数理解析研究所講究録
911 巻 1995 年 99-103

On a Singular Parabolic Equation [1]

北大理　佐藤 剛 (Koh Sato)

§1. 序

次の偏微分方程式の解と、その性質を考える。

$$u_t = |u_x|^{-\alpha} u_{xx}, \qquad (t,x) \in (0,T) \times (0,1) \tag{1.1}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t \in [0,T] \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ u_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < 1 \tag{1.3}$$

ただし $\alpha \geq 0$ で、u_0は滑らかであるとする。(1.1) を見るとわかるように、これは拡散係数が $|u_x|^{-\alpha}$ の熱方程式とも見ることができる。つまり、u の傾きが 0 に近い所では非常に大きな拡散がおこることになる。この $|u_x|^{-\alpha}u_{xx}$ の項 (一般には $p = 2 - \alpha$ として $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$) は p-Laplacian と呼ばれるもので、この項を持つ放物型の偏微分方程式は 1960 年代の中ごろから研究が始まった。p-Laplacian 問題は $p > 2$ のときと、$1 < p < 2$ のときとでは性質が異なるが、今ではどちらの場合も弱解の一意性や連続性などが分かっている。([EDB])。この論文では主に $1 < p < 2$ の場合を対象にしているといえるが、この場合には解が有限時刻で消滅すること ($\exists T > 0$ s.t. $\forall t \geq T$, $u(t,x) \equiv 0$) が分かっている ([EDB], p188)。また、(1.1) の両辺を微分し、$v = u_x$ とおいて x 方向のスケールを適当に調節すれば、次のように表される。

$$v_t = (|v|^{p-2}v)_{xx}, \tag{1.4}$$

但し $p = 2 - \alpha$である。この式では $p > 2$ のとき、(1.4) は多孔性媒体での拡散のモデルに起源を持つ porous medium equation と呼ばれるものであり、$1 < p < 2$ のときは磁界中のプラズマの拡散問題のモデルのひとつであり、plasma equation と呼ばれている。この方程式に関しては、(1.1)-(1.3) において $0 < \alpha < 1$ にあたるとき、つまり $1 < p < 2$ のときには解の連続性、Dirichlet 境界条件の下で解が有限時間内に消滅すること、どのような初期データから出発しても消滅時刻の近くでは変数分離解に漸近することなどが Berryman, Holland らによって明らかにされている ([B], [BH])。
ここではまず §2 で (1.1)-(1.3) を満たす非負の変数分離解を求めた (得られた変数分離解は一意ではない)。前もって行なった (1.1)-(1.3) についての数値実験の結果は解が有限時間内に消滅すること、及び任意の初期データから出発しても消滅時刻の近くでは変数分離解に漸近することを示唆するものだったが、§2 で得られた変数分離解も有限時刻で消滅することがわかった。§3 では [IS] にならって (1.1) の粘性解を定義し、求めた変数分離解が粘性解であるかどうかについて考察する。

§2. 変数分離解

(1.1)-(1.2) の変数分離解の存在と、その性質について考える。
まず (1.1) の代わりに

$$u_t|u_x|^{\alpha} = u_{xx} \tag{2.1}$$

の C^2級の変数分離解で非負のものについて考える。すなわち

$$u(t,x) = U(x) \cdot T(t) \tag{2.2}$$

[1] これは大沼 正樹氏 (北大理) との共同研究で得られた結果に基づいて書かれています。

と表せる u で (2.1)-(1.2) を満たすものを求める。但し $U(x)$, $T(t)$ は非負で C^2級であるとする。
(2.2) を (2.1) に代入し変数を分離すると、次の方程式が得られる。

$$T(t)^{\alpha-1} \cdot T'(t) = U(x)^{-1} \cdot |U'(x)|^{-\alpha} \cdot U''(x) = -c \tag{2.3}$$

