数理解析研究所講究録
909巻 1995年 90-101

MATRIX COEFFICIENTS OF THE LARGE DISCRETE SERIES REPRESENTATIONS OF $Sp(2;\mathbb{R})$ AS HYPERGEOMETRIC SERIES OF TWO VARIABLES

織田 孝幸 (東大・数理)=TAKAYUKI ODA
(DEP'T OF MATH.-SCI., UNIV. OF TOKYO)

ABSTRACT. We investigate the radial part of the matrix coeffcients with minimal K-types of the large discrete series representations of $Sp(2;\mathbb{R})$. They satisfies certain difference-differential equations derived from Schmid operator. This system is reduced to a holonomic system of rank 4, which is finally found to be equivarent to higher order hypergeometric series in the sense of Appell and Kampé de Fériet.

§0. はじめに

実階数2の実シンプレクテック群 $Sp(2;\mathbb{R})$(行列サイズ4)の"大きな" 離散系列表現の minimal K-type を持つ行列係数の動経部分を調べる。

一般に、(π,H) を G の Hilbert 表現とするとき、$v,w\in H$ に対して、関数

$$c_{v,w}: g\in G\rightarrow(\pi(g)v,w)_H$$

は表現πの行列要素あるいは行列係数と呼ばれる。

G の離散系列表現の集合の中で、同じ無限小指標をもつものは、全部で $4=8/2=\#(W_G)/\#(W_K)$ 個ある。ここで W_Gは G の Weyl 群、W_Kは Kの Weyl 群であり、それぞれ位数は8と2である。同じ無限小指標を持つ4つの離散系列表現の中で、正則離散系列に属するものが1つ、反正則離散系列に属するものが1つある。この2つの表現の Gelfand-Kirillov 次元は3であり、残り2つの離散系列表現の Gelfand-Kirillov 次元は4であり、G の極大 unipotent 部分群の次元に等しい。この後者を、Kostant-Vogan にならって"大きな"離散系列 (large discrete series) と呼ぶ。この種の表現は、例えば Whittaker 模型を持つなど、正則離散系列と大いに違っている。しかしこれらの表現も相対 Lie 環 cohomology に寄与するなどし、大変重要である。

正則離系列表現を $L^2(G)$ の中で実現し、その両側 K-finite なベクトルを Cartan 分解 $G=KAK$を用いて A 上の関数と見ると、A の元を行列表示したときの成分(あるいは座標) に関しては、これは有理式になっていることは、Bergmann 核の Hua による明示公式よりすぐに分かる。

同じ問題を大きな離散系列表現について考えると、もう少し難しい higher transcendental functions が現れると予想される。しかしながら Whittaker 関数のときに既に見たように、πが主系列表現のときに現れる (Harish-Chandra の) 一般の球関数=超幾何級数ほどには難しくないと予想できる。

織田 孝幸 (東大・数理)=TAKAYUKI ODA (DEP'T OF MATH.-SCI., UNIV. OF TOKYO)

この中間程度に難しい特殊関数を、きちんとつかまえるのがわれわれの仕事の目標である。解答は本質的には既に得られている。Appell と Kampé de Feriet の意味での高次の(2変数)超幾何級数が現れる。これは F_2の、あるいは Lauricella の F_D のより一般な形で、BC_2型の超幾何級数の"半分系"とでもいうべきものである。

方法は Schmid 作用素を用いて、両側 K-type が minimal である $L^2(G)$ の元で与えられた離散系列に属するものを特徴付けることにある。ひたすら計算である。とは言うものの、かなり長い面倒な計算を行う動機付けになる見通しはあった。これは次のような経過で得られた。

山下博氏の $SU(2,2)$ の Whittaker 模型の論文の計算式を見ていて、large discrete series の Whittaker 関数を定義する微分方程式が簡単な積分で解けることに気づき、同じことを制限 root 系が同じ C_2 である $Sp(2;\mathbb{R})$ で実行してみた(応用上もこの群は興味深い)。宮崎琢也氏は long root に対応する放物群による parabolic induction で得られる generalized principal series の K-type の"形"が large discrete series のそれと同じであることを指摘し、この場合"corner の K-type"の Whittaker 関数は large discrete series のそれとまったく同じであることが証明できた(cf.Miyazaki-Oda[ ])。飯田正敏氏は minimal parabolic subgroup の主系列表現と long root の放物群の主系列の"corner K-type"の行列係数を調べ、後者が特に予想されたように、rank 4 の holonomic 系で Deviard-Gaveau がBC型のコンパクト対称空間のときに論じているものと同じであることを示した。従って large discrete series の行列係数も同じ範疇の関数で書き得ることは充分信じることが出来た。

自明でない K-type をもつ球関数を計算するという面倒なことをやる理由をもう少し説明したい。

元々、表現論の「草創の頃に」こうゆう問題に興味をもたれたのでのあるのでそれをもって理由としても充分であろうが、特にわれわれは L-関数のアルキメデス素点(実と複素素点)での研究という興味がある。この素点での研究は

