

Wavelet による海岸線データの間引き

東大地震研究所 桧山澄子 (Sumiko Hiyama)
電通大 花田孝郎 (Takao Hanada)

Abstract

ここでは, Wavelet を用いた海岸線のデータの間引きを取り扱う. Wavelet 族にはいろいろの形のものがあるが, ここでは Daubechies の正規直交 Wavelet, 対称性を持った bi-orthogonal Wavelet について, 次数を変えたものをまず簡単な spiral 曲線に適用し評価した. その結果を最終的には, 地図データについて数値実験を試みた. この Daubechies はコンパクトサポートな完全正規直交性を持っているので, 離散変換が使える. その結果, 高速に処理できるので大量な地図データの間引きにはこの離散 Wavelet 変換が最適である. また, 実験結果から精度については, 次数が 1, 3, の場合よりさらに高次の 11, 19 次等の場合がよく, とくに bi-orthogonal Wavelet がよいことが分かった. 特に複雑な海岸線のデータを対象にすると, cusp (特異点) の部分では, その Wavelet 展開係数が大きくなるので, その部分を拾うという多重解像度解析の手法を用いることで, 非常に良い間引きができることを示す.

1 はじめに

一般にコンピュータ・グラフィックで曲線を取り扱うときには, データは点列の集合で与えられ, 実際の画面上に表示される時には, それらの点列を線分で結ぶことにより得られる. つまり P を曲線とした場合,

$P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$; p_0, p_1, \dots, p_n は点列
で与えられる.

画面の精度以上の細かいデータは, 表示する際に時間がかかる上に見にくいし, 保管する場合にも容量が大きくなり不利である. そこで「データの間引き」ということが重要になる. 一般にデータ点の間引きとして, 以下の2つの場合が考えられる.

1. オリジナルのデータ点の集合 P から直接間引く. 間引いた結果の部分点列の集合を線分で結ぶことにより曲線 Q を構成する.
2. 何らかの近似関数で補間する. この場合データ点列は P の部分集合とは限らない.

つまり, 2. は近似関数の係数であったり, 接点の位置などといった集合になる. また, 1. は 2. の特別の場合とも考えられる [1],[2]. しかもこの「間引き」では, 間引いた結果できる Q ができるだけ小数の点で構成されしかもできるだけ「精度の良い」間引き法を見つけることが重要になる. つまり, 「間引きの問題」を以下のように定義する.

定義 1 曲線の間引きとは, P : オリジナルの曲線, Q : 間引きによって得られる曲線としかつ,
 $\frac{|Q|}{|P|}$ が一定のとき,
 P から Q への変換 T で (つまり $T: P \rightarrow Q$) で誤差を最小にする T を見つける事である.
ここで, $|Q|$ は曲線 Q を表示するための情報量を表す.

ここで誤差とは次のように定義する.

定義 2 曲線間の誤差

p : 曲線 P 上の任意の点, q : 曲線 Q 上の任意の点

Ψ は曲線 P から Q へ至る距離関数としたとき、誤差 E は

$$E = \|P - Q\| = \int_P \min_{q \in Q} |p - q| dp = \int_P |p - \Psi(p)| dp$$

である。

さて、この変換 T として、Wavelet 変換、特に Daubechies の離散 Wavelet 変換 (DWT) を適用する。その理由は

- この Wavelet は、コンパクトサポートである。そのため、特異点や突点の部分でも局所的に精度良くこの Wavelet で近似できる。
- 特異点の部分では、Wavelet の展開係数が大きくなるのでその性質を利用して海岸線の複雑さを見つげられる。
- ジグザグした海岸線は、フラクタルであり、Wavelet も自己相関であり共通性がある。
- Daubechies の Wavelet は完全正規直交である。この性質により変換を離散化することができ、またデータ点列を 2 のべき乗にとることにより FFT のように処理時間を短縮できる。

以下の§2 でそれらの手法を述べる。

2 離散 Wavelet 変換による間引き

手法としては、多重解像度解析 (MRA) に Wavelet 変換を適用するという手法をとる。

2.1 MRA と Wavelet

MRA とは $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j; j \in \mathbf{Z}\}$ で次の 4 つの条件を満たすものである。

$$\begin{aligned} & \dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \\ & \text{closure}_{L^2} \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \\ & V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \\ & f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}, \\ & \exists \varphi(x) \in V_0 \text{ s.t. } \{\varphi(x - k); k \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned} \tag{1}$$

