

平行平板間の希薄気体の熱伝達問題

– 線形および非線形ボルツマン方程式に基づく解析 –

Heat flow problem of a rarefied gas between two parallel plates

– Analyses based on the full Boltzmann equation

and its linearized equation –

京大・工・航空宇宙 大和田 拓

Taku Ohwada

Division of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering,

Kyoto University

1. はじめに

異なる温度の二平行平板間の希薄気体の熱伝達問題は、希薄気体力学の最も基本的な境界値問題の一つであり、ボルツマン方程式の種々の近似解法やモデル方程式の試験問題として多くの研究者達によって研究されてきた（例えば、文献1-7）。しかし精密な解析となると、ボルツマン方程式のモデル方程式であるBGK方程式に基づくものか、あるいは本来のボルツマン方程式であっても壁面間の温度差が小さく線形化できる場合に限られている。⁶ 最近筆者は剛体球分子に対する非線形ボルツマン方程式の数値解法を開発し、これより垂直衝撃波の内部構造を正確に解析した。⁸ この数値解法は二平行平板間の熱伝達問題に適用でき、壁面間の温度差が大きく線形化できない場合の精密な解析もこれによって可能になった。一方、壁面における気体分子の反射法則を考慮した実験がテーガンとスプリンガーらによって行われており、³ この二平行平板問題は、ボルツマン方程式の境界条件を与える壁面における気体分子の反射法則のモデルの検証問題としても用いられている。テーガンらは種々の希薄度における気体のエネルギー伝達および密度分布を測定し、その結果を線形化ボルツマン方程式とマックスウエル型境界条件に基づくモーメン

ト法による結果¹と比較し、よい一致を報告している。しかし、モーメント法の結果の精度は明確でなく、さらに彼らの実験における壁面温度差は線形化近似の誤差が無視できるほど小さくないように思われる。この基本的な境界値問題の実験の理論的検証は十分行われておらず、正確な結果に基づく検証が待たれている。

本研究ではこの二平行平板問題を、剛体球分子非線形および線形ボルツマン方程式と Maxwell 型境界条件に基づき精密に解析し、その結果からテーガンらの実験結果を検証する。さらに Maxwell 型境界条件を適応係数が入射分子速度に依存するように一般化した境界条件^{9,10}を用いた解析も行い、境界条件の気体の振舞に及ぼす影響を調べる。

2. 問題と基礎方程式

問題: $X_1 = \pm D/2$ (X_i : 空間直交座標) にそれぞれ位置する平行な無限平面壁間の希薄気体を考える。壁面は静止しており、その温度は $X_1 = D/2$ の壁面では $T_0(1 + \Delta T)$ ($0 < \Delta T < 1$) に、 $X_1 = -D/2$ では $T_0(1 - \Delta T)$ にそれぞれ一様に保たれている。気体の定常的振舞を以下の仮定の下で調べる。

- i) 気体の振舞は剛体球分子ボルツマン方程式に従う。
- ii) 壁面に入射する分子の α 部分は拡散反射し、 $1 - \alpha$ 部分は鏡面反射する (Maxwell 型境界条件, α : 適応係数)。本研究ではテーガンらの実験結果に従って両壁面で適応係数は等しいとする。

さらに上記の仮定のほかに、以下の仮定も用いた解析も併せて行う。

- iii) 壁面間の温度差が小さく、基礎方程式と境界条件は線形化できる。

記号: 本論文で用いる主な記号を以下にまとめる: $x_i = D^{-1}X_i$; ρ_0 : 平板間の中心 $x_1 = 0$ における気体の密度; l_0 : 密度 ρ_0 , 温度 T_0 の静止平衡状態における気体分子の平均自由行程 (剛体球分子では, $l_0 = [\sqrt{2}\pi\sigma^2(\rho_0/m)]^{-1}$, σ : 分子直径, m : 分子質量); $\text{Kn}(= l_0/D)$: クヌーゼン数; R : 単位質量当りの気体定数; $(2RT_0)^{1/2}\zeta_i$: 気体分子速度; $\rho_0(2\pi RT_0)^{-3/2}f(x_1, \zeta_i)$:

気体分子の速度分布関数; $\rho_0\rho(x_1)$: 気体の密度; $T_0T(x_1)$: 気体の温度; $\sqrt{2}\rho_0(RT_0)^{3/2}Q_i$: 気体の熱流.

