

ゆっくりと脈動する球によって放射されるN波

北大工 西沢 剛志 (Takeshi Nishizawa)
北大工 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)
北大工 矢野 猛 (Takeru Yano)

1. はじめに

非線形音響学における基本的な問題の一つとして、静止一様状態にある流体中に置かれた球の半径の時間的変動によって放射される音波について考察する。この放射された音波の非線形性の強さを表すパラメータとして、音響マッハ数 M が次式のように定義される。

$$M \equiv \frac{a^* \omega^*}{c_0} \tag{1.1}$$

ここで、 a^* は脈動の振幅、 ω^* は脈動の角振動数、 c_0 は静止一様状態における流体中の音速である。本研究は、球の脈動によって放射される音波の、音響マッハ数 M が十分小さい、すなわち $0 < M \ll 1$ であるような場合 (弱非線形問題) について、その形成過程および伝播過程を解析的手法によって明らかにするものである。

弱非線形問題としての球の脈動問題は、無次元化された脈動の振幅 $a \equiv a^*/r_0$ (ここで、 r_0 は脈動球の平均半径) と無次元化された脈動の角振動数 $\varepsilon \equiv \omega^* r_0 / c_0$ の組み合わせによって、次の三つのケースに大別される。

$$\begin{cases} (a) & a \ll 1, \quad \varepsilon \gg 1 & \text{(極小振幅・高振動数)} \\ (b) & a \ll 1, \quad \varepsilon = O(1) & \text{(小振幅・中間振動数)} \\ (c) & a = O(1), \quad \varepsilon \ll 1 & \text{(大振幅・低振動数)} \end{cases}$$

さらに、球が定常的に脈動を続ける場合 (定常問題) とある時刻から有限時間だけ脈動を続ける場合 (非定常問題) とに分類される。(a), (b) については、すでに定常問題、非定常問題共に解析されているが (文献[1]~[3]参照), (c) についてはまだ定常問題しか解析されていない ([4], [5]参照)。今回は、この (c) の非定常問題、すなわち、ある時刻 $t^* = 0$ の瞬間から球が膨張を開始し、やがて半径が最大値になったところで停止する場合 (半周期脈動)、および球の半径が最大値になった後収縮に転じて元の半径になったところで停止する場合 (一周期脈動) について解析を行った。

解析手法としては、定常問題と同様に、場を線形領域である近傍場と非線形性が支配的である遠方場に分け、さらに近傍場を非圧縮の内部領域と圧縮性の外部領域とに分割して、解がそれぞれの境界領域で漸近的に接続するように決定する方法をとっている [4]。しかし、脈動の始まりと終わりのごく短い時間においては流速や圧力が急激に変化するため、本研究ではこのような時間領域について、もっと短い時間で現象をながめるように無次元化し直して解析を行った。その結果、放射された音波は、遠方において“三つの”衝撃波を形成し、そのうち先端にできた微弱な衝撃波はやがてそのすぐ後ろの衝撃波に吸収されて一つになり、伝播に伴い正負対称のN波に漸近することがわかった。

2. 問題の設定と定式化

解析を行うにあたり, 簡単のために音響レイノルズ数 Re が十分大きいと仮定する:

$$Re \gg 1, \quad Re \equiv \frac{c_0 a^*}{\delta} \quad (2.1)$$

ここで, δ は音の拡散率である (文献[6]参照). このことにより, 遠方場において形成される, 強い散逸を生じる衝撃波面を除いて粘性・熱伝導の効果を無視して取り扱うことができる. また, 球対称な場を扱うので, 衝撃波が形成されるまでは, 流れ場を速度ポテンシャル Φ^* で記述することができ, 圧縮性完全流体の基礎方程式系から次の支配方程式が得られる.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \right) \Phi^* = \frac{1}{c_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)^2 + (\gamma - 1) \Delta \Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)^2 \Delta \Phi^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \cdot \frac{\partial}{\partial r^*} \right) \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

ただし, 流体は理想気体からなるものとし, その比熱比を γ で表した. このとき, 流速 u^* , 圧力変動 p^* は Φ^* を用いてそれぞれ以下のように表される.

$$u^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*}, \quad p^* = p_0 \left[\left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right] \quad (2.3)$$

ただし, p_0 は擾乱の無い場合の圧力である. 一方, 境界条件は次式で与えられる.

$$r^* = r_s^*(t^*) \text{ において } \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial r^*} = \frac{dr_s^*(t^*)}{dt^*} \quad (2.4)$$

ここで, 脈動球の半径 $r_s^*(t^*)$ は, 次のような二つの正弦的变化を行うものとする.

$$r_s^*(t^*) = \begin{cases} r_0 - a^* \cos \omega^* t^* & 0 \leq \omega^* t^* < 2\pi \\ r_0 - a^* & \omega^* t^* < 0, \omega^* t^* \geq 2\pi \end{cases} \quad (\text{一周期}) \quad (2.5)$$