(i) L-関数の理論を論理的に閉じたものにするのに必要

なのと

(ii) L-関数のガンマ因子を計算する

のみでなく、そもそも大域的な L-関数を定義する積分の収束そのものを見る為にも、特殊関数の良い漸近的な評価が必要となる。もちろん応用上必要な研究はさらにシャープなこの種の評価を要求する。この段階で特殊関数=球関数のコンパクトな積分表示は役にたつと期待されている。

さらに付け加えれば、そもそも微積分の一般論のみでは、例えば Riemann のゼータ関数の研究に役立たないように、実 Lie 群の表現論のいま知られている一般論のみでは保型的 L-関数の研究には不十分である(但し、半単純 Lie 群の調和解析は $\mathbb{R}^n$ のそれと違って、いろいろ強い規制が働き、保型形式の研究との距離はずっと近い)。この空隙を埋めるのは大きな問題である。空隙を埋める正しい方向を見いだすことも、すでに決して自明でない問題である。個々の単純 Lie 群の「個性」を反映するような明示的な結果は、そういう点からも有意義と信じる。

§1. $Sp(2;\mathbb{R})$ の離散系列表現の復習

$Sp(2;\mathbb{R})$ の root 系は Euclid 平面の中で

$$\{\pm(2,0), \pm(0,2), \pm(1,1), \pm(1,-1)\}$$

という整数点で与えられる。このうち

$$\{(2,0),(1,1),(1,-1),(0,2)\} \quad \{(0,2),(1,-1)\}$$

をそれぞれ正 root 系、単純 root 系とする。Tをコンパクト Cartan 部分群とすると、Tの unitary 指標の derivation は $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ と同一視され、dominant integral weight のなす部分集合は$\Xi = \{(n_1,n_2)\ |n_i \in \mathbb{Z}, n_1 \geq n_2\}$ となる。極大コンパクト群 Kの有限次元既約表現の同型類$\hat{K}$のなす集合は、表現の最高ウェイトを与えることによって定まるのでΞとの間に全単射がある。$\lambda \in \Xi$に対応する$\hat{K}$の元を $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ と書く。但しV_λは表現空間。

$Sp(2;\mathbb{R})$ の離散系列の表現は、正 root の和の半分が integral weight なので、Ξの regular elements の部分集合

$$\Xi' = \{\nu = (n_1,n_2)|n_i \in \mathbb{Z}, n_1 > n_2, n_1 \neq 0, n_2 \neq 0, n_1+n_2 \neq 0\}$$

で parametrize される。

$\Xi_I = \{(n_1,n_2)|n_1 > n_2 > 0\}$ と$\Xi_{IV} = \{(n_1,n_2)|0 > n_1 > n_2\}$ とが各々正則と反正則の離散系列表現を parametrize する領域となる。

$$\Xi_{II} = \{(n_1,n_2)|n_1 > 0 > n_2, n_1+n_2 > 0\}\ ;$$
$$\Xi_{III} = \{(n_1,n_2)|n_1 > 0 > n_2, 0 > n_1+n_2\}$$

とおくとき、$\Xi_{II} \cup \Xi_{III}$が large discrete series を parametrize する。

Harish-Chandra parameter $\Lambda \in \Xi_{III}$のとき、Λに対して positive な non-compact root は $\{(2,0),(0,-2),(-1,-1)\}$ であるので、Λに対応する離散系列表現π_Λの minimal K-type は

$$\lambda = \Lambda - \frac{1}{2}\{(2,0)+(0,2)+(-1,-1)\} + \{(1,-1)\} = \Lambda - (0,1)$$

で与えられる。このλを Blattner parameter ともいう。

Plancherel の定理より、離散系列表現π_Λの係数は $L^2(G)$ の中で $G\times G$-表現として、$\pi_\Lambda \otimes \pi_\Lambda^*$ と同型な表現を生成する。いま、π_Λの Blatter parameter $\lambda = (l_1,l_2)$ に対し、$\mu = (-l_2,-l_1)$ とおくと、$\tau_\mu \in \hat{K}$はτ_λの反傾表現で、しかもπ_Λ^* の minimal K-type になる。すると$\pi_\Lambda \otimes \pi_\Lambda^*$ の minimal K-type は$\tau_\lambda \otimes \tau_\lambda^*$ で、これは重複度 1 で生じる。この部分は $L^2(G)$ の中で、せいぜい次元が $(d+1)^2$の（実はさらにもっと次元が小さい)$\mathbb{C}$-線形部分空間で、これを Cartan 分解 $G = KAK$に関する radial part（つまり A への制限）を特徴付ける、微分（-差分）方程式系を書き上げることが最初の段階である。

§2. Schmid 作用素と方程式系の構成

織田 孝幸 (東大・数理)=TAKAYUKI ODA (DEP'T OF MATH.-SCI., UNIV. OF TOKYO)

さて、前節のように Harish-Chandra parameter $\Lambda \in \Xi_{III}$をもつ離散系列表現π_Λを考える。λを Blatter parameter とするとき、その反傾表現τ_μがπ_Λ^*の minimal K-type になるので、C^∞-induction $Ind_K^G(\tau_\lambda) = C_{\tau_\lambda}^\infty(K\backslash G)$ を考える。

