数理解析研究所講究録
908巻 1995年 217-224

極限定在波の頂角について

九大応力研　　岡村　誠（OKAMURA Makoto）

前回[3]は定在波の局所解析解を求めて，その頂角が90°になることを示した．今回はその方法を拡張して，数値的に定在波を解き，頂角が90°になることを示すつもりだったが，残念ながら，今のところ極限定在波の頂角は90°に近いらしいという結果しか得られていない．あともう一息だ．

1. これまでの研究

水の波の基礎方程式を直接数値的に解いて，かなり大きい振幅の定在波を初めて求めたのはSchwartzとWhitney[1]である．彼らは速度ポテンシャルと表面変位を25次まで振幅展開して，定在波を求めた．そのままでは，最大振幅の約半分のところで展開パラメーターが収束半径を越えるので，展開は収束しなくなる．そのため彼らはPadé近似を使って，かなり大きい振幅の定在波を求め，その最大波高（定在波の最大振幅と思っていてよい）は0.64 ∼ 0.67と予想している．

MercerとRoberts[2]は時間については数値積分，空間については自由表面上で渦糸近似をして，渦糸の強さを反復法で求め，定在波を計算している．この方法ではSchwartzらに比べてはるかに精度よく定在波が計算できていて，かなり極限に近い定在波も求めている．彼らは最大振幅定在波（最大波高は0.6202）と極限定在波は異なるものであることを示した．また彼らの結果によると極限定在波の頂角は60 ∼ 70°と予想している．Mercerらのものが現在のところ最も信頼のできる結果である．

ここで扱う問題も上のものと全く同じである．そしたら，なぜ同じことを行なうのか？ひとつには筆者が局所解析によって求めた極限定在波の頂角（90°）とMercerらの予想（60～70°）が異なっていること．もうひとつには定在波を求める新しい方法を見つけるためでもあった．ここで紹介する方法によると極限定在波の頂角は90°を示唆している．これは局所解[3]の結果と一致している．

2. 問題の定式化

非圧縮非粘性流体の2次元渦なし運動を仮定する．自由表面での表面張力は特に極限波の峰付近では重要だろうけれども，ここでは無視する．また水の深さは無限大とする．つまり，考えられる最も単純な定在波を求める．速度ポテンシャルを$\phi(x,y,t)$，圧力を$P(x,y,t)$，重力加速度をgとすれば，基礎方程式は

$$\Delta\phi = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y\to-\infty} \to 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} P &= \phi_t + \tfrac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_y^2) + gy, \\ &= 0, \qquad \text{自由表面上で} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{DP}{Dt} &= \phi_{tt} + 2\phi_{xt}\phi_x + 2\phi_{yt}\phi_y + 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{xx}(\phi_x^2-\phi_y^2) + g\phi_y \\ &= 0 \qquad \text{自由表面上で} \end{aligned} \tag{4}$$

となる．xは空間の水平方向，yは空間鉛直方向の座標を表わす．(4)はLonguet-Higgins[4]が砕波する直前での進行波の峰近傍の波形の時間変化を解析する時に導出している．ここでは定在波の波数k，未知数である振動数ωにより，以下のような無次元化を行なっている．

$$kx\to x,\quad ky\to y,\quad \omega t\to t,\quad \frac{k^2}{\omega}\phi\to\phi,\quad \frac{k}{\omega^2}g\to g. \tag{5}$$

こうしておくと時間空間ともに2π周期の定在波を求めればよい．未知数である振動数はgに含まれている．対称性の条件としては．

$$\phi(x,y,t)=\phi(x+2\pi,y,t),\quad \phi(x,y,t)=\phi(-x,y,t), \tag{6}$$

$$\phi(x,y,t)=\phi(x,y,t+2\pi),\quad \phi(x,y,t)=-\phi(x,y,-t), \tag{7}$$

$$\phi(x,y,t)=-\phi(-x+\pi,y,-t+\pi). \tag{8}$$

(6) は空間の 2π周期性と y軸についての対称性，(7) は時間の 2π周期性と $t=0$ についての反対称性を表わしている．最後の (8) は線形解（$\cos xe^y\sin t$）から，非線形相互作用で作られる全ての項が満たしている条件である．また，この条件のおかげで時間について $0\le t\le \pi/2$(4 分の 1 周期）で考えれば十分である．これは振り子運動と類似している．上の条件と基礎方程式 (1), (2) を満足する速度ポテンシャルは

$$\phi=\sum_{k=0}^{N-2}\sum_{j=2-\mathrm{mod}(k,2)}^{N}A_{kj}\cos kx\exp ky\sin jt, \tag{9}$$