あるいは

$$r_s^*(t^*) = \begin{cases} r_0 - a^* & \omega^* t^* < 0 \\ r_0 - a^* \cos \omega^* t^* & 0 \leq \omega^* t^* < \pi \\ r_0 + a^* & \omega^* t^* \geq \pi \end{cases} \quad (\text{半周期}) \quad (2.6)$$

また, 初期条件は次式で与えられる.

$$t^* = 0 \text{ において } \quad \Phi^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} = 0 \quad (2.7)$$

3. 近傍場の解析

内部領域においては以下のような無次元変数を用いる.

$$\begin{aligned} t = \omega^* t^*, \quad r = \frac{r^*}{r_0}, \quad a = \frac{a^*}{r_0}, \quad \varepsilon = k^* r_0, \quad \Phi = \frac{\Phi^*}{\omega^* r_0^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{k^*}{c_0} \Phi^*, \\ r_s = \frac{r_s^*}{r_0}, \quad u = \frac{u^*}{c_0}, \quad p = \frac{p^*}{p_0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

これらの変数によって支配方程式を書き直すと, $\varepsilon \ll 1$ より第1近似では,

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (3.2)$$

となる (非圧縮性流体近似)[4]. この方程式の解の一般形

$$\Phi_i = -\frac{f_i(t)}{r} + g_i(t) \quad (f_i(t), g_i(t) : t \text{ のみの任意関数}) \quad (3.3)$$

を無次元化した境界条件に代入することにより, $f_i(t)$ が次のように決まる.

$$f_i(t) = r_s^2(t) \frac{dr_s(t)}{dt} \quad (3.4)$$

一方, 外部領域においては空間座標として次の変数を用いる.

$$\tilde{r} \equiv k^* r^* = \varepsilon r \quad (3.5)$$

これによって支配方程式を書き直すと, $\varepsilon \ll 1$ より第1近似においては, 波動方程式

$$\tilde{\Delta} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \left(\tilde{\Delta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) \quad (3.6)$$

を得る[4]. この方程式の放射条件を満足する解の一般形は

$$\Phi = \frac{f_o(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (3.7)$$

であるが, $\tilde{r} \ll 1$ のときに内部領域の解と漸近的に接続しなければならない. すなわち,

$$\tilde{r} \ll 1 \text{ において} \quad \frac{f_o(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} = -\frac{f_i(t)}{r} + g_i(t) \quad (3.8)$$

の条件より, f_o, g_i の関数形が以下のように決定される[4].

$$\begin{cases} f_o(t) = -\varepsilon f_i(t) & \dots (a) \\ g_i(t) = \varepsilon \frac{df_i(t)}{dt} & \dots (b) \end{cases} \quad (3.9)$$

このようにして求めた近傍場の解は初期条件を満足しない。これは、脈動が始まった直後あるいは脈動の終わる直前のごく短い時間で流速や圧力が大きく変化するためであり、したがってこのような時間領域については、下記のようにもっと短い時間で現象をながめるような無次元化を行って解析し直す必要がある。このことが、定常問題とは本質的に異なる点である。

$$\zeta = t^* \left(\frac{c_0}{r_0} \right) \quad (3.10)$$

これを用いて支配方程式を書き直すと、第1近似においては

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \quad (3.11)$$

となる。波動方程式 (3.11) の放射条件を満足する解の一般形は、

$$\Phi = \frac{h(\zeta - r)}{r} \quad (3.12)$$

で与えられ、これを支配方程式と同様に無次元化し直した境界条件に代入することにより、結局次のような常微分方程式を解く問題に帰着される。

$$\frac{dh(\xi)}{d\xi} + \frac{h(\xi)}{r_s(\zeta(\xi))} = -r_s(\zeta(\xi)) \frac{dr_s(\zeta(\xi))}{d\zeta}, \quad (\xi = \zeta - r_s(\zeta(\xi))) \quad (3.13)$$

以上の解析によって得られた、近傍場における圧力波形を図1に示す。図1(a)は一周期脈動によって放射される圧力変動の全体像であるが、近傍場をさらに内部領域(非圧縮領域)と外部領域(波動領域)に分割する、定常問題と同じ解析方法による結果(破線)と、近傍場を全て波動領域として導いた(3.13)の解(実線)とは大局的には大差ないが、定常問題と同じ解析手法による解は $\phi = 0$, および $\phi = 2\pi$ の近傍での急峻な変化を正しく記述していない。したがって、遠方場の解とマッチングさせる近傍場の解としては、波の先端($\phi = 0$)近傍および波の後端($\phi \geq 2\pi$ (一周期), $\phi \geq \pi$ (半周期); テイルと呼ばれる。)については式(3.13)の解を用い、それ以外の波の全体像を表す解は(3.3), (3.4), (3.9)(b)で決まる解を用いることにする。

4. 遠方場の解析

遠方場を記述する方程式は、以下のように表される[7].