が V_0 の正規直交基底を構成する。ここで、 V_j の V_{j+1} にたいする直交補完空間を W_j とすると、

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \tag{2}$$

となり、この族 $\{W_j\}$ により

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j \tag{3}$$

になる。そこで正規直交 Wavelet 基底関数 ψ を W_0 の基底関数にとれば $\{\psi(x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ が W_0 の正規直交基底を構成する。[3],[5]

さらに、(1),(2) 式よりスケーリング関数 $\varphi(x)$ を V_0 の基底関数にとれば、 $\{2^{j/2}\varphi(2^j x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ が V_j の

正規直交基底になり, Wavelet 関数族 $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k); k \in \mathbf{Z}\}$ が W_j の正規直交基底になる. いま ψ を W_0 の関数, φ を V_0 の関数とすれば, 式 (1),(2) より V_1 の正規直交基底で展開できる. つまり,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_k \alpha_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \\ \psi(x) &= \sum_k \beta_k \sqrt{2} \psi(2x - k), \\ \beta_k &= (-1)^k \alpha_{1-k}.\end{aligned}\tag{4}$$

2.2 離散 Wavelet 変換

あるデータ列 $\{C_m^1; m \in \mathbf{Z}\}$ に対し, これが展開係数となるような, V_1 の関数 f を考える. つまり,

$$\begin{aligned}\{C_m^1 &; m \in \mathbf{Z}\}, \\ \downarrow \\ f(x) &= \sum_m C_m^1 \sqrt{2} \varphi(2x - m) \in V_1.\end{aligned}\tag{5}$$

一方式 (2) $V_1 = V_0 \oplus W_0$ より, $f(x) \in V_1$ は, V_0 と W_0 に分解できる. そこで V_0, W_0 の展開係数をそれぞれ $\{C_l^0\}, \{D_l^0\}$ とすると

$$f(x) = \sum_l C_l^0 \varphi(x - l) + \sum_l D_l^0 \psi(x - l).$$

一方, 係数 C^1 と C^0, D^0 の間には, $\{\sqrt{2}\varphi(2x - k)\}$ が正規直交であることを使えば,

$$\begin{aligned}C_l^0 &= \int f(x) \varphi(x - l) dx = \sum_m \alpha_{m-2l} C_m^1, \\ D_l^0 &= \sum_m \beta_{m-2l} C_m^1.\end{aligned}\tag{6}$$

が導かれる. これを離散 Wavelet 変換 (DWT)[12] という. また α, β には

$$\beta_k = (-1)^k \alpha_{1-k}.\tag{7}$$

なる関係がある.

一方式 (6) より逆変換が導かれる.

定義 3 離散 Wavelet 逆変換 (DIWT)

式 (6) の $\{C_l^0\}, \{D_l^0\}$ から元の数列 $\{C_m^1\}$ を構成するには,

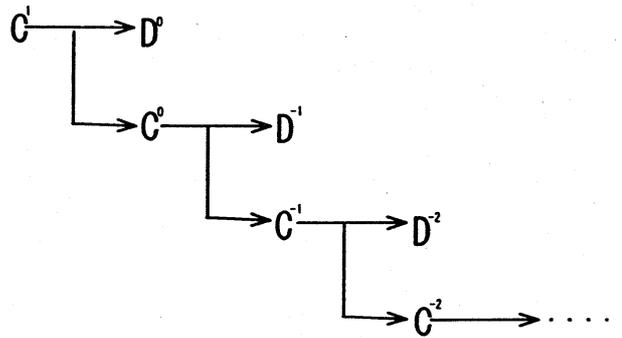
$$C_m^1 = \sum_l \alpha_{m-2l} C_l^0 + \sum_l \beta_{m-2l} D_l^0,$$

である.

離散 Wavelet 変換では数列 $\{C_m^1\}$ は $\{C_l^0\}, \{D_l^0\}$ の 2 つに分解されるので C^0, D^0 のデータ数は C^1 の半分になる. この分解を更に $\{C_l^0\}$ について C^{-1}, D^{-1} のデータに分解を続ければ図 1 のようになる. ここで, C^k をレベル k のデータ列という.

