数理解析研究所講究録
917巻 1995年 89-100

Φ-like holomorphic mappings

東京電機大　鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

単位円上の単葉函数論の基本定理の１つに「歪曲定理」がある。特に，単葉函数族の函数解析的研究においては，「歪曲定理」が最も重要な役割を演ずる。しかし，多変数函数においては，1933年にH. Cartanがすでに述べている様に，歪曲定理，Growth theoremは成り立たない。しかし，1991年にR. Barnard, C.H. FitzGerald and S. Gongは$\mathbb{C}^n$の単位球のstarlike単葉写像に対してGrowth theoremが成り立つ事を示した。しかし本講の定理3.1によりstarlike以外の単葉写像に対してはGrowth theoremは成り立たない様に思はれる。

本講におけるΦ-likeの概念は1変数の場合にL. Brickman[2]によって導入され，K.R. Gurganus[5]によって$\mathbb{C}^n$更にBanach空間に拡張されたもので，単葉写像の幾何学的性質の研究には有効と思はれる。なお，本講の諸定理は$\mathbb{C}^n$の場合に述べているが容易にHilbert空間，Banach空間に拡張できる。

§1.

$\mathbb{C}^n$ の点 z を列ベクトル

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

で表し，z^* を z の転置共役ベクトルとする。$z, w \in \mathbb{C}^n$ の内積及びノルムを

$$\langle z, w \rangle := w^* z = \sum_{j=1}^{n} \overline{w_j} z_j, \qquad \|z\| := \sqrt{\langle z, z \rangle}$$

と定義する。この時，$\mathbb{C}^n$ は n-次元 Hilbert 空間になる。$\mathbb{C}^n$ の原点を中心とする(開)単位球を $\mathbb{B}$ で表す，i.e., $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$.

$\mathbb{C}^n$ の領域から $\mathbb{C}^n$ への写像 $f(z)$ を列ベクトル

$$f(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$$

で表し，$f(z)$ の逆写像(もし存在すれば)を $f^{-1}(z)$ で表す。各成分が正則函数のとき，$f(z)$ は正則であるという。写像 $f(z)$ の Jacobian 行列を

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

で表し，Jacobian を $J_f(z)$ で表す.

正則写像 $f(z)$ に対して，$J_f(z) \neq 0$ のとき局所単葉(1-1)である。また，$f(0) = 0$（f の定義域が原点を含むとき）

で，$Df(0)=I$（単位行列）のとき，f は正規化されているという。

Ω を原点 0 を含む $\mathbb{C}^n$ の領域とし，$\Phi(z)$ を Ω から $\mathbb{C}^n$ への正則写像で，$\Phi(0)=0$ とし，

$$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{\|z\|^2}\mathcal{R}e\left(z^* D\Phi(z)\cdot z\right)\right\}>0$$

（存在し，正である）とする，ここで $\mathcal{R}e$ は実部とする。このとき，任意の $X\in\Omega$ に対して，初期値問題

$$\frac{dw}{dt}=-\Phi(w),\quad w(0)=X \qquad (1)$$

が解 $w:=w_X(t)=w(t,X)\ (t\geqq 0)$ を持ち，$\forall t\geqq 0$ に対して，$w_X(t)\in\Omega$ で $w_X(t)\to 0\ (t\to\infty)$ であるとき，領域 Ω は Φ-like であるという。　微分方程式(1) が解 $w\ (t\geqq 0)$ を持てば一意である，そして，原点 0 は(1)の漸近安定臨界点である。

$\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像 $f(z)$ に対して，$f(\mathbb{B})$ が $\mathbb{C}^n$ の Φ-like 領域で，$f(z)$ が $\mathbb{B}$ で単葉であるとき，$f(z)$ は Φ-like 写像であるという。

次の写像族は重要である。（D は $\mathbb{C}^n$ の領域）

$\mathcal{H}(D):=$ D で正則な写像全体．

$\mathcal{M}(\mathbb{B}):=\{h(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{B})\mid \mathcal{R}e\{z^* h(z)\}>0,\ (z\in\mathbb{B},\neq 0)\}$

§2. Φ-like mappings

<u>定理2.1.</u>　$f(z)$を正規化された正則写像とする。更に，$f(z)$がΦ-likeならば，

$$(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) \in \mathcal{P}(\mathbb{B}) \qquad (2)$$

で，

$$\lim_{z\to 0} \mathcal{Re}\left\{\frac{1}{\|z\|^2} z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\right\} > 0 \qquad (3)$$