一般に$\lambda \in \Xi$であるとき、Kの表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ の standard basis を $\{v_{\lambda,i} \mid 0 \geq i \geq d\}$ (但し$\lambda = (l_1, l_2)$ に対し、$d = d(\lambda) = l_1 - l_2$) とする。これの双対基底 $\{v_{\mu,j}^* | 0 \geq j \geq d\} \subset V_\mu$ を用いて、π_Λの表現空間 H_Λから V_λへ線形写像

$$v \in H_\Lambda \to \sum_{i=0}^{d} < v, v_{\mu,i}^* > v_{\lambda,i}$$

を定めると、これは絡空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi_\Lambda, C_{\tau_\lambda}^\infty(K\backslash G))$$

の元ϕを一つ定める。但し、ここで V_μはπ_Λ^* の (minimal K-type の) 部分空間として考える。

唯一の自明でない単射 K-準同型 $i: V_\lambda \to H_\Lambda$は制限写像

$$r: \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi_\Lambda, C_{\tau_\lambda}^\infty(K\backslash G)) \to C_{\tau_\lambda,\tau_\mu}^\infty(K\backslash G/K)$$

によるϕの像をΦと記す。

定義 (2.1). Φを *minimal* K*-type* をもつ離散系列表現π_λに属する球関数ととなえる。

Cartan 分解 $G = KAK$によってΦを A の関数と見て、それを調べるのがわれわれの目標である。

Φのみたす偏微分方程式系は次の通りである。

飯田氏の論説と同様に、(右-) Schmid 作用素 (gradient 作用素):

$$\nabla_{\tau_\lambda,\tau_\mu,\pm}^{right} : C_{\tau\lambda,\tau_\mu}^\infty(K\backslash G/K) \to C_{\tau\lambda,\tau_\mu\otimes Ad_{\mathfrak{p}_\pm}}^\infty(K\backslash G/K)$$

を定める。 この時 Kの表現$\tau_\mu \otimes Ad_{\mathfrak{p}_\pm}$を既約分解する：

$$\tau_\mu \otimes Ad_{\mathfrak{p}_\pm} = \tau_{(m_1\pm 2,m_2)} \oplus \tau_{(m_1,m_2)} \oplus \tau_{(m_1,m_2\pm 2)}.$$

(既約成分は 3 個でなく、もっと少ないかも知れない)。この時、$pr_{up}, pr_{even}, pr_{down}$ でそれぞれ、τ_μより次元の高い、同じ、低い既約因子への射影子とする。このとき、Whittaker 模型の時と同じく、minimal K-type の性質より、

$$pr_{even} \cdot \nabla_{\tau_\lambda,\tau_\mu,+}^{right} \Phi = 0 \quad ;$$
$$pr_{down} \cdot \nabla_{\tau_\lambda,\tau_\mu,+}^{right} \Phi = 0 \quad ;$$
$$pr_{down} \cdot \nabla_{\tau_\lambda,\tau_\mu,-}^{right} \Phi = 0 \ .$$

が成立する。

同様に左サイドから Schmid 作用素考えて、上と似た方程式系を得る。

次節でこれを明示的に書き下す。

§ 3. 明示的な方程式系とその整理.

この節では以下, 前節までに説明した Schmid の微分作用素による方程式系を明示的に計算する。$\Phi(a) = \{c_{i,j}(a)\}$ $(i,j = 0,\cdots,d)$ と標準基底を用いて書く。成分で書いた微分-差分方程式系は次の通り。ただし記号を次の様に定める。

記号 (3.0).

$$
\begin{aligned}
&D = D(a_1,a_2) = (a_1^2 - a_2^2)(a_1^2a_2^2 - 1)/(a_1^2a_2^2);\\
&sh(a_i) = (a_i - a_i^{-1})/2; ch(a_i) = (a_i + a_i^{-1})/2;\\
&th(a_i) = sh(a_i)/ch(a_i); ct(a_i) = ch(a_i)/sh(a_i) \quad (i = 1,2).
\end{aligned}
$$