つまり, レベル k のデータ列 C^{-k} はさらに分解の進んだレベル $-(k+1)$ の C, D に分解される. そして最終的には, 2 個ずつの係数列になる. これを逆にたどれば, すべてレベルの Wavelet の展開係数 D^* と 1 つの最終レベルの C^* から, 完全に元のデータ列 C^1 が再構成される. また, 図形的にみればレベルが進めば進むほど C^k はなだらかになり, 結果的には Wavelet の係数 D^k は 0 の要素が増えていく (図 2). 従っ

the pyramidal hierarchy of DWT

図 1: The pyramidal hierarchy of C^k and D^k

て、再構成するには総ての Wavelet の展開係数でなく、絶対値の大きな Wavelet の展開係数だけから再構成してもかなりオリジナルに近い近似が得られるはずである。この考えにもとずいてここでは、以下のように間引きを行い評価した。

1. 点列 P の x 座標, y 座標に分け Wavelet 変換を行う。
2. Wavelet 変換を最終レベルまで行う。Wavelet 変換はコンパクト・サポートな Daubechies の Wavelet を構成する $\{\alpha\}$ を使って行う。[4]
3. 全ての Wavelet の展開係数の絶対値の大きな順から m 番めまでを残す。その位置 i も記憶する。
4. 残った Wavelet の展開係数と最終レベルの C^* からレベル 1 の曲線 Q を再構成する。
5. Q とオリジナルの曲線 P の誤差を評価する。

この場合の情報量は、(2 個の C の展開係数値, m 個の D 展開係数値, 0 でない m 個の D の位置を示す bit の情報) である。

2.3 両直交 (Bi-orthogonal) Wavelet 変換

前節での Daubechies の Wavelet はコンパクト・サポートな正規直交性はみたしているが、対称でない。そのため間引きをデータの正順で行ったか、逆順で行ったかにより結果に違いが生じる。一方コンパクト・サポートな正規直交 Wavelet 基底は Haar 関数以外存在しないことが、証明されている。そこで正規直交性をはずし、拡張した両直交 Wavelet を適用することを考える。つまり、再構成の時には分解のときもちいた α, β と異なる重み $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を使う。

定義 Bi-orthogonal Wavelet

分解は,

$$C_l^0 = \sum_m \alpha_{m-2l} C_m^1,$$

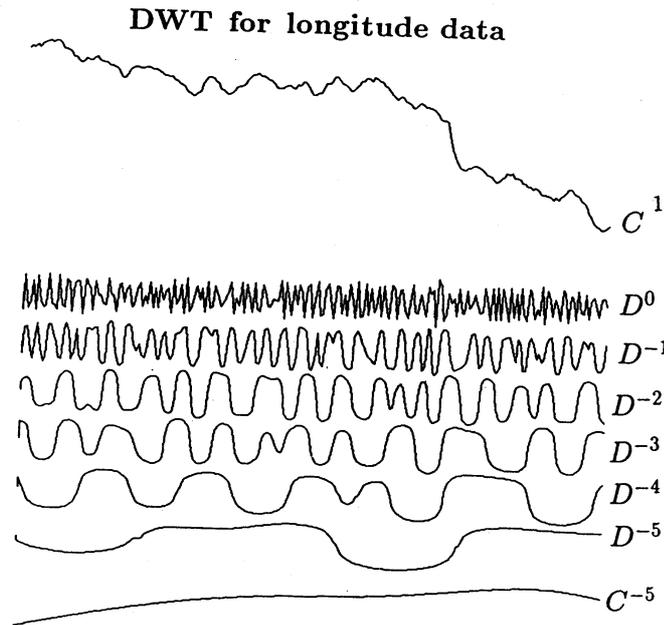


図 2: The different levels of wavelet coefficients

$$D_l^0 = \sum_m \beta_{m-2l} C_m^1, \quad (8)$$

で定義される.