上式で c は定数であるが、Uが非負であることと、$U(0) = U(1) = 0$ であることより、$U(x)'' \leq 0$ であるから、$c > 0$ である。また正の定数βを用いて$\tilde{U}(x) := \beta U(x)$, $\tilde{T}(t) = \beta^{-1}T(t)$ とすると$\tilde{U}(x)$, $\tilde{T}(t)$ は次の式を満たす。

$$\begin{aligned} &\tilde{U}(x)\tilde{T}(t) = U(x)T(t) \\ &\tilde{T}^{\alpha-1}(t)\tilde{T}'(t) = \tilde{U}^{-1}(x)|\tilde{U}'(x)|^{-\alpha}\tilde{U}''(x) = -\beta^{-\alpha}c. \end{aligned}$$

よって、(2.3) において $c = 1/\alpha$とおいても一般性を失わない。以上のことより、次の方程式が得られる。

$$T(t)^{\alpha-1} \cdot T'(t) = -\tfrac{1}{\alpha} \tag{2.4}$$

$$U''(x) = -\tfrac{1}{\alpha}U(x)|U'(x)|^{\alpha} \tag{2.5}$$

となる。ここで (2.4) は容易に解くことができ、変数分離解は次のように表される。

$$u(t,x) = (t_* - t)^{1/\alpha} \cdot U(x) \tag{2.6}$$

と表せる。ただし、ここで $t_* > 0$ は解の消滅時刻である。また $U(x)$ は次の式を満たす。

$$U''(x) = -\frac{1}{\alpha}U(x)|U'(x)|^{\alpha}, \quad U(x) > 0, \quad 0 < x < 1 \tag{2.7}$$

$$U(0) = U(1) = 0. \tag{2.8}$$

(2.7), (2.8) の解は次のようにして求めることが出来る。

定理 2.1 $V(x) \geq 0$ が次の式を満たすとする。

$$V''(x) = -\frac{1}{\alpha}V(x)(V'(x))^{\alpha}, \quad V'(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1/2 \tag{2.9}$$

$$V(0) = 0 \tag{2.10}$$

$$V'(1/2) = 0. \tag{2.11}$$

このとき $U(x)$ を

$$U(x) := \begin{cases} V(x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ V(1-x), & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

と定義すると $U(x)$ は *(2.7), (2.8)* の対称解である。

証明 (2.7) の両辺に $(V'(x))^{1-\alpha}$ をかけて 0 から x まで積分し、整理すると次の式を得られる。

$$V'(x) = (V'(0)^{2-\alpha} - c_\alpha V(x)^2)^{\frac{1}{2-\alpha}} \tag{2.12}$$

ただし、$c_\alpha = \dfrac{2-\alpha}{2\alpha}$ である。 さらに (2.12) を解くと Vは次のように表される。

$$V(x) = V'(0)^{1-\frac{\alpha}{2}} c_\alpha^{-\frac{1}{2}} W^{-1}(V'(0)^{\frac{\alpha}{2}} c_\alpha^{\frac{1}{2}} x). \tag{2.13}$$

ただし、$W^{-1}(x)$ は次のような単調増加関数 Wの逆関数である。

$$W(y) := \int_0^y (1-s^2)^{-\frac{1}{2-\alpha}} ds,\ 0 \le y \le 1.$$

$\alpha < 1$ のとき、上の積分は $y=1$ のときにも収束し、その時の値を $W(1) = M_\alpha (< \infty)$ と表すことにする。(2.13) で表される Vは (2.12) の解ではあるが、(2.9), (2.10) をある区間でのみ満たし、しかもその区間は必ずしも $[0,1/2]$ ではない。Vが (2.11) を満たすには、Vが最大値を達成するときの x の値を x_*とすると $x_* \le 1/2$ でなければならない。(2.13) では x_*は次のように表される。