基礎方程式と境界条件: 無次元化された剛体球分子非線形ボルツマン方程式 (空間一次元, 定常) は, 次式で表される:

$$\zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}Kn} [G(f, f) - \nu(f)f]. \quad (1)$$

式 (1) の右辺のオペレータ G と ν は

$$G(f, g) = \int f(x_1, \zeta'_i) g(x_1, \xi'_i) B(|V_i \alpha_i|, V) d\Omega(\alpha_i) d\xi, \quad (2a)$$

$$\nu(f) = \int f(x_1, \xi_i) B(|V_i \alpha_i|, V) d\Omega(\alpha_i) d\xi, \quad (2b)$$

$$V_i = \xi_i - \zeta_i, \quad V = (V_i^2)^{1/2}, \quad \zeta'_i = \zeta_i + \alpha_i(V_j \alpha_j), \quad \xi'_i = \xi_i - \alpha_i(V_j \alpha_j). \quad (3)$$

によって定義される. ここに, α_i は単位ベクトル, $d\Omega(\alpha_i)$ はその立体角素, B の関数形は分子間力に依存し, 剛体球分子では

$$B(|V_i \alpha_i|, V) = (4\sqrt{2}\pi^2)^{-1} |V_i \alpha_i|, \quad (4)$$

で与えられる. 式 (2) の ξ_i に関する積分範囲 (また, 特に断らない限り, 以下の分子速度変数に関する積分範囲) は全分子速度空間であり, α_i に関する積分領域は全方向である.

無次元化されたマックスウエル型の境界条件は, 次式で表される:

$$f(x_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (1 - \alpha)f(x_1, -\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + \alpha m_{\pm} \exp\left(-\frac{\zeta_j^2}{1 \pm \Delta T}\right) \quad (x_1 = \pm 1/2, \zeta_1 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0), \quad (5a)$$

$$m_{\pm} = \pm \frac{2}{\pi(1 \pm \Delta T)^2} \int_{\xi_1 \geq 0} \xi_1 f(x_1, \xi_i) d\xi. \quad (5b)$$

上記の方程式と境界条件を密度 ρ_0 , 温度 T_0 の静止平衡状態まわりに線形化すると, $f = \exp(-\zeta_j^2)[1 + \phi(x_1, \zeta_i)]$ として, 次式を得る:

$$\zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi} \text{Kn}} L(\phi), \quad (6)$$

$$L(\phi) = \tilde{L}(\phi) - \tilde{\nu}(\zeta)\phi, \quad (7)$$

$$\tilde{L}(\phi) = \frac{1}{2^{3/2}\pi} \int \left[\frac{2}{|\zeta_i - \xi_i|} \exp\left(\frac{(\varepsilon_{ijk}\zeta_j\xi_k)^2}{(\zeta_i - \xi_i)^2}\right) - |\zeta_i - \xi_i| \right] \phi(x_i, \xi_i) \exp(-\xi_i^2) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (8a)$$

$$\tilde{\nu}(\zeta) = \frac{1}{2^{3/2}} \left[\exp(-\zeta^2) + \left(2\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \int_0^{\zeta} \exp(-\xi^2) d\xi \right], \quad (8b)$$

$$\phi(x_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (1 - \alpha)\phi(x_1, -\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

$$\pm \alpha \left[(\zeta_j^2 - 2)\Delta T + \frac{2}{\pi} \int_{\xi_1 \geq 0} \xi_1 \phi \exp(-\xi_j^2) d\xi \right], \quad (x_1 = \pm 1/2, \zeta_1 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0). \quad (9)$$

ここに, ε_{ijk} は Edington のデルタである.

