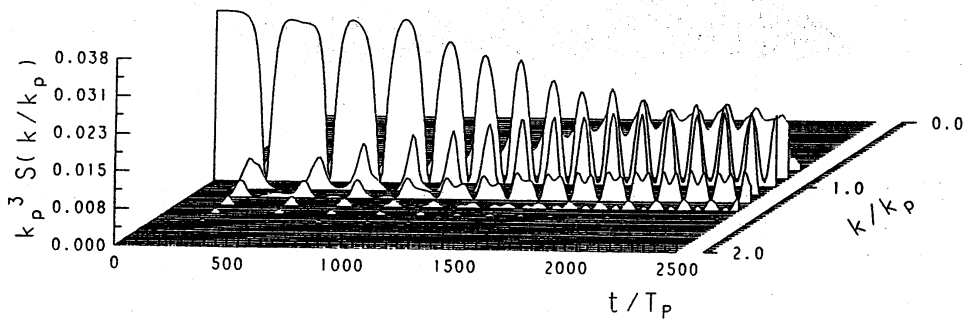


図-1 離散化された不安定波数域



(a) $|k - k_p| = 2\Delta k$ ($k_p a_p = 0.10$)



(b) $|k - k_p| = 4\Delta k$ ($k_p a_p = 0.10$)

図-2 初期に1組の側帯波を不安定波数域内の $k_p \pm 2\Delta k$, $k_p \pm 4\Delta k$, $k_p \pm 6\Delta k$ および $k_p \pm 8\Delta k$ においた場合のフーリエスペクトルの時間発展.

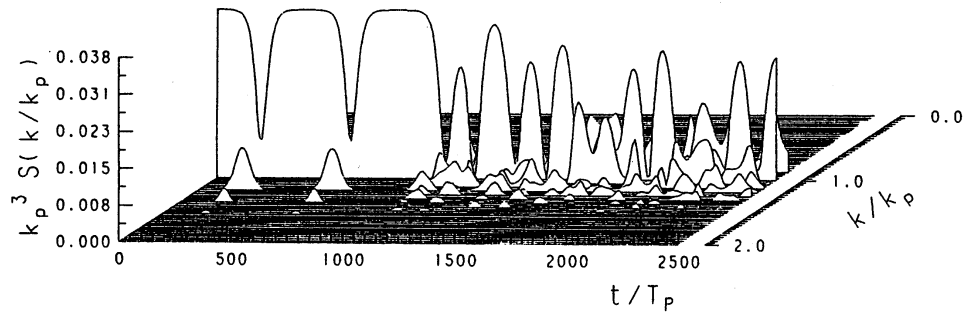
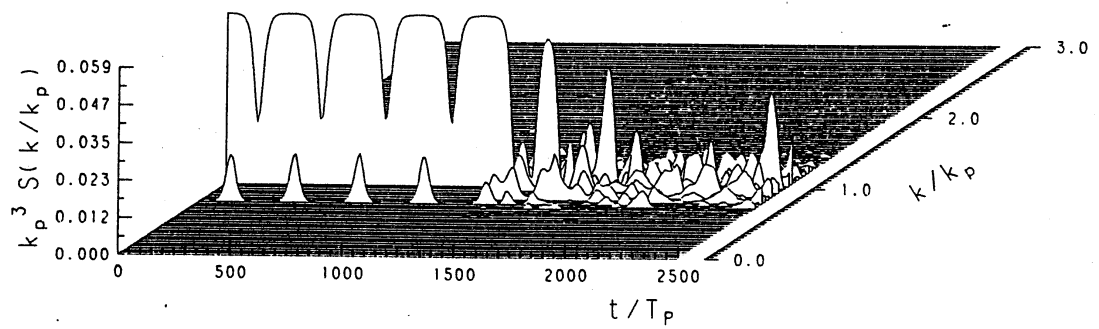
(c) $|k - k_p| = 6\Delta k$ ($k_p a_p = 0.10$)(d) $|k - k_p| = 8\Delta k$ ($k_p a_p = 0.12$)

図-2 初期に1組の側帯波を不安定波数域内の $k_p \pm 2\Delta k$, $k_p \pm 4\Delta k$, $k_p \pm 6\Delta k$ および $k_p \pm 8\Delta k$ においた場合のフーリエスペクトルの時間発展.

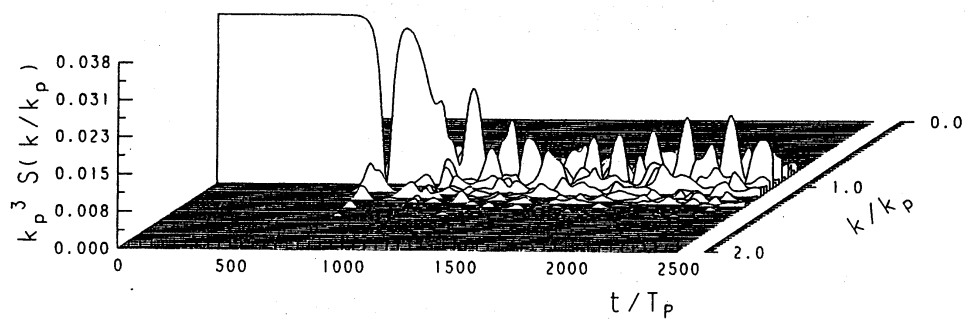


図-3 初期に2組の側帯波を不安定波数域外の $k_p \pm 10\Delta k$ & $k_p \pm 11\Delta k$ においた場合のフーリエスペクトルの時間発展.