ここで

$$D/4 = D(a_1,a_2)/4 = sh^2(a_1) - sh^2(a_2) = ch^2(a_1) - ch^2(a_2).$$

も成立する。

命題 (3.1). 右側の方程式系は次の通り 3 種類ある:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R1})_{i,j}:\quad &\partial_1 c_{i,j} + \frac{1}{2}(d-i-j)ct(a_1)c_{i,j} + \frac{1}{2}(l_1+l_2+j-i)th(a_1)c_{i,j}\\
&+ 4(i+1)D^{-1}sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j}\\
&+ 4jD^{-1}sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j-1} - 4(d-j)D^{-1}sh(a_2)ch(a_1)c_{i+1,j+1}\\
&- 4(d-i-1)D^{-1}sh(a_2)ch(a_2)c_{i+2,j} = 0 \qquad (0 \le i \le d-1, 0 \le j \le d)
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{R2})_{i,j}$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_2 c_{i+2,j} - \frac{1}{2}(d-i-j-2)ct(a_2)c_{i+2,j} + \frac{1}{2}(l_1+l_2+i+2-j)th(a_2)c_{i+2,j}\\
&- 4(d-i-1)D^{-1}sh(a_2)ch(a_2)c_{i+2,j}\\
&+ 4jD^{-1}sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j-1} - 4(d-j)D^{-1}ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j+1}\\
&+ 4(i+1)D^{-1}sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j} = 0 \qquad (-1 \le i \le d-2, 0 \le j \le d)
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{R3})_{i,j}$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_2 c_{i,j} + \frac{1}{2}(d-i-j)ct(a_2)c_{i,j} - \frac{1}{2}(l_1+l_2+i-j)th(a_2)c_{i,j}\\
&- 8(i+1)D^{-1}sh(a_2)ch(a_2)c_{i,j}\\
&- 8jD^{-1}ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j-1} + 8(d-j)D^{-1}sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j+1}\\
&+ \partial_1 c_{i+2,j} - \frac{1}{2}(d-i-j-2)ct(a_1)c_{i+2,j} - \frac{1}{2}(l_1+l_2+j-i-2)th(a_1)c_{i+2,j}\\
&+ 8(d-i-1)D^{-1}sh(a_1)ch(a_1)c_{i+2,j} \qquad (0 \le i \le d-2, 0 \le j \le d)
\end{aligned}
$$

左方程式系も次の通り 3 系列ある。

織田 孝幸 (東大・数理)=TAKAYUKI ODA (DEP'T OF MATH.-SCI., UNIV. OF TOKYO)

$(\mathrm{L1})_{i,j}$:

$$\begin{aligned}&\partial_1 c_{i,j+2} - \frac{1}{2}(d-i-j-2)ct(a_1)c_{i,j+2} + \frac{1}{2}(l_1+l_2+j+2-i)th(a_1)c_{i,j+2}\\ &+ 4(d-j-1)D^{-1}sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j+2}\\ &- 4(j+1)D^{-1}sh(a_2)ch(a_2)c_{i,j}\\ &- 4iD^{-1}ch(a_1)sh(a_2)c_{i-1,j+1} + 4(d-i)D^{-1}sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j+1} = 0\\ &\qquad (0 \le i \le d, -1 \le j \le d-1)\end{aligned}$$

$$(\mathrm{L2})_{i,j}:\quad \begin{aligned}&\partial_2 c_{i,j} + \frac{1}{2}(d-i-j)ct(a_2)c_{i,j} + \frac{1}{2}(l_1+l_2+i-j)th(a_2)c_{i,j}\\ &- 4(j+1)D^{-1}sh(a_2)ch(a_2)c_{i,j}\\ &+ 4(d-j-1)D^{-1}sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j+2}\\ &- 4iD^{-1}ch(a_1)sh(a_2)c_{i-1,j+1} + 4(d-i)D^{-1}sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j+1} = 0\\ &\qquad (0 \le i \le d, -1 \le j \le d-1)\end{aligned}$$

$(\mathrm{L3})_{i,j}$:

$$\begin{aligned}&\partial_1 c_{i,j} + \frac{1}{2}(d-i-j)ct(a_1)c_{i,j} - \frac{1}{2}(l_1+l_2+j-i)th(a_1)c_{i,j}\\ &+ 8(j+1)D^{-1}sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j}\\ &+ 8iD^{-1}sh(a_1)ch(a_2)c_{i-1,j+1} - 8(d-i)D^{-1}ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j+1}\\ &+ \partial_2 c_{i,j+2} - \frac{1}{2}(d-i-j-2)ct(a_2)c_{i,j+2} - \frac{1}{2}(l_1+l_2+i-j-2)th(a_2)c_{i,j+2}\\ &- 8(d-j-1)D^{-1}sh(a_2)ch(a_2)c_{i,j+2} = 0 \qquad (0 \le i \le d, 0 \le j \le d-2) \quad \square\end{aligned}$$

この方程式系を整理して, 階数 4 の holonomoic 系に帰着することが次の段階である。このため, 上の式達から一次微分の項を消去し, 行列成分間の線形関係を導き出す。十分時間をかければ次の諸関係に到達する。

命題 (3.2). *(6 項関係)*

$$(\mathrm{F6})_{i,j-1}:\quad \begin{aligned}&ich(a_1)c_{i-1,j-1} + (j-1)ch(a_2)c_{i,j-2}\\ &- (d-i-j)ct(a_1)sh(a_2)c_{i,j} - (d-i-j)sh(a_1)ct(a_2)c_{i+1,j-1}\\ &- (d-j)ch(a_1)c_{i+1,j+1} - (d-i-1)ch(a_2)c_{i+2,j} = 0\\ &\qquad (0 \le i \le d-1, 1 \le j \le d) \ \square\end{aligned}$$