気体の密度，温度，熱流は f のモーメントで与えられる：

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int f d\zeta, \\ T &= \frac{2}{3\pi^{3/2}\rho} \int \zeta_j^2 f d\zeta, \\ Q_1 &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \zeta_1 \zeta_j^2 f d\zeta.\end{aligned}\tag{10}$$

線形問題ではこれらの物理量は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\rho &= 1 + \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \phi \exp(-\zeta_i^2) d\zeta, \\ T &= 1 + \frac{2}{3\pi^{3/2}} \int (\zeta_j^2 - \frac{3}{2}) \phi \exp(-\zeta_i^2) d\zeta, \\ Q_1 &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \zeta_1 \zeta_j^2 \phi \exp(-\zeta_i^2) d\zeta_1 d\zeta.\end{aligned}\tag{11}$$

本問題では，気体の流速は零であり，熱流の x_2 および x_3 方向の成分はない．また熱流の x_1 方向の成分 Q_1 の値は非線形および線形の両方の場合において x_1 によらず一定である．これは式 (1) [(6)] の両辺に $\zeta_j^2 [\zeta_j^2 \exp(-\zeta_j^2)]$ を乗じて全分子速度空間上で積分すれば得られる（ボルツマン方程式の右辺は ζ_j^2 に直交する）． Q_1 の一定性は数値計算結果の精度の検証に用いられる．

3. 数値解析

非線形問題 (1),(5) および線形問題 (6),(9) には，それぞれ次の形の解が適合する：

$$f = f(x_1, \zeta_1, \zeta_r), \quad \phi = \phi(x_1, \zeta_1, \zeta_r), \quad \zeta_r = (\zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{1/2}.\tag{12}$$

線形問題では、問題の対称性より、 $x_1 = 0$ に境界条件

$$\phi(0, \zeta_1, \zeta_r) = -\phi(0, -\zeta_1, \zeta_r), \quad (\zeta_1 > 0), \quad (13)$$

を課し、半分の区間 $0 < x_1 < 1/2$ で解析する。区間 $-1/2 < x_1 < 0$ における解は、

$$\phi(x_1, \zeta_1, \zeta_r) = -\phi(-x_1, -\zeta_1, \zeta_r), \quad (\zeta_1 > 0), \quad (14)$$

によって与えられる。

本研究では、クヌーセン数を $x_1 = 0$ における気体の密度を用いて定義しているため、指定されたクヌーセン数の値に対する数値解は条件 $\rho(0) = 1$ を満たさなければならない。線形問題では式 (13) よりこの条件は自動的に満たされる。しかし非線形問題ではこの条件をあらかじめ課することはできないので、以下の手順によって指定されたクヌーセン数の値に対する解を求める：

- i) m_+ の値をある値に固定し (m_- の値は固定しない)、対応する境界値問題の数値解を求める。
- ii) m_+ を求めた解に対する $\rho(0)$ で割り、その結果を m_+ の新たな値とする。
- iii) 上記の i), ii) を $\rho(0)$ が 1 に (十分近い値に) なるまで繰り返す。

線形問題 (6), (9) の数値解析では文献 11 の差分法を、非線形問題 (1), (5) の数値解析では文献 8 の差分法を用いる。これらの差分法のボルツマン方程式の衝突積分 ($\tilde{L}(\phi)$, $G(f, f)$, そして $\nu(f)$) の計算では、速度分布関数は分子速度変数に関して基底関数に展開し、衝突積分は展開係数とその基底関数に対する衝突積分である数値核との積によって求められる。剛体球分子の場合、線形衝突積分は 3 重積分に帰着され、線形数値核は 3 重

積分で表される。非線形衝突積分は5重積分であるが、剛体球分子の場合、その数値核の積分の一部は解析的に遂行でき、非線形数値核は2重積分に帰着される。これらの積分は高精度で計算しておく。特に非線形数値核のデータは速度空間のメッシュ数を大きくすると線形数値核よりもはるかに膨大になるが、衝突積分の回転対称性、ガリレイ変換における不変性等を利用して大幅な節約を行ない、高精度が期待できるメッシュ数での計算を可能にしている。