$$\frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0, \quad (4.1)$$

$$\left(w = \tilde{r}u, \quad \phi = t - \tilde{r} + \varepsilon(1 - a), \quad z = \frac{\gamma + 1}{2} \ln \frac{\tilde{r}}{R_0}, \quad R_0 : \text{定数} \right)$$

式(4.1)は

$$w = w(\phi + zw) \quad (4.2)$$

という陰形の厳密解を持つ. この w を線形領域の解 (流速) の遠方における漸近形とマッチングさせる. すなわち, $\tilde{r} \gg 1$ および $z \ll 1$ において

$$w(\phi + zw) = \tilde{r}\epsilon^3 \frac{d}{d\tilde{r}} \left[\frac{f_0(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \right] \quad (4.3)$$

が, 近傍場と遠方場のマッチングの条件である. これによって w が次のように求められる.

$$w(\psi) = -\epsilon^3 f'_0(\psi) \quad (4.4)$$

ここで, ψ は, $\psi = \phi - z\epsilon^3 f'_0(\psi)$ より, $\psi = \psi(z, \phi)$ のように決まる関数である.

5. 衝撃波の形成とその後の伝播過程

A. 等面積則

衝撃波形成後は, (4.1) の解として定まる波形は多価になり, 物理的意味を失ってしまう. これは, 散逸性を完全に無視して取り扱っていることによって起こる矛盾であるが, $Re \gg 1$ の場合には, 衝撃波面を一つの不連続面とみなすことができ, 多価の波形のこれによって隔てられる部分の面積が等しくなるようにして衝撃波面の位置を決定すればよい (等面積則). この簡便な方法を用いることにより, 散逸性を直接考慮することなしに衝撃波形成後の波形を求めることができる (詳細は文献[8]参照). このようにして求めた遠方場における流速波形および衝撃波面の位置 (位相) を図 2 (一周期) および図 3 (半周期) に示す. 一周期および半周期のいずれの場合も, 先端衝撃波 (ϕ_{wf}), 前方衝撃波 (ϕ_{sf}), 後方衝撃波 (ϕ_{sr}) の “三つの” 衝撃波が形成されるが, 先端衝撃波はやがて前方衝撃波に吸収されて一つになり, 遠方においては二つの衝撃波を伴った N 波に漸近していることがわかる. 一方, 図 4 は衝撃波面における流速の “跳び”, すなわち衝撃波の強さを表すグラフであるが, 前方衝撃波および後方衝撃波の強さ $\Delta W_{sf}, \Delta W_{sr}$ に比べて先端衝撃波の強さ ΔW_{wf} は非常に微弱であることがわかる. また, はじめは強さの異なる前後の衝撃波も, 伝播に伴って同じ強さになってゆき, 波形が正負対称の完全な N 波に漸近している様子が確かめられる.

B. 衝撃波形成距離

衝撃波面 (不連続波面) においては,

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)_{t^*} \rightarrow -\infty \quad (5.1)$$

となる. このことから, $W = w/\epsilon^3, Z = \epsilon^3 z$ とおくと,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \tilde{r}} \right)_t = \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)_t \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{r}} \right)_t \rightarrow -\infty, \quad \left(\eta = \tilde{r} + WZ : \text{ひずみ座標} \right) \quad (5.2)$$

を満足する \tilde{r} において不連続面は形成される. したがって, (4.2) より,

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \eta} \right)_t = 1 - Z f''_0(\psi) = 0 \quad (5.3)$$

を満足する $Z(=Z_s)$ が、遠方場の座標で見た衝撃波形成距離である。図5は衝撃波形成距離 Z_s の振幅依存性を表すグラフであるが、前方衝撃波形成距離 Z_{sf} は一周期脈動の場合も半周期脈動の場合も全く等しいが、後方衝撃波形成距離 Z_{sr} は半周期脈動の方が圧倒的に短い、すなわち脈動球に近いところで衝撃波が形成されるのがわかる。これらは共に、振幅 a の増大につれて小さくなる、すなわち球に近いところで衝撃波が形成されるが、先端衝撃波形成距離 Z_{wf} だけは a の増大と共に大きな値となり、 $a \simeq 1$ では $1/(1-a)$ で発散する。このことは、脈動の振幅が最大の極限では先端の衝撃波が形成されないことを意味しており、したがって、遠方において衝撃波面がいくつできるかは脈動の振幅によって異なるということがわかる。

6. おわりに

本研究によって得られた主な結果をまとめると、以下のようになる。

- (1) 非定常な大振幅脈動においては、脈動の始まりと終わりのごく短い時間で流速および圧力が急激に変化するので、そのような時間領域では、定常問題とは異なる無次元化が必要になる。この影響は波の先端と後端の薄い層として、音速 c_0 で伝播していくが(図1参照)、遠方場では先端の層は先端衝撃波を形成する。
- (2) 非定常な大振幅脈動によって放射された音波は、多くの場合遠方で3つの衝撃波を形成するが、先端衝撃波はやがて前方衝撃波に吸収され、伝播とともにN波に漸近する。
- (3) 後方衝撃波の形成距離は、半周期の脈動によって放射される音波の方が、圧倒的に短い。
- (4) 先端衝撃波は、前方衝撃波や後方衝撃波と異なり、大振幅の極限 ($a = 1$) では形成されない。