命題 (3.3). *(9項関係)* 次の2種類の9項関係を得る。

$(\mathrm{F9\text{-}1})_{i+1,j+1}$:

$$\begin{aligned}
&2i\cdot sh(a_1)ch(a_2)c_{i-1,j+1}\\
&+\{-(l_1+l_2-i+j)th(a_1)D/4+(2j+1-i)sh(a_1)ch(a_1)\}c_{i,j}\\
&-(d-i-j-2)\{ct(a_2)D/4+2sh(a_2)ch(a_2)\}c_{i,j+2}\\
&-jsh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j-1}-(d-i-j-2)ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j+1}\\
&-2(d-j-2)sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j+3}\\
&+(d-i-j-2)sh(a_2)ch(a_2)c_{i+2,j}\\
&+\{(l_1+l_2-i+j)th(a_1)D/4-(d+j-2i-1)sh(a_1)ch(a_1)\}c_{i+2,j+2}\\
&+(d-i-2)sh(a_1)ch(a_2)c_{i+3,j+1}=0
\end{aligned}$$

$(\mathrm{F9\text{-}2})_{i+1,j+1}$:

$$\begin{aligned}
&i\cdot ch(a_1)sh(a_2)c_{i-1,j+1}\\
&+\{-(l_1+l_2+i-j)th(a_2)D/4-(2i-j+1)sh(a_2)ch(a_2)\}c_{i,j}\\
&-(d-i-j-2)sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j+2}-2j\cdot ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j-1}\\
&+(d-i-j-2)sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j+1}-(d-j-2)ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j+3}\\
&+\{-(d-i-j-2)ct(a_1)D/4+2(d-i-j-2)sh(a_1)ch(a_1)\}c_{i+2,j}\\
&+\{(l_1+l_2+i-j)th(a_2)D/4+(d-2j+i-1)sh(a_2)ch(a_2)\}c_{i+2,j+2}\\
&+2(d-i-2)ch(a_1)sh(a_2)c_{i+3,j+1}=0 \qquad \square
\end{aligned}$$

上の6項と9項の関係式より, 次の5項関係式を得る。

命題 (3.4).

$(\mathrm{F5})_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
&-(l_1+l_2-i-j)sh(a_1)sh(a_2)c_{i-1,j-1}-(d-i-j)ch(a_1)ch(a_2)c_{i-1,j+1}\\
&+2(d-i-j)c_{i,j}\\
&-(d-i-j)ch(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j-1}+(l_1+l_2-2d+i+j)sh(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j+1}=0
\end{aligned}$$

$(1\le i,j\le d-1)$

命題 (3.5). *(8項関係)* 次の2種類の関係式が成立する。

$(\mathrm{F8\text{-}1})_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
&i\cdot ch(a_1)sh(a_2)c_{i-1,j+1}\\
&+\{-(l_1+l_2+i-j)th(a_2)D/4-(2i-j+1)sh(a_2)ch(a_2)\}c_{i,j}\\
&-(d-j-1)sh(a_1)ch(a_1)c_{i,j+2}-(2j-i-2)ch(a_1)sh(a_2)c_{i+1,j-1}\\
&+(d-2j+i)sh(a_1)ch(a_2)c_{i+1,j+1}+(j-1)sh(a_2)ch(a_2)c_{i+2,j-2}\\
&+\{-(l_1+l_2-i-2+j)th(a_1)D/4+(d-2i+j-3)sh(a_1)ch(a_1)\}c_{i+2,j}\\
&-(d-i-2)sh(a_1)ch(a_2)c_{i+3,j-1}=0
\end{aligned}$$

織田 孝幸 (東大・数理)=TAKAYUKI ODA (DEP'T OF MATH.-SCI., UNIV. OF TOKYO)

$(\mathrm{F8\text{-}2})_{i,j}$:

$$
\begin{aligned}
& i \cdot sh(a_1)ch(a_1)c_{i-1,j+1} \\
& + (-2i+j-1)sh(a_1)ch(a_2)c_{i,j} - (d-j-1)ch(a_1)sh(a_2)c_{i,j+2} \\
& + \{(l_1+l_2-i+j-2)th(a_1)D/4 + (-2j+i+2)sh(a_1)ch(a_1)\}c_{i+1,j-1} \\
& + \{(l_1+l_2+i-j)th(a_2)D/4 + (d-2j+i)sh(a_2)ch(a_2)\}c_{i+1,j+1} \\
& + (j-1)sh(a_1)ch(a_2)c_{i+2,j-2} + (d-2i+j-3)ch(a_1)sh(a_2)c_{i+2,j} \\
& - (d-i-2)sh(a_2)ch(a_2)c_{i+3,j-1} = 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

これらより、更なる「6項関係式」を得る。

命題 (3.6).