4. 結果と考察

数値解析は、テーガンらの実験の密度測定の場合の温度差とクヌーセン数に対して行った。壁面間の温度差を表す ΔT は0.14（線形問題では解は ΔT に比例するので実際の計算にはこのパラメータの値は必要ない）、クヌーセン数は $Kn = 0.0658, 0.194, \text{および} 0.758$ である。適応係数の値は彼らが自由分子流領域におけるエネルギー伝達の測定から求めた値 $\alpha = 0.826$ を採用した。計算格子点数は、 x_1 に関しては、100～200点、分子速度に関しては非線形問題では文献8の（Case 2）の格子（ ζ_1 に対して101点、 ζ_r には14点）を、線形問題では文献12の（M3）の格子（ ζ_1 に対して不等間隔で117点、 ζ_r には40点）を用いた。2節で述べたように熱流 Q_1 の値は x_1 によらず一定であるが、以下に示すいずれの数値解に対しても、その一定性は0.7%以下の精度で満たされている [$Q_1 \sim O(\Delta T)$]。また非線形問題の結果は $\rho(0) = 1$ を0.1%以下の精度で満たす。

図1に線形問題におけるクヌーセン数の逆数に対する Q_1/Q_{FM} を示す。ここに Q_{FM} は Q_1 の $Kn \rightarrow \infty$ における極限值である [$Q_{FM} = -2\pi^{-1/2}\alpha(2-\alpha)^{-1}\Delta T$]。この図では剛体球分子（線形化）ボルツマン方程式に基づく結果（本数値計算、モーメント法¹、および変分法⁴）、BGKモデル方程式に基づく結果（再計算した）、そしてテーガンらの実験結果³（ $\Delta T \sim 0.013$ ）が示されている。BGK方程式に基づく結果は、 $Kn(BGK) = 1.922284Kn$ （剛体球分子）によってクヌーセン数が換算されたものである（以下に示すBGK

なる。剛体球分子ボルツマン方程式とBGK方程式の結果の間の差異は小さいことから、前者の可能性は小さいと考えられ、本研究では、後者の影響を調べるため、適応係数を入射分子速度に依存するように一般化したMaxwell型境界条件^{9,10}と非線形BGK方程式に基づく解析 ($\Delta T = 0.14$) を行った。

本問題における一般化Maxwell型境界条件は、 $\bar{\alpha}(\zeta_i)$ を ζ_1 に関して偶関数として、次式で表される：

$$f(x_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = [1 - \bar{\alpha}(\zeta_i)]f(x_1, -\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + \bar{\alpha}(\zeta_i)m_{\pm} \exp\left(-\frac{\zeta_j^2}{1 \pm \Delta T}\right) \quad (15a)$$

$$(x_1 = \pm 1/2, \zeta_1 > 0),$$

$$m_{\pm} = -\frac{\int_{\xi_1 \geq 0} \xi_1 \bar{\alpha}(\xi_i) f(x_1, \xi_i) d\xi}{\int_{\xi_1 \leq 0} \xi_1 \bar{\alpha}(\xi_i) \exp\left(-\frac{\xi_j^2}{1 \pm \Delta T}\right) d\xi} \quad (15b)$$

この境界条件は、Maxwell型境界条件の持つ基本的性質（壁面を通過する正味の質量が零、壁面温度に対する平衡分布を満たすこと等）を満足し、また式(15)は $\bar{\alpha}(\zeta_i) = \alpha$ とすると式(5)に一致する。以下の解析では $\bar{\alpha}(\zeta_i)$ の関数形として、文献10の

$$\bar{\alpha}(\zeta_i) = \frac{1}{1 + \beta|\zeta_1|}, \quad \beta > 0, \quad (16)$$