一方逆変換は,

$$C_m^1 = \sum_l \tilde{\alpha}_{m-2l} C_l^0 + \sum_l \tilde{\beta}_{m-2l} D_l^0, \quad (9)$$

である. 重み係数間には以下の関係がある.

$$\begin{aligned} \beta_k &= (-1)^k \tilde{\alpha}_{1-k}, \\ \tilde{\beta}_k &= (-1)^k \alpha_{1-k}. \end{aligned} \quad (10)$$

実際の計算では,[4]pp.278 -pp.280 の $\alpha, \tilde{\alpha}$ を使って計算した.

3 単純な曲線を用いた数値実験

最終目的はなだらかな部分, ジグザグした部分が混在している海岸線の間引きであるが, まず単純な曲線で, どのような Wavelet 変換を使えば誤差が少なくできるかなどをみることにした. ここでは spiral 曲線を使う. 理由はこの曲線は曲率が一定でないことと, Wavelet 変換がもっとも得意とする特異点がないので, 変換誤差がかえって明確にあらわれるのではないかという理由による.

3.1 しきい値 (threshold) を変えてみる数値実験

spiral 曲線は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} x &= (1/\theta) \cos \theta, \\ y &= (1/\theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

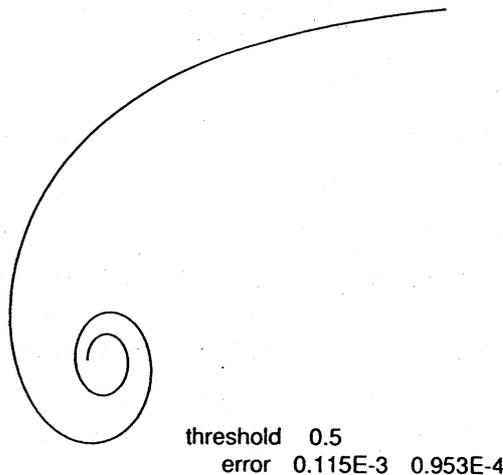
これを、区間 $0.2\pi \leq \theta < 5\pi$ について 512 等分した増分 $\Delta\theta = 4.8\pi/512$ の各点でデータ点をとる。このデータに対してしきい値を 0 から 1 まで変え誤差の様子とをみた。Wavelet 変換はつねに一定の Daubechies の 3 次の多項式で与えられたもの（以下 D_3 と記す）を使用した。その結果を表 1. に示す。

表 1: しきい値を変化させた場合

threshold	remained points	error of x	error of y
0.5	226	0.115E-3	0.953E-4
0.1	52	0.691E-2	0.431E-2
0.05	26	0.459E-1	0.313E-2

表 1. での error x とは x 軸方向の最大絶対誤差をあらわす。数値だけでなく目でたしかめるためしきい値が 0.5 と 0.05 の場合についてオリジナルの曲線と、そのしきい値以下の Wavelet 係数を 0 とおくことにより、再構成した近似曲線 Q をならべ表示した（図 3）。その結果しきい値 0.5 のときはほとんど違いはない。0.05 の場合は波状になり、終点では特に誤差が目立つ。

A spiral applied by 3 wavelet function



A spiral applied by 3 wavelet function

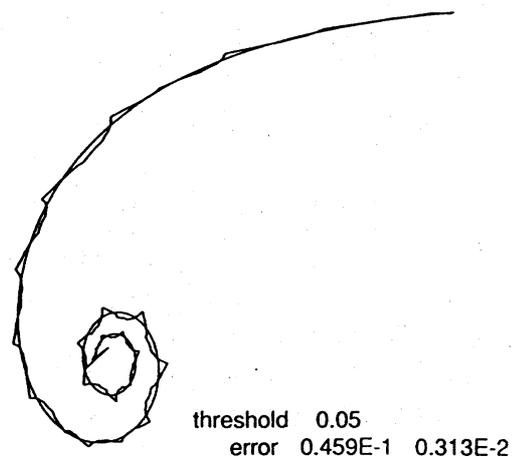


図 3: The errors of thresholds changed

3.2 Wavelet の次元を変化させた場合

ここでは Daubechies のコンパクト・サポートな Wavelet でもさまざまな次元のものがある。そのうちどれを使った良いか、またどういう傾向があるかを調べた。ここでは、しきい値を一定の 0.05 の場合 0.5 の場合について実験を行った。しきい値が 0.5 の場合を表 2 に示す。