参考文献

- [1] K. A. Naugol'nykh, S. I. Soluyan, and R. V. Khokhlov, "Spherical waves of finite amplitude in a viscous thermally conducting medium," *Sov. Phys. Acoust.* **9**, 42-46(1962).
- [2] Y. Inoue, S. Ishii, and T. Okigami, "Propagation of finite amplitude sound waves radiated from a pulsating sphere" *J. Sound and Vibration* **106**, 257-265(1986).
- [3] Y. Inoue, T. Yano, and H. Tsujimura, "Propagation of acoustic waves and shock waves radiated by a sinusoidal pulsation of a sphere during a single period," *Fluid Dynamics Research* **4**, 215-227(1988).
- [4] Y. Inoue and Y. Gotoh, "Formation of weak shock waves caused by a sphere pulsating at large amplitude and low frequency," *J. Sound and Vibration* **146**, 269-280(1991).
- [5] P. A. Frost and E. Y. Harper, "Acoustic radiation from surfaces oscillating at large amplitude and small Mach number," *J. Acoust. Soc. Am.* **58**, 318-325(1975).
- [6] 日本流体力学会編, "流体における波動," (朝倉書店), p.62(1989).
- [7] D. T. Blackstock, "On plane, spherical, and cylindrical waves of finite amplitude in lossless fluids," *J. Acoust. Soc. Am.* **36**, 217-219(1962).
- [8] 文献[6], pp.200-203.

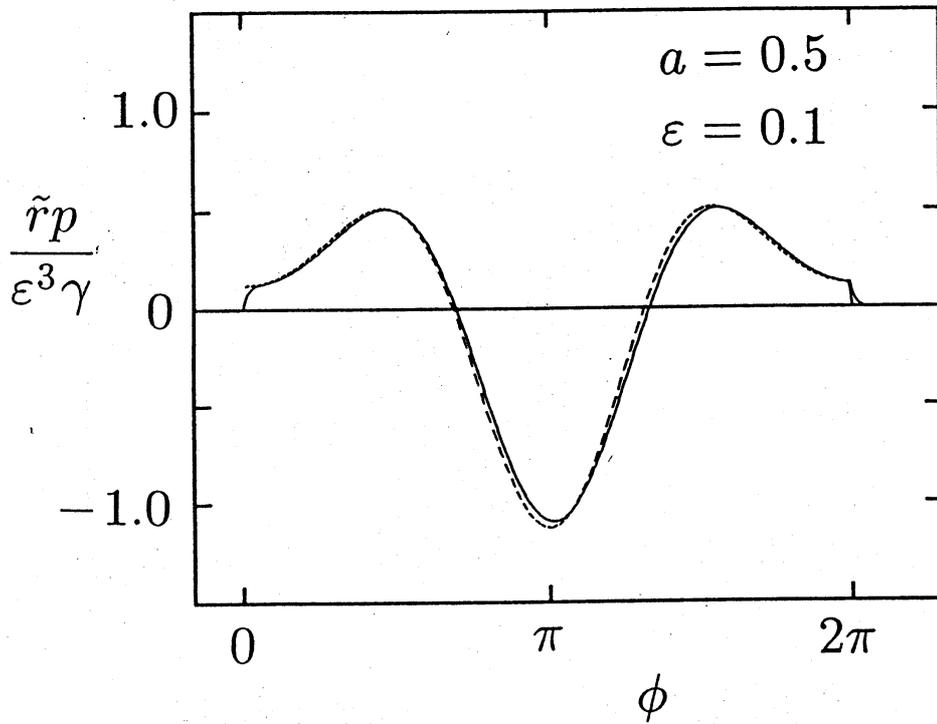


図1 (a). 近傍場における圧力波の全体像 (一周期)