$(\mathrm{F6\text{-}3})_{i,j}$:

$$
\begin{aligned}
& -(l_1+l_2+i-j)th(a_2)sh(a_1)c_{i-1,j-1} - (d-j)ch(a_1)c_{i-1,j+1} \\
& + \{(d-2j+i+1)ch(a_2)^2 - (l_1+l_2+i-j)sh(a_2)^2\}ch(a_2)^{-1}c_{i,j} \\
& + \{(d-2i+j-2)ch(a_1)^2 - (l_1+l_2-i-2+j)sh(a_1)^2\}ch(a_1)^{-1}c_{i+1,j-1} \\
& - (l_1+l_2-i+j-2)th(a_1)sh(a_2)c_{i,j-2} - (d-i-1)ch(a_2)c_{i+2,j-2} = 0
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{F6\text{-}4})_{i,j}$:

$$
\begin{aligned}
& -i \cdot ch(a_1)c_{i-1,j+1} - (l_1+l_2+i-j)th(a_2)sh(a_1)c_{i+1,j+1} \\
& + \frac{1}{ch(a_2)}\{(2i-j+1)ch(a_2)^2 - (l_1+l_2+i-j)sh(a_2)^2\}c_{i,j} \\
& + \frac{1}{ch(a_1)}\{(2j-i-2)ch(a_1)^2 - (l_1+l_2-i+j-2)sh(a_1)^2\}c_{i+1,j-1} \\
& - (l_1+l_2-i-2+j)th(a_1)sh(a_2)c_{i+2,j} - (j-1)ch(a_2)c_{i+2,j-2} = 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

まず最初の2つの「6項関係式」より次を得る。

補題 (3.7). 行列 $(c_{i,j}(a_1,a_2))_{0\le i,j\le d}$ は反対角に関して対称である。つまり

$$c_{i,j} = c_{d-j,d-i} \qquad (0 \le i,j \le d)$$

が成立する。更に極大コンパクト群 K の *Weyl* 群 W_K による対称性を合わせると、

$$c_{i,j}(a_2,a_1) = (-1)^d c_{j,i}(a_1,a_2)$$

が成立する。

また5項関係, 6項関係, 8項関係を繰り返し使って、次を得る。

命題 (3.8). 2変数有理関数体 $\mathbb{Q}(a_1,a_2)$ 上の加群として,$c_{i,j}$ たちの間に独立なものはせいぜい4個である。

さらにこの独立であるかも知れない4個の係数の1次微分は全てこれらの4つの関数で表され, アファイン接続を定め, これの曲率を計算すると0になり, 可積分系となる。つまり次を得る。

定理 (3.9). 命題 *(3.1)* の微分-差分方程式系は階数 4 の *holonomic* 系と同値である。この *holonomic* 系の明示的な式は公式 *(3.12)* で与える。

全体を生成する 4 個の関数として、例えば d が偶数のとき、$\{c_{0,0}, c_{0,2}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ を、d が奇数のとき $\{c_{0,3}, c_{1,2}, c_{0,1}, c_{1,0}\}$ がとれる。

これらの holonomic 系を明示的に書き下すには関数 $c_{i,j}$ を次のように定まる $h_{i,j}$ で取り替えた方が見やすくなる。

定義 (3.10).

$$c_{i,j}(a_1, a_2) = \{(sh(a_1)sh(a_2)\}^{(d-i-j)/2} ch(a_1)^{(-L+i-j)/2} ch(a_2)^{(-L-i+j)/2} h_{i,j}(a_1, a_2).$$

さらに Harish-Chandra にならって, 変数を a_1, a_2から

$$x_i = -sh^2(a_i) \qquad (i = 1, 2)$$

に置き換える。

ここで $\{h_{i,j}\}$ で $i + j \leq d$ をみたすものについて、次が成立する。

補題 (3.11). 単位元 $(a_1, a_2) = (1, 1)$ の近傍で $h_{i,j}$は $i + j \leq d$ のとき解析的である。つまり単位元で実解析関数の芽の局所環 $\mathcal{O}$の中で整な解 $\{c_{i,j}\}$ があれば、$i + j \leq d$ である限り、$\{sh(a_1)sh(a_2)\}^{(d-i-j)/2}$ で割りきれる。

この補題は $h_{i,j}$ $(i + j \leq)$ の、単位元のまわりでの級数展開を調べるときに必要になる。また $i + j \geq d + 1$ のとき、$h_{i,j}$は定義により「本質的でない」零をもつことに注意する（i.e. 少なくとも、$\{sh(a_1)sh(a_)\}^{i+j-d}$で割り切れる)。

公式 (3.12). *(i)* d が偶数のとき、$\{h_{0,0}, h_{1,1}, h_{0,2}, h_{2,0}\}$ のホロノミック系は次の通り:

$h_{0,0}$:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d}{2x_1} + \frac{1}{2(x_1 - x_2)})h_{0,0} + \frac{d}{x_1(x_1 - x_2)}h_{1,1} + \frac{d-1}{2x_1(x_1 - x_2)}h_{2,0} = 0; \square$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{d}{2x_2} - \frac{1}{2(x_1 - x_2)})h_{0,0} - \frac{d}{2x_2(x_1 - x_2)}h_{1,1} - \frac{d-1}{2x_2(x_1 - x_2)}h_{0,2} = 0; \square$$