$$x_* = V'(0)^{-\alpha/2} c_\alpha^{-1/2} M_\alpha.$$

よって $V'(0)$ を十分大きくとれば $x_* \le 1/2$ を満たすことが出来る。そのような $V'(0)$（一意に決まらない）を用いれば、(2.9)- (2.11) の解を次のように表すことが出来る。

$$V(x) = \begin{cases} V'(0)^{1-\frac{\alpha}{2}} c_\alpha^{-1/2} W^{-1}(V'(0)^{\frac{\alpha}{2}} c_\alpha^{\frac{1}{2}} x), & 0 \le x \le x_* \\ V'(0)^{1-\alpha/2} c_\alpha^{-1/2}, & x_* < x \le 1/2. \end{cases}$$

さらに$\dfrac{d}{dx}W^{-1}(M) = 0$, より $V'(x_*) = V''(x_*) = 0$ であるから、$U(x) \in C^2(0,1)$ である。
明らかに $U(x)$ は (2.7) を $(0,1/2)$ で満たし、かつ (2.8) をも満たす。また、次の式

$$\frac{d}{dx}V(1-x) = -V'(1-x),\ \frac{d^2}{dx^2}V(1-x) = V''(1-x)$$

が成り立つことより $U(x)$ は (2.7) を $(1/2,1)$ でも満たすことがわかる。

注意： 次の節で述べる粘性解の概念を用いると、(2.1) の変数分離解 $u(t,x) = U(x)\cdot T(t)$ の profile $U(x)$ は、$V(x)$ が最大値を達成する点が $x = 1/2$ だけであるときのみ、(1.1)-(1.3) の粘性解になることがわかる。

§3. 粘性解

ここでは $0 < \alpha < 1$ のときの (1.1) の粘性解 (viscosity solution) について、その定義と粘性解に対して成り立つ比較定理について述べる。粘性解とは最大値原理に基づいて定義された非線形偏微分方程式に対する弱解の一種である。ここでは (1.1) の解を、粘性解という弱解の一種を用いて定義する。粘性解の定義については [IS] の粘性解の定義を参考にした。
まず、(1.1) をより一般に空間 n 次元の方程式に拡張すると次のように書ける。

$$u_t - div(|\nabla u|^{-\alpha}\nabla u) = 0 \qquad (t,x) \in Q_T := (0,T)\times\Omega \tag{3.1}$$

但し、ここで$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は有界領域、$T > 0$とする。さらに、一般に (3.1) の様な式を次のように表すとする。

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \qquad (t,x) \in Q_T := (0,T)\times\Omega \tag{3.2}$$

ここで Fは $\mathbf{S}^n$を n 次の実対称行列全体の集合としたとき、$F : \mathbf{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbf{S}^n \to \mathbf{R}$ で表される連続な関数である。このとき Fが退化楕円型であることを次のように定義する。

定義 3.1 Fが退化楕円型 *(degenerate elliptic)* であるとは $\forall p \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\}$, $X, Y \in \mathbf{S}^n$ に対して

$$X \le Y \Rightarrow F(p,X) \ge F(p,Y)$$

が成り立つときをいう。

Fが退化楕円型であるとき (3.2) の形の方程式を退化放物型方程式という。
注意： (3.1) は (3.2) における Fを

$$F(p,X) = -|p|^{-\alpha}\mathrm{trace}\{(I - \alpha\frac{p\otimes p}{|p|^2})X\} \qquad p \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\},\ X \in \mathbf{S}^n \tag{3.3}$$

としたときの方程式である。このとき Fは退化楕円型である。

次に (3.2) の粘性解を定義する。そのために、まず Fによる C^2関数の集合 $\mathcal{F}(F)$ を定義する。

定義 3.2 $f \in C^2([0,\infty))$ が $\mathcal{F}(F)$ の元であるとは、

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \ and \ f''(r) > 0,\ \forall r > 0 \tag{3.4}$$

