数理解析研究所講究録
915 巻 1995 年 130-135

非線形楕円型問題に対する有限要素解の最大値ノルムによる精度保証

中尾　充宏　　　山本　野人
九州大学大学院　数理学研究科
(M.T. Nakao, N. Yamamoto)

1. はじめに

R^2の有界凸領域Ω上の非線形（準線形）楕円型方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

の解の数値的検証は, 右辺が既知の L^2関数 gに対する Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

の有限要素近似解 $v_h \in S_h$

$$(\nabla v_h, \nabla\phi) = (g, \phi), \qquad {}^\forall\phi \in S_h$$

に対する構成的（数値的）a priori または a posteriori 誤差評価を基礎としている。ここに S_hは $H_0^1(\Omega)$ の適当な有限要素部分空間とする。

これまで H^1および L^2誤差評価に基づく検証が主体であったが, 実際には L^∞誤差（最大値ノルムの意味での誤差）を知りたい場合がある。これに対しては, 既に a priori 型の L^∞誤差評価を用いた解の包み込み法があるが [1], それは

$$\|v - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch\|g\|_{L^2} \tag{3}$$

の形の $O(h)$ 誤差評価を用いており、たとえ高次の有限要素を用いた場合にも検証精度上の改善を期待できないものであった。そこで今回 a posteriori 型の L^∞ 誤差評価を提案し、これに基づいた数値的検証を試みる。

2. 検証法の概要

まず非線形楕円型方程式 (1) の解の検証法をおおまかに述べておこう。

1. 有限要素法を用いて (1) の近似解 $\widehat{u}_h \in H_0^1(\Omega)$ を計算する。用いる有限要素空間を S_h (h はメッシュの大きさを表わすパラメータ)、$S_h^\perp$ をその直交補空間、P_h を $H_0^1(\Omega)$ から S_h への H_0^1-projection としておく。

2. 次を満たす $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ を考え、この $\bar{u}$ の周りに真の解 u を探すことにする。

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u} = f(\widehat{u}_h) & \text{in } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

このとき、$\bar{u} = \widehat{u}_h + v_0$ と書け、$\widehat{u}_h \in S_h$, $v_0 \in S_h^\perp$ となることに注意。

3. $u = \bar{u} + w$ とおいて、w についての問題を考える。

$$\begin{cases} -\Delta w &= f(\bar{u}+w) - f(\widehat{u}_h) & \text{in} \quad \Omega, \\ w &= 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

さらに $F(w) = (-\Delta)^{-1}(f(\bar{u}+w) - f(\widehat{u}_h))$ として、w についての不動点方程式の形に書く：

$$w \;=\; F(w).$$

これは次のようにも書ける：

$$\begin{cases} P_h w &= P_h F(w) \\ (I-P_h)w &= (I-P_h)F(w) \end{cases}$$

4. 上式のうちの $P_h w = P_h F(w)$ のみに S_h 上の擬 Newton 法を用いる：すなわち、

$$\begin{aligned} P_h N(w) &= P_h w - [P_h - P_h A'(\widehat{u}_h)]^{-1}(P_h w - P_h F(w)) \\ A'(\widehat{u}_h) &= (-\Delta)^{-1} f'(\widehat{u}_h) \end{aligned}$$

によって（ただし $'$ は Freche' 微分で、$[P_h - P_h A'(\widehat{u}_h)]^{-1}$ は S_h 上の逆作用素）、

$$T(w) \;:=\; P_h N(w) + (I-P_h)F(w)$$

を定義し、$T(w)$ に対する不動点問題を考える。もちろん $w = T(w)$ ならば $w = F(w)$ である。

5. $T(W) = \{T(w) | w \in W\} \subset W$ となる $H_0^1(\Omega)$ の有界凸閉集合 W が見つかれば、Schauder の不動点定理によって $^\exists w \in T(W)$ s.t. $w = T(w)$ となる。$W = W_h \oplus W_h^\perp$, $W_h \subset S_h$, $W_h^\perp \subset S_h^\perp$ とおけば、検証条件は

$$\begin{cases} P_h N(W) & \subset \; W_h \\ (I-P_h)F(W) & \subset \; W_h^\perp \end{cases}$$