$h_{1,1}$:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d}{2(x_1 - x_2)})h_{1,1} + \frac{x_2}{2(x_1 - x_2)}h_{0,0} + \frac{d-1}{2x_2(x_1 - x_2)}h_{2,0} = 0; \square$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{d}{2(x_1 - x_2)})h_{1,1} - \frac{x_1}{2(x_1 - x_2)}h_{0,0} - \frac{d-1}{2(x_1 - x_2)}h_{0,2} = 0; \square$$

$h_{0,2}$:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d-1}{2(x_1 - x_2)}h_{0,2} + \frac{x_2}{2(x_1 - x_2)}h_{2,0} + \frac{d}{2(x_1 - x_2)}h_{1,1} = 0; \square$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{L-2}{2(x_2 - 1)} - \frac{d-1}{x_1 - x_2})h_{0,2} + \frac{d(x_2 - 1)}{(x_2 - 1)(x_1 - x_2)}h_{2,0} - \frac{d(x_1 - 1)}{(x_2 - 1)(x_1 - x_2)}h_{1,1}$$

$$h_{2,0}:\quad \begin{aligned}&(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{L-1}{2(x_1-1)}+\frac{d-1}{x_1-x_2})h_{2,0}-\frac{(d-1)(x_2-1)}{2(x_1-1)(x_1-x_2)}h_{0,2}\\&+\frac{d(x_2-1)}{(x_1-1)(x_1-x_2)}h_{1,1}+\frac{x_2(x_2-1)}{x_1-1}(\frac{L}{2(x_1-1)}+\frac{1}{2(x_1-x_2)})h_{0,0}=0;\Box\\&(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{d-1}{2(x_1-x_2)})h_{2,0}-\frac{x_1}{2(x_1-x_2)}h_{0,0}-\frac{d}{2(x_1-x_2)}h_{1,1}=0.\Box\end{aligned}$$

各 $h_{i,j}$の一次偏微分を表す式が全部で $2\times4=8$ 個ある。

(ii) d が奇数のとき、$\{h_{0,1},h_{1,0},h_{1,2},h_{0,3}\}$ のホロノミック系は次の 8 個の式である:

$h_{0,1}$:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{d/2}{x_1-x_2})h_{0,1}+\frac{d/2}{x_1-x_2}h_{1,0}=0;\Box$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{d-1}{2x_2}-\frac{1}{x_1-x_2})h_{0,1}-\frac{d-2}{2x_2(x_1-x_2)}h_{0,3}-\frac{d}{2x_2(x_1-x_2)}h_{1,2}=0;\Box$$

$h_{1,0}$:

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{(d-1)/2}{x_1}-\frac{(L-1)/2}{x_1-1}+\frac{d}{x_1-x_2})h_{1,0}+\frac{(d-1)x_2}{x_1(x_1-x_2)}h_{0,1}\\&-\frac{(d-2)(x_2-1)}{2x_1(x_1-1)(x_1-x_2)}h_{0,3}\{\frac{2d-L-1}{2x_1(x_1-1)}+\frac{d(x_2-1)}{2x_1(x_1-1)(x_1-x_2)}\}h_{1,2}=0;\Box\end{aligned}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{d/2}{x_1-x_2})h_{1,0}-\frac{d/2}{x_1-x_2}h_{0,1}=0;$$

$$h_{1,2}:\quad \begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}h_{1,2}+\frac{dx_2}{2(x_1-x_2)}h_{0,1}+\frac{(d-1)x_1+x_2}{2(x_1-x_2)}h_{1,0}=0;\Box\\&(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{d}{2(x_1-x_2)})h_{1,2}-\frac{x_1}{x_1-x_2}h_{0,1}-\frac{d-2}{2(x_1-x_2)}h_{0,3}=0;\Box\end{aligned}$$

$h_{0,3}$:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{d-2}{2(x_1-x_2)})h_{0,3}+\frac{x_2}{x_1-x_2}h_{0,1}+\frac{d}{2(x_1-x_2)}h_{1,2}=0;\Box$$

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{L-3}{2(x_2-1)}-\frac{d-2}{x_1-x_2})h_{0,3}-\frac{d(x_1-1)}{(x_2-1)(x_1-x_2)}h_{1,2}\\&\frac{dx_1(x_1-1)}{2(x_2-1)(x_1-x_2)}h_{1,0}-\frac{x_1(x_1-1)}{x_2-1}\{\frac{d-1}{2x_1}-\frac{L+1}{2(x_1-1)}-\frac{d-4}{2(x_1-x_2)}\}h_{0,1}=0;\Box\end{aligned}$$

これを" 解けば" 、仕事は半ば終わる。他の $h_{i,j}$まで全て計算するのが最終目標である。

以下、時間不足でいまだ最終計算まで出てないが次は成立する。

定理 (3.13). このホロノミック系は飯田正敏氏のものと同じく、*Deviard-Gaveau* が扱った *Appell* と *Kampé de Férier* の高次の超幾何級数で書き表せる。