を用いた。この式によれば、壁面法線方向の速さ $|\zeta_1|$ が小さい入射分子ほど拡散反射しやすくそれが大きい分子ほど鏡面反射しやすい。数値解析では、パラメータ β の値を適応係数 α の値と同様に両壁面で等しいとし、その値を線形問題における自由分子流解 ($Kn = \infty$) が与える熱流がMaxwell型境界条件の場合の熱流、 Q_{FM} 、に等しくなるように定めた（詳細は省略。 $\alpha = 0.826$ には $\beta = 0.189$ が対応する）。図4にMaxwell型とその一般化境

方程式の結果も同様)。このクヌーセン数の換算公式は、これら二つの分子モデルに対する熱伝導係数と平均自由行程の関係から熱伝導係数を消去して得られる。BGK 方程式および変分法の結果は本数値計算結果と非常によく一致している。8モーメント法の結果は4モーメント法の結果よりも精度が悪く、実験結果とのずれも最も大きい。

線形問題における気体の密度と温度分布を図2 (a) と (b) に示す。この図ではモーメント法による結果と本数値計算結果、そしてテーガンらの実験結果 ($\Delta T = 0.14$) が示されている。モーメント法による結果はいずれも本数値計算結果と大きくずれ正確でない。実験結果は4モーメント法による結果とよく一致しているが、その一致の理論的根拠はない。

図3に非線形問題と線形問題の本数値計算結果をテーガンらの実験結果および非線形BGK方程式の結果と共に示す。小さいクヌーセン数 ($Kn = 0.0658$) における線形問題と非線形問題の密度分布の差は、予想される線形近似の誤差 [$O(\Delta T^2) \sim 0.02$] 程度であり、この差はクヌーセン数が増加するにつれ減少する[自由分子流の極限 ($Kn = \infty$) では両者の結果は一致する]。実験と理論の一致は、いずれのクヌーセン数においても非線形性を考慮すると悪くなる。彼らの実験では、いずれのクヌーセン数に対しても密度分布の対称性 [$\rho(x_1) + \rho(-x_1) = 2$] が実験誤差の範囲内で確認されている。しかし、 $Kn = 0.0658$ における非線形方程式が与える密度分布は明らかに対称性をもたず、さらに線形問題と非線形問題の結果の間の差は彼らが示した実験誤差の大きさ(縦線の長さ)よりも大きい。BGK方程式の結果は密度分布と温度分布のいずれにおいても剛体球分子の結果と良く一致している。

このようにテーガンらの実験と剛体球分子ボルツマン方程式とマックスウェル型境界条件に基づく結果との一致は定量的に満足のものではない。彼らの実験結果が正確とするならば、気体分子同士の衝突モデルと壁面の境界条件が不適切であるということに

界条件に基づく結果を示す。いずれの希薄度においても、境界条件の違いは密度および温度分布にほとんど影響をおよぼさず、実験と理論の不一致は境界条件の一般化では改善されなかった。

本研究ではテーガンらの結果に従って適応係数の値が両壁面で等しいとして解析を行ったが、適応係数はその依存性は小さいけれども壁面の温度によって変化する（例えば文献12）ので、密度分布測定時の両壁面の適応係数は異なっている可能性がある。適応係数の温度依存性を考慮した解析も本研究と同じ方法で精密に行なえるが、これに対する実験結果は筆者の知る限りでは報告されておらず、今後の実験の結果が待たれる。