この場合は 11 次の場合が最も良いが、実際に重ね書きした場合 3 次以上のときにはオリジナルの曲線とかさなっており目で見えるような違いはない。しきい値が 0.05 の場合には、次数が高くなるほど誤差が大きくなる。11 次元の場合を図 4 に示す。ここでは、ギブス現象があらわれている。

表 2: しきい値 0.5 一定のとき Wavelet の次元を変化させた場合

degree	error of x	error of y
1	0.276E-2	0.276E-2
3	0.115E-3	0.953E-4
11	0.358E-6	0.298E-6
19	0.417E-6	0.298 E-6

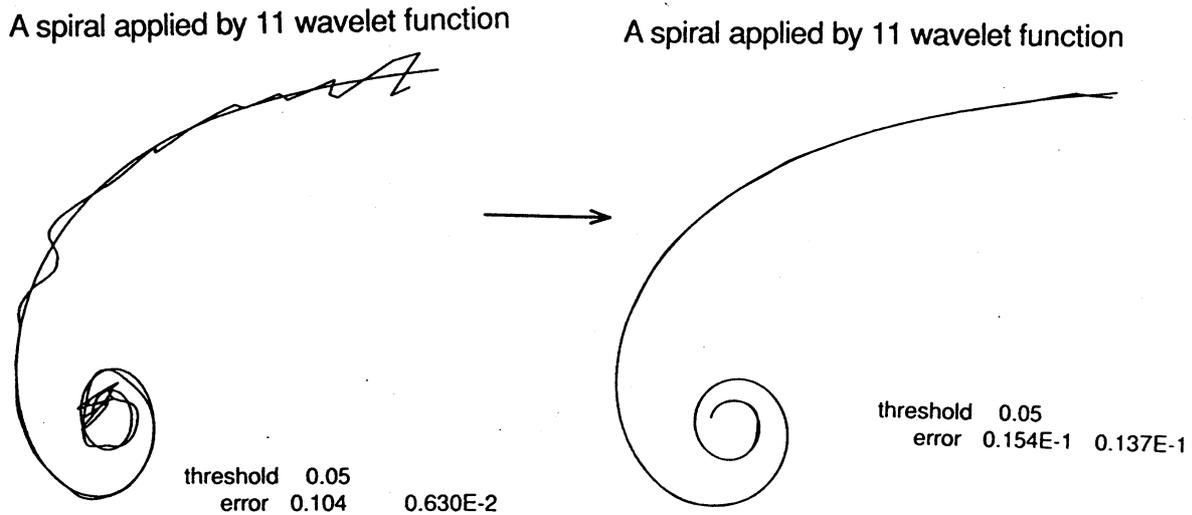


図 4: spiral with Gibb's phenomena and removed one

3.3 キブス現象を避けるために

Daubechies の Wavelet の係数 α の個数を n としたとき $2n - 1$ 個のデータをコンパクト・サポートする。そこで端点のデータがないと暴走する結果になる。それを避けるために前もってデータの区間を広げ Wavelet 変換したのちに、狭い区間に限って逆変換をする。またデータがポリゴンデータであれば端点の心配はないが、地図データが必ずしもポリゴン・データになっているとは限らない。しかしたとえラインデータであっても、隣接した地域のデータをつかうことにより、区間を広げるという手法は地図の場合でもとることができる。

この spiral 曲線の実験では、区間を $0.1 \leq \theta < 9.7\pi$ に広げ増分は $\Delta\theta = 9.7\pi/1024$ とする。逆変換は $0.2\pi \leq \theta < 5\pi$ で行う。その結果を同じ 11 次の場合に図 4 の右に表示する。ギブス現象はなくしかも良く曲線にフィットしている。

4 海岸線データの間引き

ここでは実験データとして宮城県と岩手県にかかる海岸線を使う。この部分はなだらかな部分とリアス式海岸のジグザグした部分とからなり、データは 225 点から構成されている (図 5)。実際にはギブス現象をさけるため、前もって始点・終点にそれぞれ 15 点、16 点を加えたさらに広い 256 点よりなる区間を取り扱い、評価は、225 点の区間で行った。