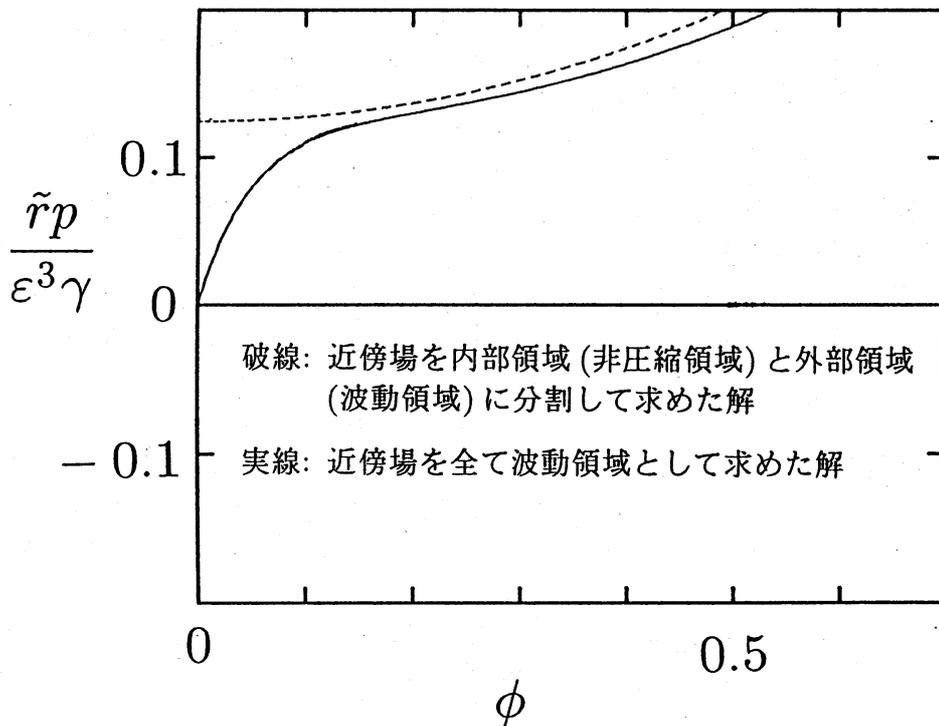


図1 (b). 近傍場における圧力波の先端

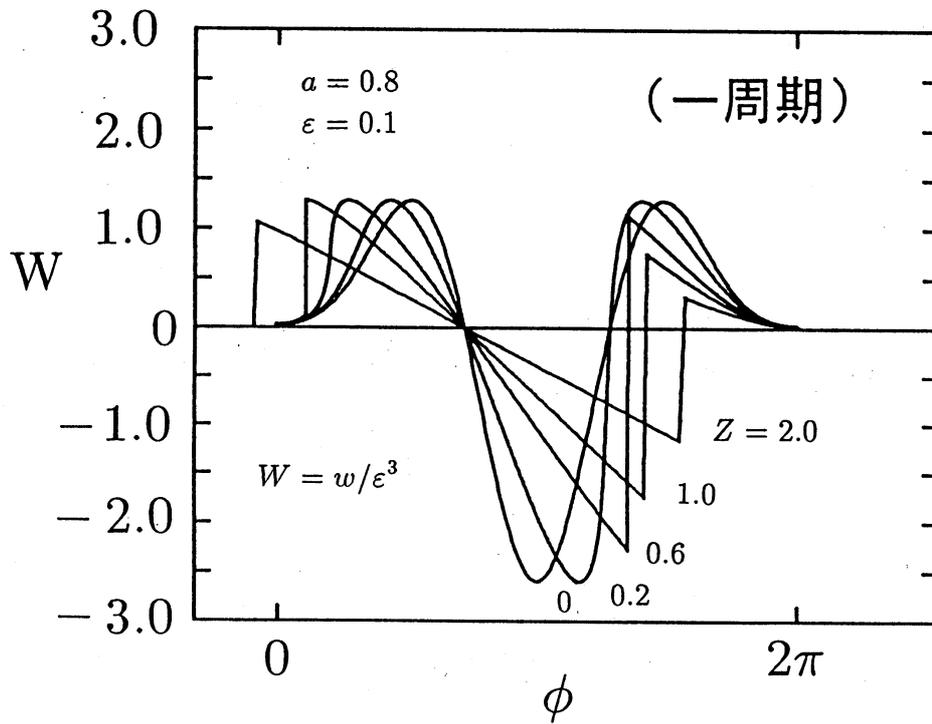


図 2 (a). 遠方場における流速波形 (一周期)