(存在し，正である)，ここで$(\cdot)^{-1}$は逆行列。

<u>証明.</u>　(2)に対しては，(fのΦ-like性により)

$$\mathcal{Re}\left\{z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\right\} \geqq 0$$

を示せばよい。仮定により，$f(\mathbb{B})$はΦ-like領域であるから，$\forall X\in f(\mathbb{B})$に対して，微分方程式(1)はただ1つの解$w=w(t,X)$を持つ。故に，実$z\in\mathbb{B}$に対して，$X:=f(z)$，$g(t,z):=f^{-1}(w(t,X))$ $(\forall t\geqq 0)$とおくと，

$$w(t,X)=f(g(t,z)), \quad w(0,0)=0,$$

$$g(t,z)\in\mathbb{B} \ (t\geqq 0), \quad g(0,z)=z,$$

$$Df(g(t,z))\frac{dg}{dt}=\frac{dw}{dt}=-\Phi(w)$$

$$\frac{d}{dt}g(0,z)=-(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))$$

従って，Schwarzの補題により

$$\|g(t,z)\|\leqq\|z\|.$$

故に，次の式を得る

$$z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) = -z^*\frac{dg}{dt}(0,z)$$
$$= -z^*\lim_{t\to 0}\frac{g(t,z)-g(0,z)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\|z\|^2 - z^*g(t,z)}{t}$$

故に，

$$\mathcal{R}e\{z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\} = \mathcal{R}e\left\{-z^*\frac{dg}{dt}(0,z)\right\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\mathcal{R}e\left[\frac{\|z\|^2 - z^*g(t,z)}{t}\right] \geq 0$$

十分小なる $\|z\|$ に対して，次の式を得る

$$(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) = (Df(0))^{-1}D\Phi(0)(Df(0))z + o(\|z\|)$$

故に，f の Φ-like 性によって，(3)が存在し，正である事が導かれる。 $\square$

定理2.1 の逆には次の定理が必要である。

<u>定理2.2.</u> (Pfaltzgraff [ ]) $h(t,z)$ を次の条件を満す $\mathbb{B}\times[0,\infty)$ から $\mathbb{C}^n$ への写像とする：

(a) $h(t,0)=0$, $Dh(0)=I$,

(b) $\forall t>0$ に対して，$h(t,z)\in\mathcal{H}(\mathbb{B})$,

(c) $\forall z\in\mathbb{B}$ に対して，$h(t,z)$ は t の可測函数である，

(d) $\forall T>0$, $0<\gamma<1$ に対して，次の条件を満たす定数 $K(T,\gamma)$ が存在する：

$$\|h(t,z)\| \leqq K(T,\gamma) \quad (\|z\| \leq \gamma,\ 0 \leq t \leq T).$$

この時，$\forall z \in \mathbb{B}$ に対して，初期値問題

$$\frac{dv}{dt} = -h(t,v) \quad (a.e.\ t \geqq 0)$$

$$v(0) = z$$

はただ1つの解：$v(t,z) = e^{-t} Iz + \cdots \in \mathbb{B}$ を持つ．更に，t を固定すると，$v(t,z)$ は $\mathbb{B}$ 上の単葉 Schwarz 函数である。

<u>定理2.3.</u> $f(z)$ を $\mathbb{B}$ 上の正規化された正則写像で，局所単葉とする。$\Phi(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ で極限値(3)が存在し，正とする。この時，$(Df(z))^{-1}\Phi(f(z)) \in \mathcal{N}(\mathbb{B})$ ならば，$f(\mathbb{B})$ は Φ-like 領域で，$f(z)$ は単葉である。従って，$f(z)$ は Φ-like 写像である。

証明．$h(\zeta) := (Df(\zeta))^{-1}\Phi(f(\zeta))$ $(\zeta \in \mathbb{B})$ とおく。そうすると，$h(\zeta)$ は $\mathbb{B}$ で正則で，$\mathcal{R}e\{\zeta^* h(\zeta)\} > 0$．従って，定理2.2によって，$\forall z \in \mathbb{B}$ に対して，初期値問題