となる．ここで $\mathrm{mod}(k,2)$ は kを 2 で割った余り，Nは展開の最高次数のこと．

上の基礎方程式に加わる条件があと一つある．それは，振幅に関するパラメーター H（あるいは A_c）と速度ポテンシャルとの間の関係式で

$$H=1-A_c=g+\frac{D}{Dt}\phi_y\Big|_{y=\eta(x,t),x=0,t=0}, \tag{10}$$

となる．ここで$\eta(x,t)$ は表面変位である．これは $t=0$ での波の峰における流体の加速度と重力加速度との差である．極限波の峰における流体の加速度は重力加速度に等しいので，極限波は $H=0$, あるいは $A_c=1$ に対応している．速度ポテンシャルを (9) のようにしたので，$t=0$ で最も波形の振幅が大きくなり，その峰の 1 つは $x=0$ となる．

まず，代表点（collocation point）を以下のように決めて，独立な方程式を作ろう．

$$
\begin{aligned}
t_j &= \frac{j-1}{N-1}\pi & j &= 1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}, \\
x_{ij} &= \frac{i-1}{N-2}\pi - B\sin\left(\frac{i-1}{N-2}\pi\right)\cos(t_j), & i &= 1,2,\cdots,N
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(9) を (3), (4), (10) に代入し，さらに，上の代表点を x, t に代入すると $N(N-1)+1$ 個の方程式が得られる．表面の波形を $y=\eta(x,t)$ と表わすと未知数は A_{kj}, $\eta(x_{ij},t_j)$, gとなり，それらを反復法で求める．$t=0$では (4) は何も情報を与えない式になるから，(4) を時間微分した式を使う．

次に未知数の数について考えてみよう．以下では (9) での展開次数 N は奇数とする．(9) で

$$
A_{11} = \epsilon \ll 1 \tag{12}
$$

が主要項になる定在波を求めると

$$
\begin{aligned}
A_{iN} &= O(\epsilon^N), & i &= 1,3,5,\cdots,N-2 \\
A_{Ni} &= O(\epsilon^{N+2}), & i &= 1,3,5,\cdots,N \\
A_{i,N-1} &= O(\epsilon^{N-1}), & i &= 0,2,4,\cdots,N-3 \\
A_{N-1,i} &= O(\epsilon^{N+1}), & i &= 2,4,\cdots,N-1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる．するとϵ^Nまでの未知数 A_{kj}は $N(N-1)/2$ 個になる．(9) で kの和が $N-2$ までしかないのは，このためである．それと gが 1 つ，$\eta(x_{ij},t_j)$ が $N(N-1)/2$ 個あるので，未知数と方程式の数が一致する．

ここまでで，未知数 A_{kj}，$\eta(x_{ij},t_j)$, gの $N(N-1)+1$ 個の連立非線形方程式が得られた．ここではそれを反復法の一つである Newton 法で解く．反復法の初期解として $N=5$ の場合の弱非線形解を Mathematica で求めたものを使う．

$A_c = 0.390$ の結果

N	KE	$\delta\eta$	B
9	2×10^{-15}	7×10^{-8}	0
11	2×10^{-18}	4×10^{-9}	0
13	9×10^{-22}	1×10^{-10}	0
15	1×10^{-22}	2×10^{-11}	0

$A_c = 0.753$ の結果

N	KE	$\delta\eta$	B
11	3×10^{-10}	6×10^{-5}	0
13	1×10^{-10}	6×10^{-5}	0
15	1×10^{-11}	2×10^{-5}	0
15	2×10^{-12}	7×10^{-6}	0.6