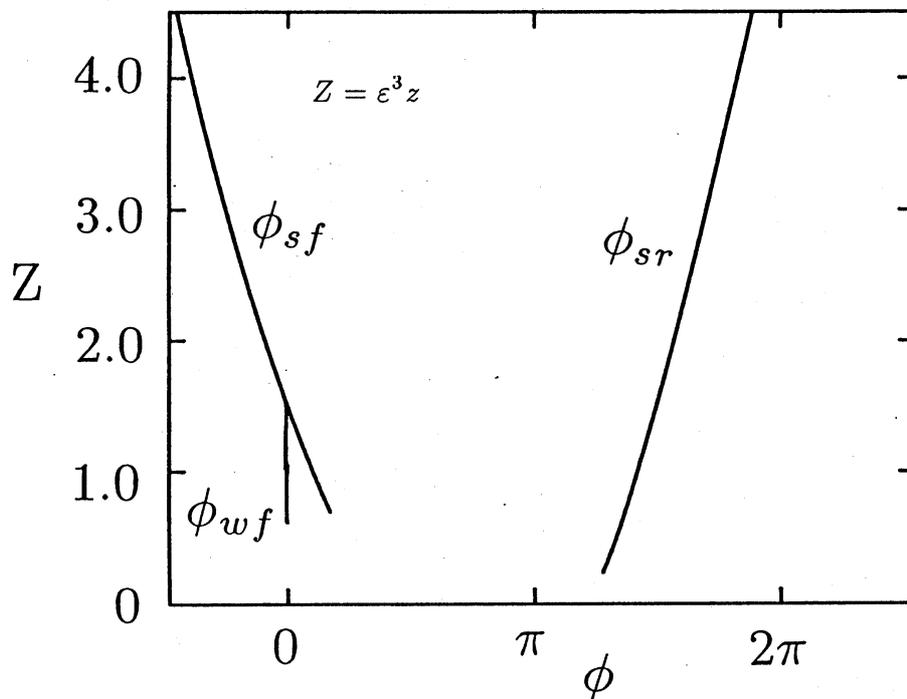


図 2 (b). 衝撃波の位置 (一周期)

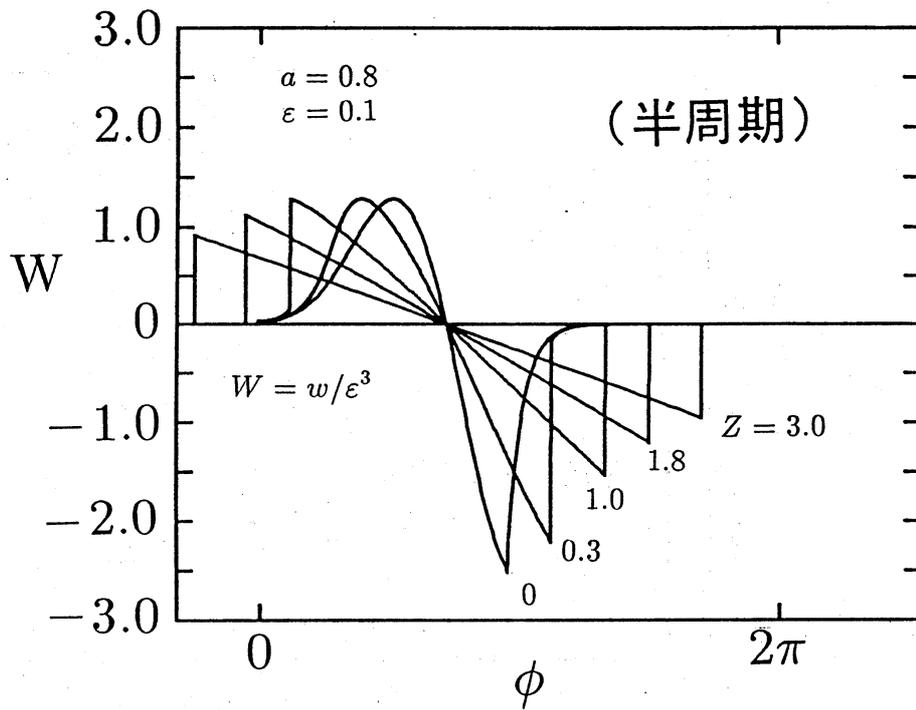


図3 (a). 遠方場における流速波形 (半周期)

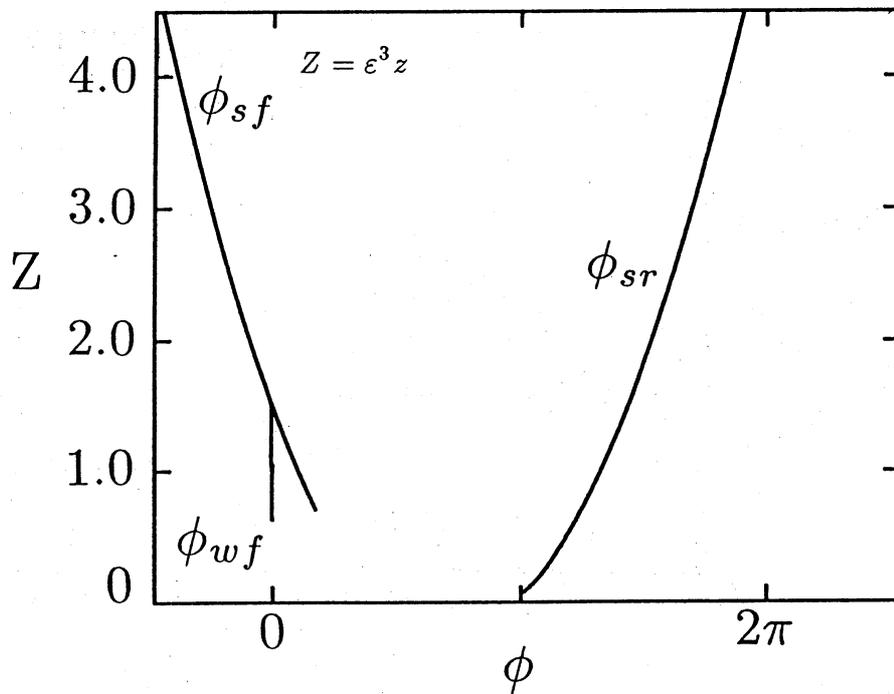


図3 (b). 衝撃波の位置 (半周期)