もう少し具体的にいうと、少なくとも次は確認した。

命題 (3.14). *(i)* まず d が偶数の時は $h_{0,0}$ は次をみたす:

$$
\mathrm{HGF}^{(even)}: \quad
\begin{aligned}
&\{\sum_{i=1}^{2} x_i(x_i-1)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + ((2+\frac{d-L}{2})x_i - \frac{d-1}{2})\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&+ (d+1)x_1(x_1-1)\frac{\partial}{\partial x_1} - (d+1)x_2(x_2-1)\frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_{0,0}\}h_{0,0} = 0; \square \\
&\{\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{(d+1)/2}{x_1-x_2}(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2})\}h_{0,0} = 0. \square
\end{aligned}
$$

ここで$\lambda_{0,0}$は定数で、

$$
\lambda_{0,0} = -(\frac{2d-L+2}{2})(\frac{d+2}{2})
$$

で与えられる。

(ii) また d が奇数のときは $h_{0,1}$ は次をみたす:

$$
\mathrm{HGF}^{(odd)}: \quad
\begin{aligned}
&\{\sum_{i=1}^{2} x_i(x_i-1)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (\frac{d-L}{2}x_1 - \frac{d-1}{2})\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&+ (\frac{d+4-L}{2}x_2 - \frac{d+1}{2})\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&+ (d+2)\frac{x_1(x_1-1)}{x_1-x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - d\frac{x_2(x_2-1)}{x_1-x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_{0,1}\}h_{0,1} = 0 \\
&\{\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{(d+2)}{2(x_1-x_2)}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{d}{2(x_1-x_2)}\frac{\partial}{\partial x_2}\}h_{0,1} = 0. \square
\end{aligned}
$$

注意: ここで$\lambda_{0,1}$ は定数であるがいまだに計算をやるたびに値が違うのでここでは書かない (正しい値は予想できるが、数式処理を用いての確認の計算をする時間がない)。

上記の微分方程式系の解である $h_{0,0}$ と $h_{0,1}$ は飯田氏の論説にあるのと同種の級数展開及び積分表示をもつ。

注意。d が偶数ならば、ここで言及している級数展開のパラメター$-\mu_{\pm}$(cf. 飯田氏の論説) は正の整数である。d が奇数のときは、上の $h_{0,1}$ そのものを級数展開する方法ではでは ($\lambda_{0,1}$が未確定なので) この点は直接には分からないが、別の同種の関数を用いると、これも同様の微分方程式をみたし、これを用いると、やはり$-\mu_{\pm}$は正整数になり、$\lambda_{0,1}$の値も分かる。こうして得られる$\lambda_{0,1}$の値は

$$
\lambda = -(\frac{2d-L+1}{2})(\frac{d+1}{2})
$$

である。これが一つ前の「注意」でいった予想できる「正しい値」である。

これより、全ての行列成分の積分表示を書き表すのは原理的に可能であるが、"美しい式に"書けるかどうかはまだ充分調べていない。前途は有望であるが、まだ計算のジャングルを抜けでていない。これは準備中のプレプリントで書き上げたいと思っている。

§4. 今後の問題

ここでやったような計算は、同様に他の似たような階数２の群でも可能なはずである。もっと高階のシンプレクティク群でも、正則離散系列表現に次いで「小さな」離散系列表現では同様の超幾何級数で行列係数が書けであろうことも信じて良いと思われる。

これが完成すると、大きな離散系列の「再生核」を明示的に積分表示出来ることになり、Selberg 跡公式を用いて対応するタイプの保型形式の次元公式の計算に使えるかも知れない。

保型形式の問題を離れていえば、ここで考えた超幾何関数の合流型の版は先に書いた、(最も合流しているときに相当する) Whittaker 模型の論文や (東北数学雑誌１９９４年)、(部分的に合流している場合に相当する) Siegel 放物群に関する generalized Whittaker 関数を論じている宮崎琢也氏の論説で現れている。Appell の F_2 よりもう少し一般の超幾何級数である上の関数について、この合流のプロセスを調べることは、それ自身興味深い問題に思える。

文献表について

Deviard and Gaveau その他より詳しくは、飯田正敏氏の論説の Reference をご覧下さい。ここでは次の最低必要な物のみ引用しました。

References

A. Debiard and B. Gaveau: *Représentations intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un systéme de racines BC* J. Funct. Anal. **96** (1991), 256-296

M. Iida: *Matrix coefficients of the principal series representations of* $Sp(2,\mathbb{R})$ *as hypergeometric functions of* C_2*-type.* この講究録

M. Iida: *Matrix coefficients of the principal series representations of* $Sp(2,\mathbb{R})$ *as hypergeometric functions of* C_2*-type.* Preprint

T. Miyazaki and T. Oda: *Principal series Whittaker functions on* $Sp(2;\mathbb{R})$ *II* Preprint RIMS-992, 1994

T. Oda: *An explicit integral representation of Whittaker functions on* $Sp(2;\mathbb{R})$ *for the large discrete series representations* Tôhoku Math. J. **46** (1994), 261-279

H. Yamashita: *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, ii.* J. Math. Kyoto Univ. **31-2** (1991),543-571