$$\frac{d\zeta}{dt} = -h(\zeta) = -(Df(\zeta))^{-1}\Phi(f(\zeta))$$

$$\zeta(0) = z$$

はただ1つの解 $\zeta := \zeta_z(t) = \zeta(t, z)$ $(t \geqq 0)$ を持つ．いま，

$$w := w_z(t) := f(\zeta_z(t)) \qquad (t \geqq 0)$$

とおくと，

$$\frac{dw}{dt} = Df(\zeta)\frac{d\zeta}{dt} = -Df(\zeta)h(\zeta) \tag{4}$$

$$= -\Phi(f(\zeta)),$$

$$w_z(0) = f(\zeta_z(0)) = f(z)$$

$$\lim_{t\to\infty} w_z(t) = \lim_{t\to\infty} f(\zeta_z(t)) = f(0) = 0$$

従って，$\Omega := f(\mathbb{B})$ とおくと，$w_z(t)$ は(1)の解で，$w_z(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ となり，$\Omega = f(\mathbb{B})$ は Φ-like 領域である。

また，$z, z' \in \mathbb{B}$ に対して，$f(z) = f(z')$ とすると，上記の式より，$w_z(0) = w_{z'}(0)$．また，(4)の解の一意性により，$w_z(t) = w_{z'}(t)$ $(t \geqq 0)$，更に，$J_f(z) \neq 0$ で $\zeta_z(t), \zeta_{z'}(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ であるから，$\zeta_z(t) = \zeta_{z'}(t)$ $(t \geqq 0)$。

従って，

$$z = \zeta_z(0) = \zeta_{z'}(0) = z'.$$

よって，$f(z)$ は単葉である。

<u>系.</u> $f(z)$を，$\mathcal{H}(\mathbb{B})$の正規化された局所単葉写像とする。この時，$f(z)$が単葉であるための必要十分条件は，或るΦに対して$f(z)$がΦ-likeであることである。

<u>例.</u> [1] $f(z)$がstarlikeであるための必要十分条件は $\Phi(w)=w$ となることである.

[2] $\Phi(w)=Aw$, で

$$A = U^{-1} D U, \quad U: \text{unitary}, \quad D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \ (\text{対角行列})$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j > 0$$

のとき、$f(z)$は<u>spiral-like</u>という。

§3. The growth theorem.

$f(z)$を$\mathcal{H}(\mathbb{B})$の正規化された写像とする。$f(z)$をΦ-likeとすると，$\forall z_0 \in \mathbb{B}$に対して，初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w), \qquad w(0)=f(z_0)$$

は解曲線 $w(t)$ $(t \geq 0) \in f(\mathbb{B})$ を持つ。（曲線$w(t)$は$f(z_0)$から原点0への向きが正の向きである。） $z(t)$を曲線$w(t)$の原像とする，即ち，$z(t) := f^{-1}(w(t))$ $(t \geq 0)$.

従って、$z(t)$は$\mathbb{B}$内の解析曲線であり、$Df^{-1}(w)=(Df(z))^{-1}$ であるから、次の式を得る

$$\frac{dz}{dt} = Df^{-1}(w)\frac{dw}{dt} = (Df(z))^{-1}(-\Phi(w))$$

$$= -(Df(z))^{-1}\Phi(f(z(t))).$$

$s(t_0)$を原点0から$z(t_0)$までの曲線$z(t)$の長さとすると、

$$s(t_0)=\int_{+\infty}^{t_0}\left\|\frac{dz}{dt}\right\|dt, \quad \left\|\frac{dz}{dt}\right\| = \|(Df(z))^{-1}\Phi(f(z(t)))\|.$$

$$\frac{ds}{dt} = -\|(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\|.$$

故に、

$$\frac{df(z(s))}{ds} = \frac{df(z(t))}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\,\frac{df(z(t))}{dt}$$

$$= \frac{1}{\|(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\|}\Phi(f(z(t))) \tag{5}$$

これらより、次の定理が得られる：

<u>定理3.1.</u> Aを正値Hermite行列とし、λ, ΛをそれぞれAの最小及び最大固有値とし、$\Phi(w)=Aw$とする。$f\in\mathcal{H}(\mathbb{B})$が正規化された$\Phi$-like写像とすると、次の式が成り立つ；

$$\left\{\frac{(1+\|z(s_1)\|)^2}{\|z(s_1)\|}\cdot\frac{\|z(s_2)\|}{(1+\|z(s_2)\|)^2}\right\}^{\lambda/\Lambda} \leqq \frac{\|f(z(s_2))\|}{\|f(z(s_1))\|}$$

$$\leqq \left\{\frac{(1-\|z(s_1)\|)^2}{\|z(s_1)\|}\cdot\frac{\|z(s_2)\|}{(1-\|z(s_2)\|)^2}\right\}^{\Lambda/\lambda}$$

$$(0 < s_1 < s_2 < \infty)$$

系（Barnard, FitzGerald and Gong[1]）正規化された starlike 写像 $f(z)$ に対して，次の式が成り立つ：

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leqq \|f(z)\| \leqq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2} \quad (z\in\mathbb{B})$$