参考文献

1. E. P. Gross and S. Ziering, *The Phys. Fluids*, **2**, 701 (1959).
2. P. Bassanini, C. Cercignani, and C. D. Pagani, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **10**, 447 (1967).
3. W. P. Tegan and G. S. Springer, *The Phys. Fluids*, **11**, 497 (1968).
4. J. W. Cipolla and C. Cercignani, *Rarefied Gas Dynamics*, edited by D. Dini (Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1971), Vol. 2, p.767.
5. J. R. Thomas, Jr., T. S. Chang, and C. E. Siewert, *The Phys. Fluids*, **16**, 2116 (1973).
6. T. Ohwada, Y. Sone, and K. Aoki, *Rarefied Gas Dynamics: Theoretical and Computational Technique*, Vol. 118 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*, edited by E. P. Muntz, D. P. Weaver, and D. H. Campbell (AIAA, 1989), p. 70.
7. D. C. Wadsworth, *Phys. Fluids A*, **5**, 1831 (1993).
8. T. Ohwada, *Phys. Fluids A*, **5**, 217 (1993).
9. M. Epstein, *AIAA J.*, **5**, 1797 (1967).
10. V. D. Borman, S. Y. Krylov, and A. V. Prosyantov, *Sov. JETP*, **67**, 2110 (1988).
11. Y. Sone, T. Ohwada, and K. Aoki, *Phys. Fluids A*, **1**, 363 (1989).
12. H. Y. Wachmann, *Rarefied Gas Dynamics: Experimental Techniques and Physical Systems*, Vol. 158 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*, edited by B. D. Shizgal and D. P. Weaver (AIAA, 1994), p. 461.

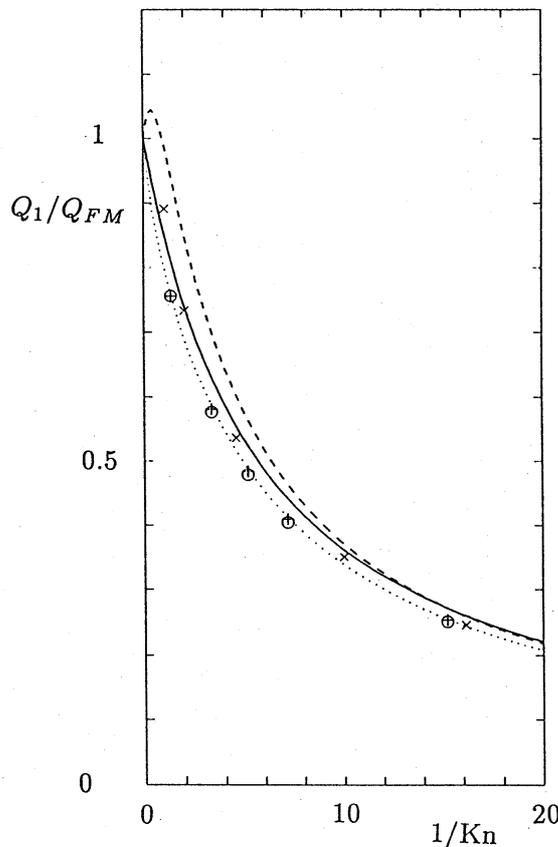
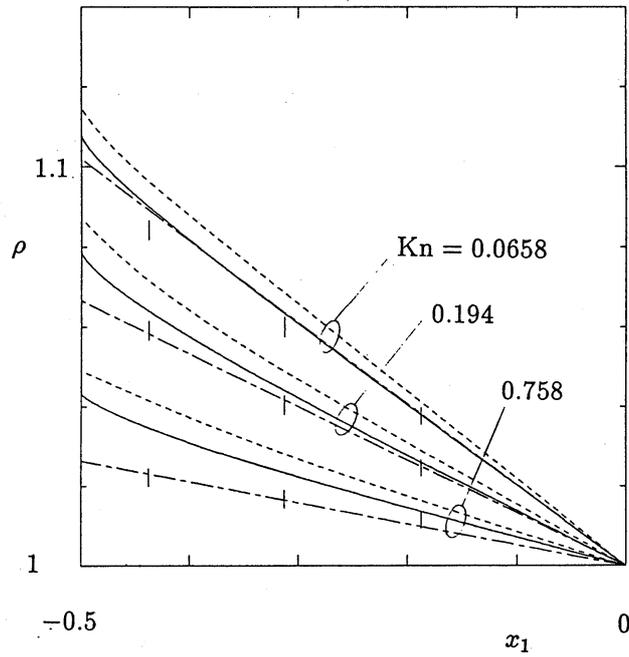
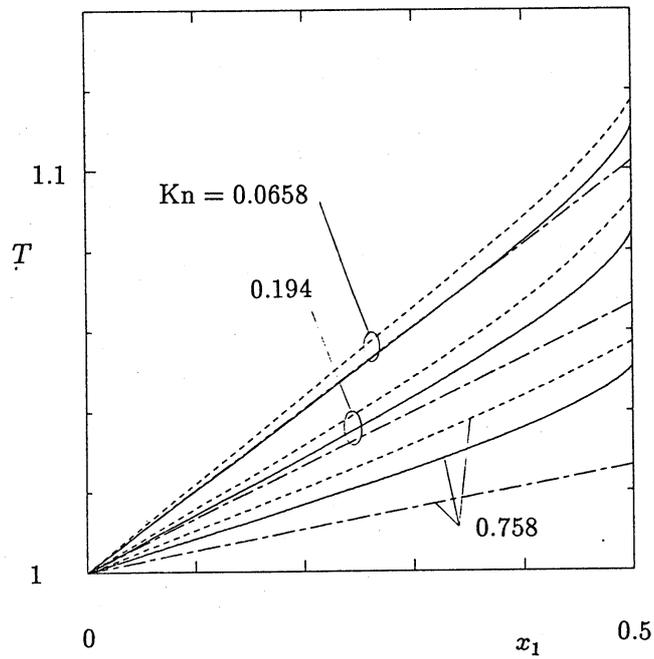