しきい値 = 0.5 の場合

ORIGINAL COASTLINE CONSISTS OF 225 POINTS

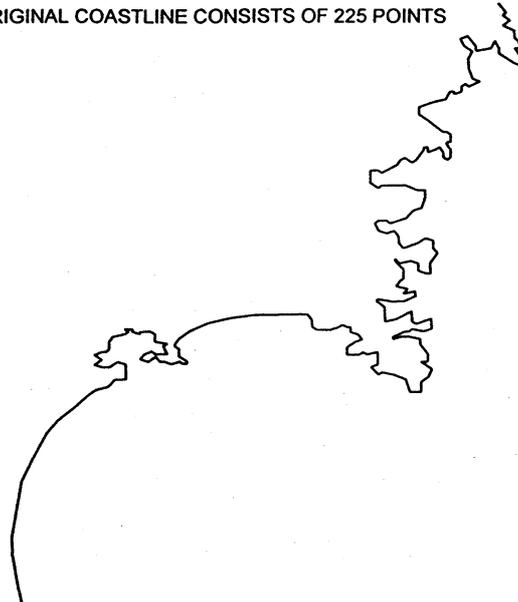


図 5: The original coast line consisted of 225 points

表 3: しきい値 0.5 一定のとき次数を変化させた場合

degree	error of x	error of y
1	0.105E-1	0.125E-1
3	0.629E-2	0.732E-2E-2
11	0.662E-2	0.507E-2
19	0.644E-2	0.625E-2

この場合はしきい値を 0.5 にとり, Wavelet 関数の次数が 1, 3, 11, 19 の各場合について間引きを行い, 再構成した結果とオリジナルのデータの最大誤差で評価した. その結果を表 3 に示す. この場合は 113 まで間引かれたことになる. また, 1, 19 次の場合を図 6 に示す. spiral の場合と同様 11 次の時が最も良いが, どの場合も総じて良い結果になっている.

しきい値 = 0.3 の場合

この地図データの場合あまり間引いてしまうと, もはや地図データとしての意味が失われてしまう. spiral の場合はしきい値が 0.01 でも形状を残したが, この場合は, D_3 , しきい値 0.3, つまり 64 点を残した場合の実験を行った.

この場合でもジグザグした部分はかなり忠実に表現している. (図 7)

両直交 Wavelet を使った場合

§2. でも触れたが, 今まで使用した Wavelet は 1 次の Haar 以外, 左右対称でない. したがってデータ順に Wavelet 変換した場合と, 逆順に Wavelet 場合とで結果に影響が出よう. そこでここでは, 両直交 Wavelet 変換で 4 次の場合, 正規直交の場合で 3 次の場合について, 比較を行った. しきい値は, 0.3, 0.5 の 2 通りの場合である. 結果は表 3 に示す. 両直交 Wavelet を使った場合の方が左右対称だけでなく良い結果になっている, また誤差の評価で最大誤差だけでは不十分なので, 図には誤差の 2 乗平均を τ で記している.