と書くことが出来る。

なお、通常は S_h の近似性から、

$$\|(I-P_h)F(w)\|_{H_0^1(\Omega)} \;\le\; C_0 h \|f(\bar{u}+w) - f(\widehat{u}_h)\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つので、検証条件のチェックに利用する。

3. L^∞ 誤差評価の方法

上述の検証法によって w を含む集合 W が得られたとしよう。L^∞ 誤差は、

$$\|u - \widehat{u}_h\|_{L^\infty} \;\le\; \|v_0\|_{L^\infty} + \|P_h w\|_{L^\infty} + \|(I-P_h)w\|_{L^\infty}$$

によって評価する。左辺の第２項は $\sup_{w\in W}\|P_h w\|_{L^\infty}$ で抑え、第３項は (3) を用いて

$$\|(I-P_h)w\|_{L^\infty} \leq Ch \sup_{w\in W}\|f(\bar{u}+w)-f(\widehat{u}_h)\|_{L^2}$$

と評価する。上式の左辺は、高次要素を用いた場合、$\widehat{u}_h$ の近似性が高まることによって評価が改善されると期待できる。

本稿では、第１項の評価について新しい方法を提案する。v_0 の L^∞ 誤差評価を得るためには 各$\tau\in\mathcal{T}_h$ 上での次のような埋め込み: $H^2(\tau)\hookrightarrow L^\infty(\tau)$ の構成的評価を用いる。

$$\|v_0\|_{L^\infty(\tau)} \leq C_1 h^{-1}\|v_0\|_{L^2(\tau)} + C_2\|\nabla v_0\|_{L^2(\tau)} + C_3 h|v_0|_{H^2(\tau)}, \tag{6}$$

ここに C_1-C_3 は h に無関係な正定数で、具体的に決定することが出来る (Plum[3] による)。

上式中の $\|v_0\|_{L^2(\tau)}$および $\|\nabla v_0\|_{L^2(\tau)}$ はそれぞれ $\|v_0\|_{L^2(\Omega)}$および $\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}$ で抑える; すなわち、

$$\begin{aligned}\|v_0\|_{L^2(\tau)} &\leq \|v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 h\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}\\ \|\nabla v_0\|_{L^2(\tau)} &\leq \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)} = \|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

とし、$\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}$ の評価にすでに提案した a posteriori 技法を用いる ([2])。この技法によって高次要素を用いた場合の評価の大きな改善が期待できる。そこで残された問題は、高次要素を用いたときに (6) の $|v_0|_{H^2(\tau)}$の評価が改善されるような a posteriori 型の誤差評価法を得ることである。ここでは $|v_0|^2_{H^2(\tau)}$ を $\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}|v_0|^2_{H^2(\tau)}$ で抑えることにして、以下 $\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}|v_0|^2_{H^2(\tau)}$ の評価について述べよう。

いま $\mathcal{T}_h$ を Ω の三角形または四角形分割としよう。そして $\tau\in\mathcal{T}_h$ 内では S_h の元は $H^2(\tau)$ に属するものとする。さて, $p,q\in H^2(\tau)$ に対し,

$$< p \mid q >_\tau = \int_{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y_1^2}\frac{\partial q}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y_2\partial y_1}\frac{\partial q}{\partial y_1}\right)dy_1$$

とおく。ただし y_1, y_2は、$\partial\tau$の接線方向と外向き法線方向とをそれぞれ表わす。一般に、(2) の解 v とその有限要素近似 v_h について次が成り立つ。

$$|v-v_h|^2_{H^2(\tau)} = \|g+\Delta v_h\|^2_{L^2(\tau)} - < v-v_h \mid v-v_h >_\tau$$