定理3.1の証明には次の補題が必要である：

<u>補題3.2.</u>　A, λ, Λ を定理3.1のものとする．この時，$\forall z, w \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\lambda\,\mathrm{Re}(z^* w) \leqq \mathrm{Re}(z^* A w) \leqq \Lambda\,\mathrm{Re}(z^* w).$$

<u>補題3.3</u>（Pfaltzgraph[8]）　$g(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ を正規化された写像とすると，$\forall z\in\mathbb{B}$ に対して，

$$\|z\|^2\frac{1-\|z\|}{1+\|z\|} \leqq \mathrm{Re}(z^* g(z)) \leqq \|z\|^2\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}.$$

<u>補題3.4.</u>　A, λ, Λ, $\Phi(w)$ を定理3.1のものとする。この時，$\forall z \in \mathbb{B}$ に対して，次の式が成り立つ：

$$\mathrm{Re}\left\{z^*(Df(z))^{-1}A\,f(z)\right\} = \|z\|\,\|(Df(z))^{-1}Af(z)\|\cos\theta$$
$$\mathrm{Re}\left\{z^*(Df(z))^{-1}f(z)\right\} = \|z\|\,\|(Df(z))^{-1}f(z)\|\cos\theta$$

$$\lambda\|z\|\frac{1-\|z\|}{1+\|z\|} \leqq \|(Df(z))^{-1}Af(z)\|\cos\theta$$
$$\leqq \Lambda\|z\|\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}$$

ここで θ は z と $(Df(z))^{-1}Af(z)$ との間の角である。

定理3.1の証明。

$$g(s) := \|f(z(s))\|^2 = (f(z(s)))^* f(z(s)).$$

とおくと，(5)より

$$\frac{dg(s)}{ds} = 2\,\mathrm{Re}\left\{(f(z(s)))^*\frac{df}{ds}(z(s))\right\}$$
$$= \frac{2}{\|(Df(z(s)))^{-1}Af(z(s))\|}(f(z(s)))^*A\,f(z(s)).$$

この時，補題3.2により

$$\lambda g(s) \leqq \mathrm{Re}\left\{(f(z(s)))^*Af(z(s))\right\} \leqq \Lambda g(s)$$

これと，補題3.4によって，次の式を得る；

$$\frac{2\lambda}{\Lambda}\cdot\frac{1-\|z(s)\|}{\|z(s)\|(1+\|z(s)\|)}\cos\theta \leqq \frac{1}{g(z(s))}\frac{dg}{ds}$$
$$\leqq \frac{2\Lambda}{\lambda}\cdot\frac{1+\|z(s)\|}{\|z(s)\|(1-\|z(s)\|)}\cos\theta$$

この不等式を曲線 $z(s)$ 上で積分すれば，定理の式が得られる。

References

[1] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald and S. Gong, The growth and $\frac{1}{4}$-theorems for starlike mappings in $\mathbb{C}^n$, *Pacific J. Math.* **150**(1991), 13-22.

[2] L. Brickman, Φ-like analytic functions. I, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79**(1973), 555-558.

[3] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, and Tokyo, 1983.

[4] P.L. Duren and W. Rudin, Distortion in several variables, *Complex Variables Theory Appl.* **5**(1986), 323-326.

[5] S. Lefsechetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, Second Edition, Interscience Publishers, New York and London, 1963.

[6] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.

[7] M.C. Pease III, *Methods of Matrix Algebras*, Academic Press, New York and London, 1965.

[8] J.A. Pfaltzgraff, Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, *Math. Ann.* **210**(1974), 55-68.

[9] J.A. Pfaltzgraff and T.J. Suffridge, Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, *Pacific J. Math.* **57**(1975), 271-279.

[10] T.J. Suffridge, The principle of subordination applied to functions of several variables, *Pacific J. Math.* **33**(1970), 241-248.

[11] T.J. Suffridge, Starlike and convex maps in Banach spaces, *Pacific J. Math.* **46**(1973), 575-589.

[12] K.R. Gurganus, Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 205(1975) 389-406

[13] T.J. Suffridge, Starlike, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions Lecture Notes in Math. 599 (1976) 146-158.