で、 $x \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ に対して、

$$\lim_{|x|\to 0} F(\nabla f(|x|), \nabla^2 f(|x|)) = 0 \tag{3.5}$$

を満たすときのことをいう。
例： (3.1) における（(3.3) で表される）Fについては、例えば $f(r) = r^{1+\sigma}$ (ただし$\sigma > \dfrac{1}{1-\alpha}$) とすると $f \in \mathcal{F}(F)$ である。

次に粘性解の定義に用いられる admissible なテスト関数の集合 $A(F)$ を定義する（$A(F)$ は Fに依る）。

定義 3.3 $Q_T := [0,T)\times\Omega$ とする。φ が *admissible*($\varphi \in A(F)$)であるとは、$\varphi \in C^2(Q_T)$ で、$\nabla\varphi(\hat{z}) = 0$ を満たす全ての$\hat{z} = (\hat{x},\hat{t}) \in Q_T$ に対して、ある $\delta > 0$ と、 $f \in \mathcal{F}(F)$, $\omega \in C([0,\infty))$ で $\lim_{r\downarrow 0}\omega(r)/r = 0$ を満たし、かつ次の条件を満たすものが存在するときのことをいう。

$$|\varphi(x,t) - \varphi(\hat{z}) - \varphi_t(\hat{z})(t-\hat{t})| \le f(|x-\hat{x}|) + \omega(|t-\hat{t}|),\ \forall(x,t) \in B(\hat{z},\delta) \tag{3.6}$$

これらを用いて (3.2) の粘性解を定義する。

定義 3.4 $Q_T := (0,T)\times\Omega$ とし、$F\ :\ \mathbf{R}^n\backslash\{0\}\times\mathbf{S}^n \to \mathbf{R}$ が連続、$u\ :\ Q_T \to \mathbf{R}$ が上半連続で $u < \infty$ とする。このとき、u が *(3.2)* の粘性劣解 *(viscosity subsolution)* であるとは $A(F) \ne \phi$で、かつ *admissible* なテスト関数$\varphi \in A(F)$ と Q_T上の各点 $(\hat{t},\hat{x})$ に対して

$$\max_{(t,x)\in Q_T}(u-\varphi)(t,x) = (u-\varphi)(\hat{t},\hat{x}) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_t(\hat{t},\hat{x}) + F(\nabla\varphi(\hat{t},\hat{x}), \nabla^2\varphi(\hat{t},\hat{x})) \le 0 & (\nabla^2\varphi(\hat{t},\hat{x}) = 0) \\ \varphi_t(\hat{t},\hat{x}) \le 0 & (\nabla^2\varphi(\hat{t},\hat{x}) \ne 0) \end{cases}$$

が成り立つときをいう。同様に、下半連続関数 $v(v > -\infty)$ が *(3.2)* の粘性優解 *(viscosity supersolution)* であるとは

$$\min_{(t,x)\in Q_T}(v-\varphi)(t,x) = (u-\varphi)(\hat{t},\hat{x}) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_t(\hat{t},\hat{x}) + F(\nabla\varphi(\hat{t},\hat{x}), \nabla^2\varphi(\hat{t},\hat{x})) \ge 0 & (\nabla^2\varphi(\hat{t},\hat{x}) = 0) \\ \varphi_t(\hat{t},\hat{x}) \ge 0 & (\nabla^2\varphi(\hat{t},\hat{x}) \ne 0) \end{cases}$$