ここで (4) を満たす $\bar{u}$ を v に取ると、前述のように $v_h=\widehat{u}_h$, $v-v_h=v_0$ となるから、

$$|v_0|^2_{H^2(\tau)} = \|f(\widehat{u}_h)+\Delta\widehat{u}_h\|^2_{L^2(\tau)} - < v_0 \mid v_0 >_\tau$$

が得られる。この式を手がかりにして $\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}|v_0|^2_{H^2(\tau)}$ の評価を行なおう。

$\|f(\widehat{u}_h)+\Delta\widehat{u}_h\|^2_{L^2(\tau)}$ は各 τ 上で直接計算できる。$\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} < v_0 \mid v_0 >_\tau$の評価は次のようにすればよい。$v_0$, $\widehat{u}_h$ の連続性を考慮して計算すると

$$\sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} < v_0 \mid v_0 >_\tau = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\widehat{u}_h}{\partial y_1^2}\frac{\partial\widehat{u}_h}{\partial y_2} + \frac{\partial^2\widehat{u}_h}{\partial y_2\partial y_1}\frac{\partial\widehat{u}_h}{\partial y_1}\right)dy_1 + \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} 2\int_{\partial\tau}\frac{\partial^2\widehat{u}_h}{\partial y_2\partial y_1}\frac{\partial v_0}{\partial y_1}dy_1$$

となるが、この第1項を J_1 , 第2項を J_2 とおく。J_1 は直接積分して評価可能な量である。第2項は次節で述べる Lemma によって、τ ごとに計算可能な量 A_τ, B_τ を用いて次のように評価される。

$$\begin{aligned} J_2 &\le \sum_\tau A_\tau \|\nabla v_0\|_{L^2(\tau)} + \sum_\tau B_\tau |v_0|_{H^2(\tau)} \\ &\le \sqrt{\sum_\tau A_\tau^2}\ \ \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\sum_\tau B_\tau^2}\sqrt{\sum_\tau |v_0|^2_{H^2(\tau)}} \end{aligned} \tag{7}$$

以上から $\sum_\tau |v_0|^2_{H^2(\tau)}$ に関する二次不等式が得られ、これを解いて求める評価

$$\sum_\tau |v_0|^2_{H^2(\tau)} \le \frac{1}{2}\sqrt{\sum_\tau B_\tau^2} + \sqrt{\sum_\tau B_\tau^2 + \sum_\tau \|f(\widehat{u}_h) + \Delta\widehat{u}_h\|^2_{L^2(\tau)} - J_1 + \sqrt{\sum_\tau A_\tau^2}\ \ \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}}$$

を得る。

4. <u>J_2 の評価</u>

ここでは $J_2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} 2\int_{\partial\tau} \frac{\partial^2 \widehat{u}_h}{\partial y_2 \partial y_1}\frac{\partial v_0}{\partial y_1} dy_1$ の評価 (7) について詳説する。簡単のため一辺の長さが h の正方形要素に限って述べることにするが、一般の四角形要素や三角形要素についても同様の議論が可能である。

さて Γ_h を $\mathcal{T}_h$ の辺のうち Ω の境界上にあるものを除いたものの集合とすると、J_2 は以下のように書ける。

$$J_2 = 2\sum_{\gamma\in\Gamma_h}\int_\gamma G_\gamma \frac{\partial v_0}{\partial y_1} dy_1$$

ただし、G_γ は $\frac{\partial^2 \widehat{u}_h}{\partial y_2\partial y_1}$ の γ 上でのギャップを表す。

ここで、辺上の積分を要素上の積分で表すための Lemma を述べよう。

Lemma 一辺の長さが h の矩形要素の各辺をそれぞれ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, 各 γ_i の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}_i$ とし、τ 上の関数 Ψ_i を γ_i 上で常に 1, γ_i の対辺で常に 0 となる一次関数とする。このとき任意の $\phi \in H^1(\tau)$ について、

$$\int_{\gamma_i} \phi dy_1 = \frac{1}{h}\int_\tau \phi d\tau + \int_\tau \Psi_i(\mathbf{n}_i\cdot\nabla\phi) d\tau$$