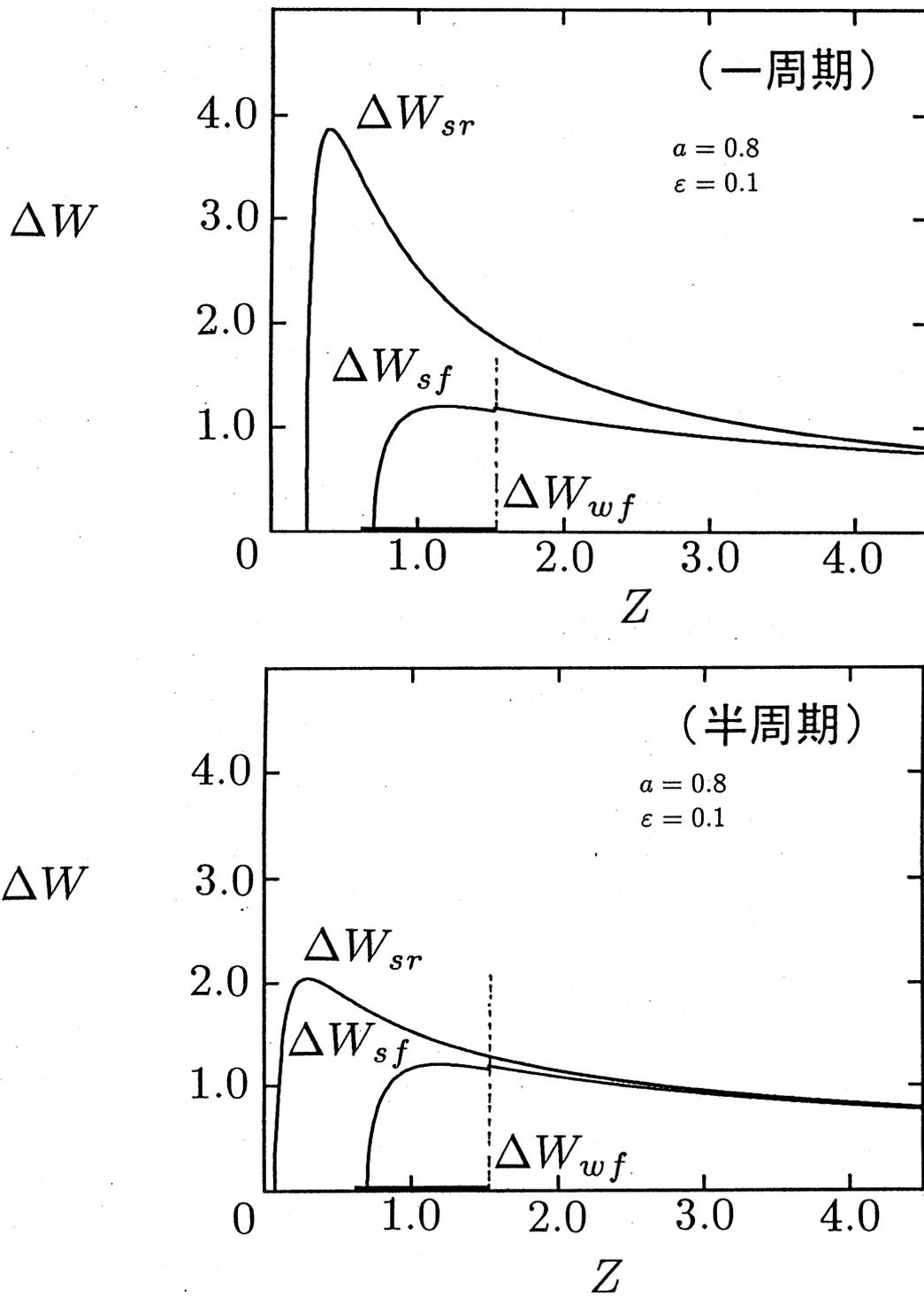


図4. 衝撃波の強さ

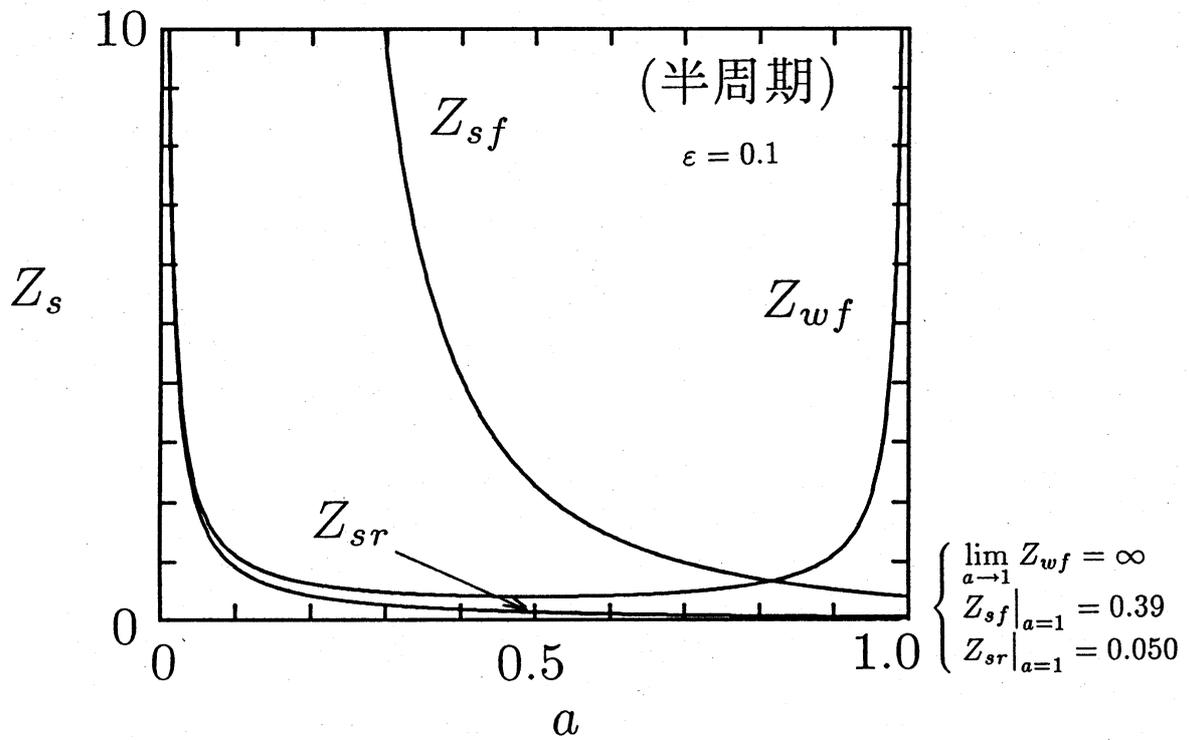