図1. Knudsen 数の逆数に対する熱流 (線形問題). +: 本数値計算, o: BGK, x: 実験, -----: 8 モーメント法, ———: 4 モーメント法,: 変分法.

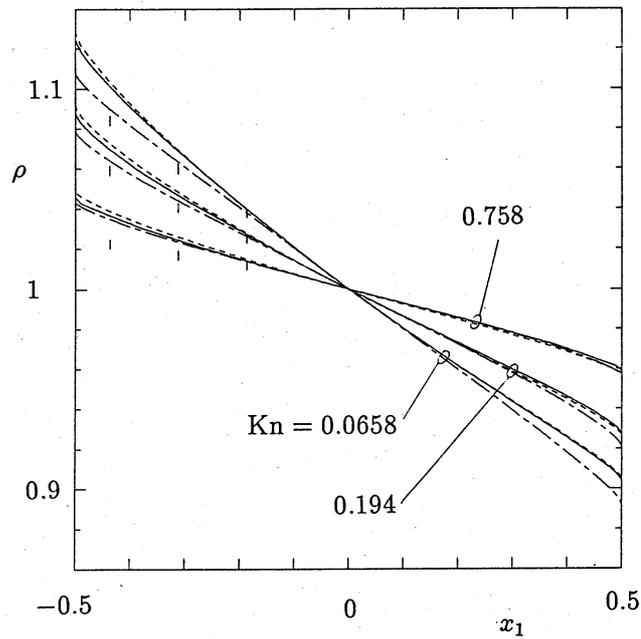


(a)

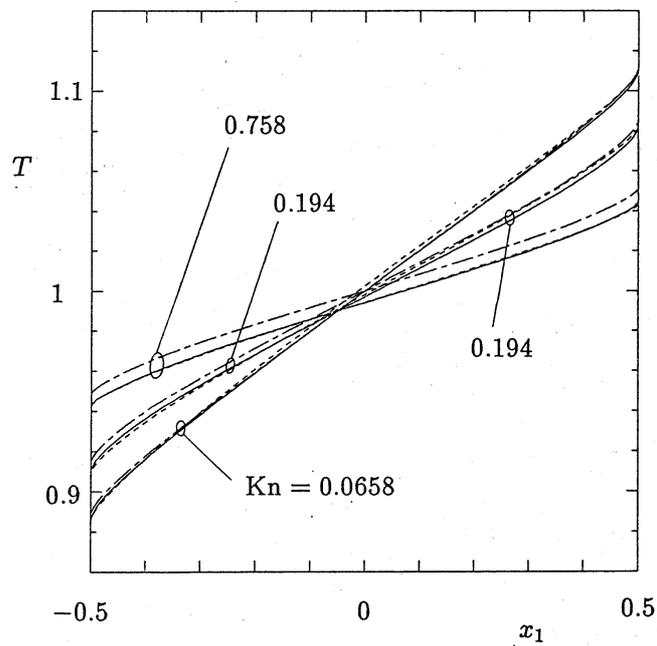


(b)