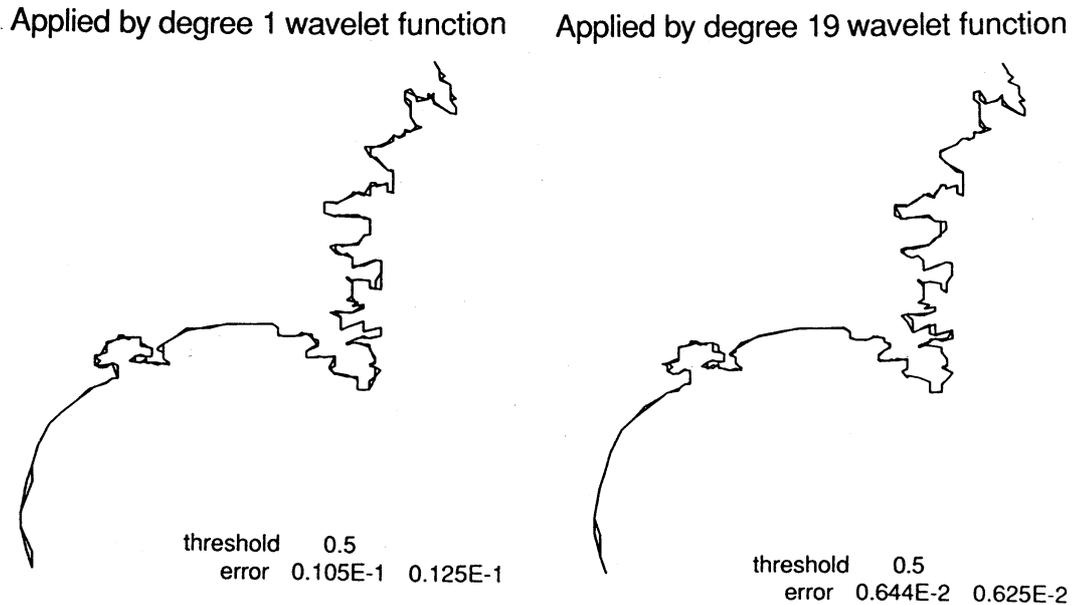


図 6: The coast line reduced by D_1, D_{19}

表 4: The errors by bi-orthogonal DWT and by orthonormal DWT

	<i>orthonormal case1</i>	<i>orthonormal case2</i>	<i>bi-orthogonal</i>
0.1	0.129E-1, 0.131E-1	0.129E-1, 0.131E-1	0.114E-1, 0.104E-1
0.5	0.629E-2, 0.732E-2	0.723E-2, 0.645E-2	0.650E-2, 0.570E-2

(case 1... orderd case 2 ... inverse order)

5 結論

- 完全正規直交 Wavelet 変換は地図の間引きには、精度処理時間の両面から有効な手段である。
- Wavelet を構成する展開係数は 1,3 より高次な 11,19 などの方がよい。
- 両直交 Wavelet は 地図データの場合でも精度よく間引くことが可能である。
- ギブス現象が両端で起こるが、ポリゴンデータ以外でも両端にデータ点を加えることによりさげられる。地図データでは、一般的にこの手法は可能である。

参考文献

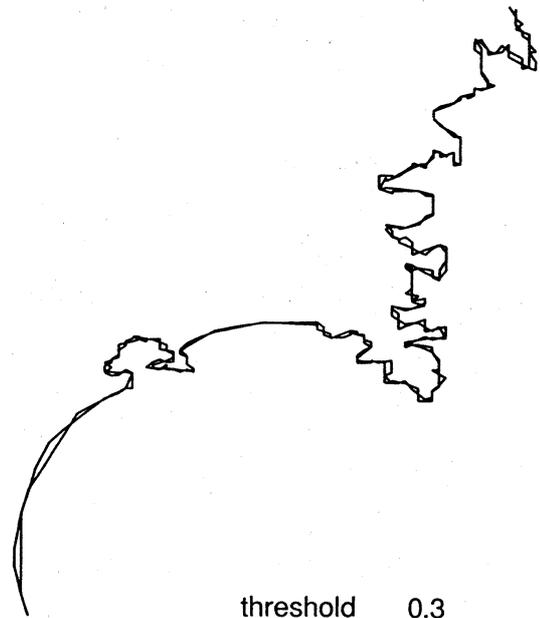
- [1] D. H. Douglas and T. K. Peucker, *Algorithms for the Reduction of the Number of Points Required to Represent a Digitized Line or its Caricature*, the Canadian Cartographer, 10(1973), pp.112-122.
- [2] 桧山, 花田, 今井, 実用的な曲線データ点の間引き法, 日本応用数理論文誌, 3, No.2(1993), pp.85-104.
- [3] 森本 晃, ウェーブレット離散変換の利用について, 第2回ウェーブレット技術セミナー講習会テキスト, 1993.
- [4] S. Mallat, *Multiresolution Approximation and Wavelets* Trans. Amer. Math, 315(1989), pp.69-88.

Applied by degree 3 wavelet function



threshold 0.3
error 0.129E-1 0.131E-1
 $\tau = 0.647E-2$

With bi-orthogonal DWT, degree is 3



threshold 0.3
error 0.140E-1 0.104E-1
 $\tau = 0.596E-2$

图 7: The coast line reduced by D_3 and bi-orthogonal wavelet