表 1: 数値計算のチェック

4. 結果と考察

まず数値計算のチェックを行なう．$N = 9, 11, 13, 15$，$A_c = 0.390$，$A_c = 0.753$での結果を表 1 に示す．チェックには以下の方法を使う．$t = 0$での定在波（運動エネルギーはゼロである）を時間発展させ，半周期後の定在波を求める．その時刻での運動エネルギー（KE）と，もう一つは初期時刻と半周期後の表面変位の差の最大値

$$\delta\eta = \max_{0 \le x \le \pi} |\eta(x, 0) - \eta(\pi - x, \pi)| \tag{14}$$

を求め，それらがゼロにどれだけ近いかで数値計算のチェックができる．Schwartz[1)]らは速度ポテンシャルと表面変位の両方を 25 次まで振幅展開している．そして，彼らによると Padé 近似を使わないと，波高が 0.3 までの場合しか収束しない．表 1 の $A_1 = 0.390$ の結果は波高が 0.307 に対応している．速度ポテンシャルだけを振幅展開しているここでの結果は Padé 近似のようなものを使わないでも，また展開次数 Nが 13 のようにあまり大きくなくても非常に良いことがわかる．

$A_1 = 0.753$ の結果は波高が 0.551 に対応していて，最大波高 (0.620) の 88%であるが，15 次までの振幅展開で良い結果を出している．これは筆者による定在波の局所解の解析による 1 つの結果[3)]: 速度ポテンシャル

は極限波の時でさえ素直な関数（何回でも微分可能）である，を支持している．定常進行波の場合，速度ポテンシャルは極限波の時に峰で微分可能でない．また，表中のBは代表点の分布を変更するパラメーターである．(11) 参照．例えば，$B=0.6$ の場合には，tがゼロに近い時には代表点を峰近くに集中させ，tが$\pi/2$ に近い時には代表点を均等分布させている．

ここでもう一度，速度ポテンシャルのわずか 15 次までの展開で大振幅定在波が求まった理由を強調しておこう．定在波では極限波の場合でも，その速度ポテンシャルは微分可能な関数である．表面変位の方はその峰で 90°にとがるので，極限波の場合には微分可能ではない．これが表面変位をも展開する Schwartz らの方法で精度良く定在波が求まらなかった理由である．ここでは表面変位は未知数なので，この問題は起こらない．進行波の場合にも同じ方法で解けるが，極限進行波では定在波と違って，速度ポテンシャルも峰で微分可能でなくなるので，ここで示した方法は有効でない．