図2. 線形問題の結果の比較. (a) 密度分布, (b) 温度分布. —: 本数値計算 (線形問題), - - -: 8モーメント法, — — —: 4モーメント法, |: 実験.

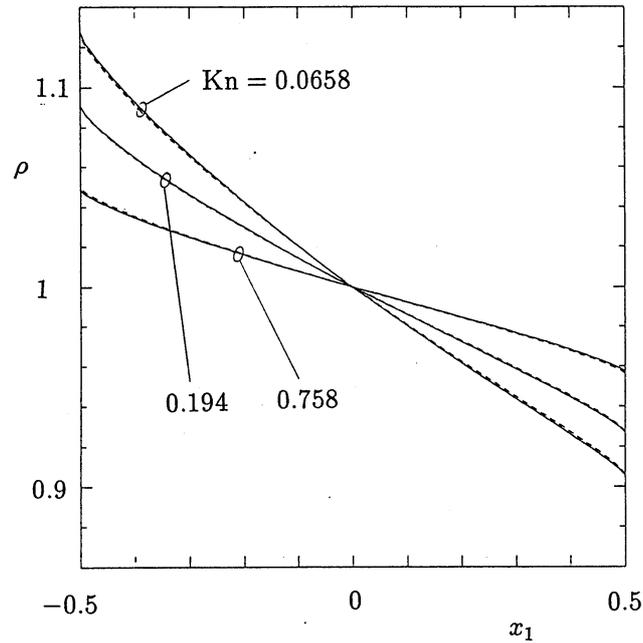


(a)

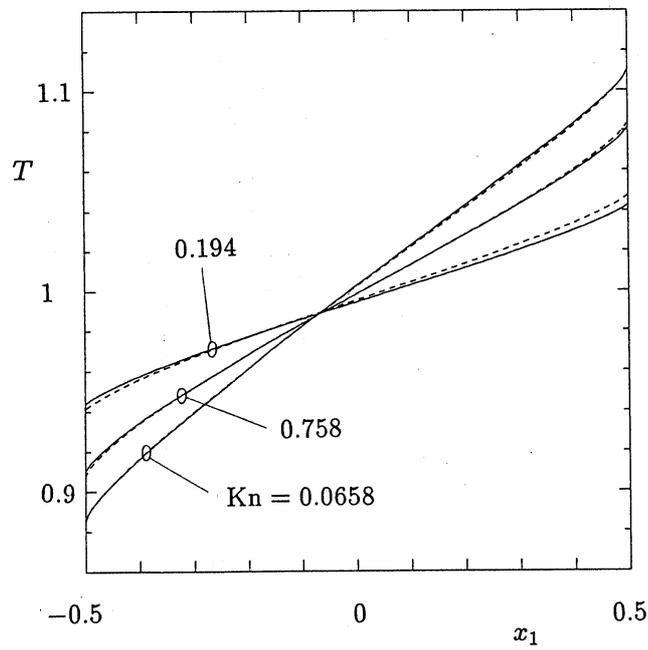


(b)

図3: 線形および非線形問題の結果の比較. (a) 密度分布, (b) 温度分布. —: 本数値計算 (非線形問題), - - -: 本数値計算 (線形問題), - - - -: 非線形BGK, |: 実験.



(a)



(b)

図4. Maxwell型と一般化Maxwell型境界条件に基づく結果の比較(非線形B-GK). (a) 密度分布, (b) 温度分布. —: Maxwell型, - - - - -: 一般化Maxwell型.