が成立する。

証明は、右辺の第二項に Green の定理を用いればよい。

いま、γ_i 上の関数 $G_{\gamma_i} = G_{\gamma_i}(y_1)$ を要素上の関数に拡張したものを $G_{\gamma_i}(y_1, y_2) = G_{\gamma_i}(y_1)$ によって定め、上述の Lemma 中のϕ として $\phi = G_{\gamma_i}(y_1,y_2)\frac{\partial v_0}{\partial y_1}$ を取れば、

$$\int_{\gamma_i} G_{\gamma_i}\frac{\partial v_0}{\partial y_1} dy_1 = \frac{1}{h}\int_\tau G_{\gamma_i}\frac{\partial v_0}{\partial y_1} d\tau + \int_\tau \Psi_i G_{\gamma_i}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y_1\partial y_2} d\tau$$

となることが分かる。これの各 i についての和を取って評価すると、

$$
\begin{aligned}
|\sum_i \int_{\gamma_i} G_{\gamma_i}\frac{\partial v_0}{\partial y_1}dy_1| &\le A_\tau\|\nabla v_0\|_{L^2(\tau)} + B_\tau|v_0|_{H^2(\tau)}, \qquad (8)\\
A_\tau &= \frac{1}{h}\sqrt{\int_\tau (G_{\gamma_1}-G_{\gamma_3})^2+(G_{\gamma_2}-G_{\gamma_4})^2 d\tau}\\
B_\tau &= \sqrt{\int_\tau \{(\Psi_1 G_{\gamma_1}+\Psi_3 G_{\gamma_3})-(\Psi_2 G_{\gamma_2}+\Psi_4 G_{\gamma_4})\}^2 d\tau}
\end{aligned}
$$

が得られる。ここで、(8) の τ についての和を取れば、Ω の内部の辺に関しては 2 度ずつ加算されるので、結局 (7) を得ることになる。

5. 数値例

例題として、Emden 型の方程式を取り上げる。すなわち、$\Omega=(0,1)\times(0,1)$ として、問題

$$
\begin{cases}
\Delta u = -u^2 & \text{in } \Omega,\\
u = 0 & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

を考える。有限要素空間 S_h は矩形メッシュ上の双二次要素からなるものにとる。この場合前節に現れた定数の値は、

$$
\begin{aligned}
C &= 4.5\\
C_0 &= \frac{1}{2\pi}\\
C_1 &= 1\\
C_2 &= 1.1548\sqrt{\frac{2}{3}}\\
C_3 &= 0.22361\sqrt{\frac{28}{45}}
\end{aligned}
$$

と取ることができる（[1], [2], [3]）。

まず 3. で述べた方法によって解の存在する集合を確定した後、誤差の L^∞ 評価を見積もった。その結果を $h=\frac{1}{14}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ の場合について以下の表に示す。

h	$\|v_0\|_{L^\infty}$	$\sup_{w\in W}\|P_h w\|_{L^\infty}$	$\sup_{w\in W}\|(I-P_h)w\|_{L^\infty}$	$\|u-\widehat{u}_h\|_{L^\infty}$	$\max\widehat{u}_h$
$\frac{1}{14}$	0.568996	0.676267	5.136791	6.382054	29.848293
$\frac{1}{20}$	0.275962	0.241143	1.269033	1.786138	29.552427
$\frac{1}{30}$	0.121014	0.090538	0.314894	0.526446	29.389727

このように高次要素を使うことで、h について高い order の L^∞ 誤差評価を得ることができた。

文献

[1] Nakao, M.T. & Yamamoto, N., Numerical verifications of solutions for elliptic equations with strong nonlinearity, Numerical Functional Analysis and Optimization 12 (1991),

535-543.
[2] Yamamoto, N. & Nakao, M.T., Numrical verifications of solutions to elliptic equations using residual iterations with higher order elements, to appear in Journal of Computational and Applied Mathematics.
[3] Plum, M., Explicit H_2-estimates and pointwise bounds for solutions of second-order elliptic boundary value problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications 165 (1992), 36-61.