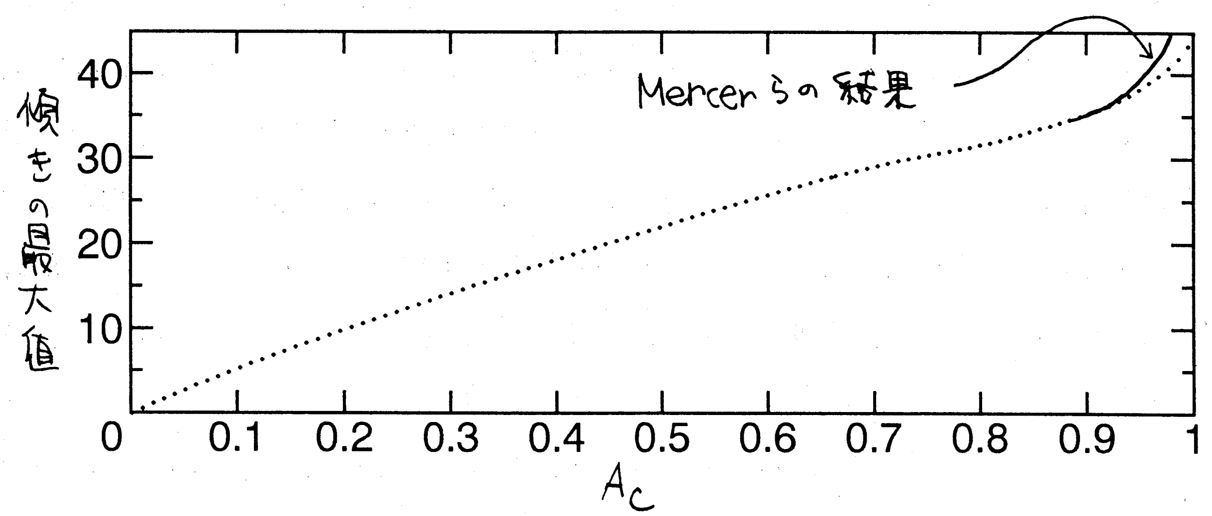

図 1: 表面の傾きの最大値と A_cとの関係．$N=15$

図 1 にいろいろな振幅（A_cに対応）での，表面変位の傾きの最大値の

結果を示している．Mercer らの結果もいっしょにのせてある．$A_c > 0.9$ で両者の結果が異なってきている．当然，筆者は自分の結果が良いと主張したいのであるが，今のところ，$A_c > 0.9$ での数値計算の収束性はよくない．つまり，展開係数 N，代表点を変更するパラメーター Bを変えると表面変位の傾きも多少変化する．この解の精度についてはこれからである．

最後に $N = 15$ のばあいの極限定在波 $(A_c = 1)$ の波形を示して終わろう．この時の頂角 45.00°であるが，$x \approx 0$ で 45°より少し大きくなる．おそらく，Nが小さいからだと思う．今はようやく極限波に近い場合が計算できるようになった段階で，これから展開次数を大きくしたりして解の精度をチェックしていかなければならない．

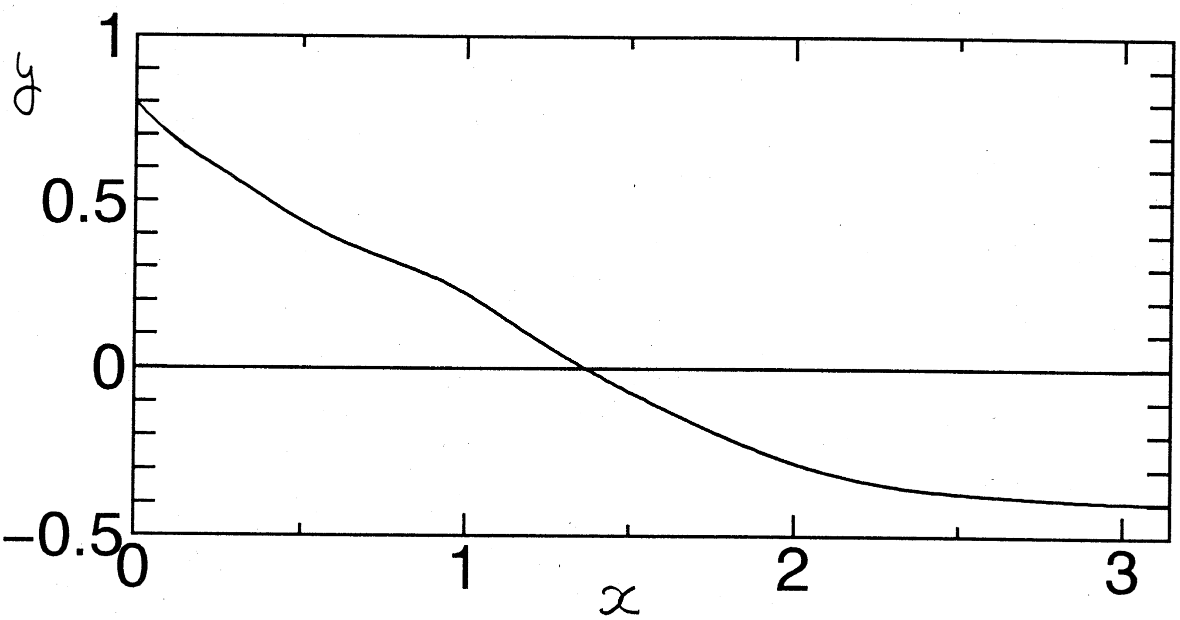

図 2: $A_c = 1$，$t = 0$ での極限定在波の波形．$N = 15$

参考文献

1) L.W. Schwartz & A.K. Whitney (1981) *J. Fluid Mech.*, **107**, 147–171.

2) G.N. Mercer & A.J. Roberts (1992) *Phys. Fluids*, **A4**, 259–269.

3) 岡村　誠 (1994) 京大数理研講究録 866, 240–251.

4) M.S. Longuet-Higgins (1980) *Proc. R. Soc. London*, **A371**, 441–451.