が成り立つときをいう。さらに u が粘性劣解かつ粘性優解であるとき、u を *(3.2)* の粘性解であるという。

上で定義した粘性解に対して、次のような比較定理を証明することが出来る。この定理を用いれば (3.2) の解の一意性を示すことが出来る。

定理 3.5 u, vをそれぞれ *(3.2)* の定義 *3.4*の意味での粘性劣解、粘性優解であるとし、放物型境界$\partial_p Q$ を

$$\partial_p Q := (\{0\}\times\Omega)\cup([0,T]\times\partial\Omega)$$

とするとき、

$$u \le v \ on \ \partial_p Q \Rightarrow u \le v \ in \ Q$$

が成り立つ。

注意： §2 で求めた変数分離解 $u(t,x)=U(x)\cdot T(t)$ が、上で定義した粘性解であるかどうか確かめてみる。まず、u は粘性劣解であることは簡単に確かめられる。φ を admissible なテスト関数とし、$u-\varphi$ が最大値を実現する点を $\hat{z}=(\hat{t},\hat{x})$ としたとき、$u\in C^2(Q_T)$ であるから $u_x(\hat{z})=\varphi_x(\hat{z})$, $u_t(\hat{z})=\varphi_t(\hat{z})$, $u_{xx}(\hat{z})\le\varphi_{xx}(\hat{z})$ が成り立つ。よって、$\varphi_x(\hat{z})\neq 0$ のときは、Fの退化楕円性より

$$\varphi_t(\hat{z})+F(\varphi_x(\hat{z}),\varphi_{xx}(\hat{z}),)\le u_t(\hat{z})+F(u_x(\hat{z}),u_{xx}(\hat{z}),)=0$$

また、$\varphi_x(\hat{z})=0$ のときは、$T'(\hat{t})<0$ より$\varphi_t(\hat{z})=u_t(\hat{z})<0$ である。よって、vは $U(x)$ の形 (x_*の値) に依らず (1.1) の粘性劣解である。
次に u が粘性優解であるかどうかを考えてみる。$\hat{z}=(\hat{t},\hat{x})$ を $u-\varphi$ が最小値を実現する点とすると $\varphi_x(\hat{z})\neq 0$ のときは、劣解のときと同様にして u が粘性優解であることが分かる。問題は $\varphi_x(\hat{z})=0$ のとき、つまり $U(\hat{x})=U(x_*)=\max_{x\in(0,1)}U(x)$ のときである。もし、admissible なテスト関数で、$u-\varphi$ が最小値を実現する点でφ_xが（つまり u_xが）0 になるようなφ が存在すれば、そのとき u_xが粘性優解であるためには$\varphi_x(\hat{z})\ge 0$ を満たさなければならないが、実際は $\varphi_t(\hat{z})=u_t(\hat{z})\le 0$ であるからその条件を満たさない。ここでは詳しい計算はしないが、$x_*=1/2$ のとき ($U(x)$ が唯一点で最大値をとるとき) には admissible なテスト関数の profile は Uと比べて尖り方が鈍いため、$\hat{x}=x_*$となることはない。よって、$\varphi_t(\hat{z})\ge 0$ を満たす必要はなく、$u(t,x)=U(x)\cdot T(t)$ は粘性優解である。ところが、$x_*<1/2$ のとき、つまり $U(x)$ がある区間内の全て点でその最大値をとる場合にはその区間内の点で $u-\varphi$ がその最小値をとるような admissible なテスト関数φ は存在し、そのとき$\varphi_x(\hat{z})=0$ かつ$\varphi_t(\hat{z})=u_{\hat{z}}<0$ が成り立ち、粘性優解であるための条件$\varphi_t(\hat{z})\ge 0$ に反するため、$u(t,x)=U(x)\cdot T(t)$ は粘性優解ではない。

参考文献

[B] J.G.Berryman, *Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries,* Journal of Mathematical Physics, 18(1977),2108-2115.

[BH] J.G.Berryman and C.J.Holland, *Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations II,* Journal of Mathematical Physics, 19(1978),2476-2480.

[EDB] E.DiBenedeto, *Degenerate Parabolic Equations,* Springer-Verlag, 1993.

[IS] H. Ishii and P. Souganidis *Generalized motion of noncompact hypersurfaces with velocity having arbitary growth on the curvature tensor,* preprint.

[OS] M. Ohnuma and K. Sato, *Remarks on Degenerate Parabolic Equations,* in preparation.