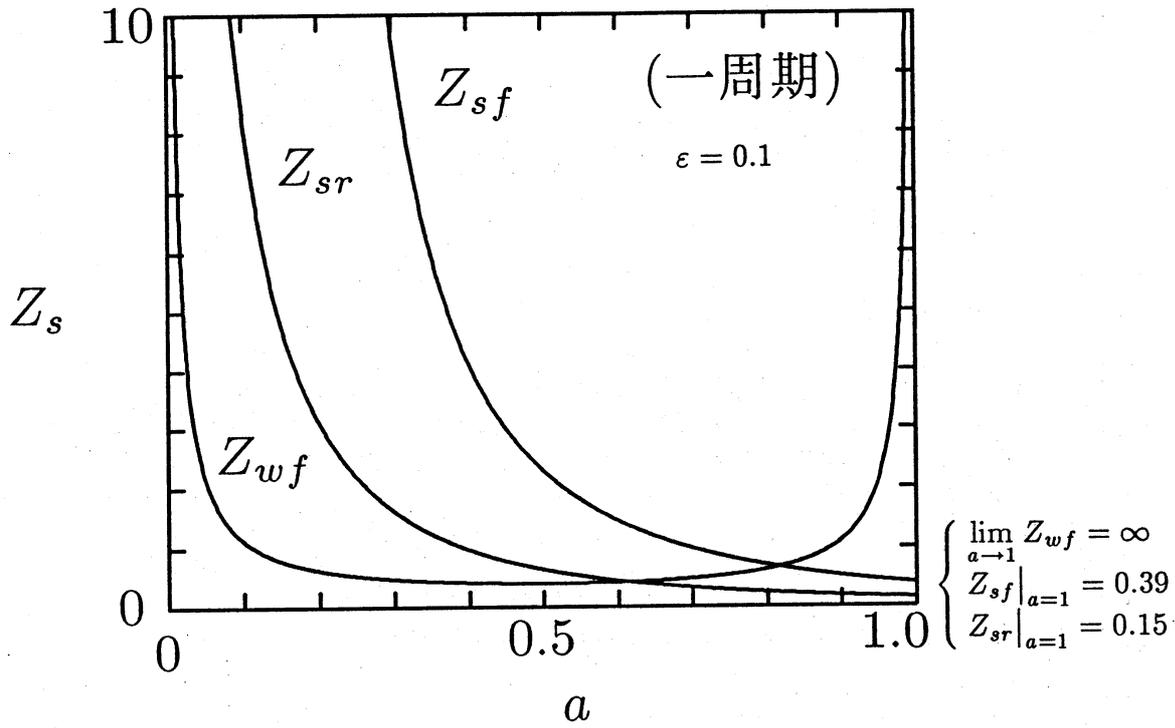


図5. 衝撃波形成距離の振幅依存性