数理解析研究所講究録
919巻 1995年 12-18

一般 Airy 関数に付随した有理的ドラーム コホモロジー

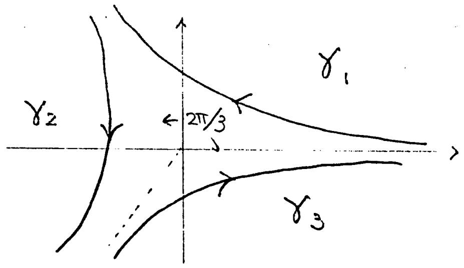
木村 弘信　熊本大学理学部

1　はじめに

前の講演で述べたように, ガウスの超幾何関数の退化したものの一つとして, 次の積分で与えられる Airy 関数がある:

$$A(x)=\int_{\gamma}e^{xu-u^3/3}du$$

ここで, 積分路は



で与えられる $\gamma_i,(i=1,2,3)$ のうちのいずれかである. $A(x)$ は次の微分方程式を満たしている:

$$\frac{d^2A(x)}{dx^2}-xA(x)=0 \tag{1}$$

これを Airy の方程式という. この事実は

$$\frac{d}{du}e^{xu-u^3/3}=(x-u^2)e^{xu-u^3/3}$$

の両辺を γ 上で積分して, Laplace 変換の下で $u\times$ が $-d/dx$ に対応していることから分かる. 当たり前のことであるが, (1) は

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

と同値である. このように Airy 関数を規定する一階連立微分方程式系を書くということを, 多重積分で定義される 一般 Airy 関数(第2節参照) に拡張したり, Aomoto-Gel'fand の超幾何関数にたいして展開されている Intersection Theory を構成するためのone step として, 一般 Airy 関数に付随した de Rham cohomology を調べる.

2 一般 Airy 関数

古典的な Airy 関数は一重積分で表されているが, ここでは [GRS] において導入された, 多重積分による Airy 関数を考える. その定義を復習しておく. $Z \subset M(r+1,n+1)$ を

$$Z := \left\{ z = (z_0, \dots, z_n) \in M(r+1, n+1) \; ; \; \begin{array}{l} z_0 = {}^t(1,0,\dots,0), \\ \det(z_0,\dots,z_r) \neq 0 \end{array} \right\}$$

で定義する. ここで z_0 を上のようにnormalize する事は本質的ではないことを注意しておく. $GL(n)$ の可換部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\}$$

を考える. この群は Jordan 群と呼ばれる. H の普遍被覆群 $\tilde{H}$ の指標を記述するために, $x = (x_1, \dots, x_n)$ の多項式 $\theta_m(x)$ を, generating function を用いて

$$\log(1 + x_1 T + x_2 T^2 + \dots + x_n T^n) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(x) T^m$$

によって定義する. x_i の weight を i とすると $\theta_m(x)$ は total weight が m の weighted homogeneous polynomial である. このとき

命題 1 群 $\tilde{H}$ の指標 χ は

$$\chi(h;\alpha) = h_0^{\alpha_0} \exp\left(\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \theta_i(h_1/h_0, \dots, h_n/h_0) \right)$$

で与えられる. ここで, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ である.

一般 Airy 関数は, 次の積分で与えられる.

$$A(z;\alpha) = \int_{\Delta} \chi(tz;\alpha) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r$$

ここで

$$t = (1, t_1, \ldots, t_r) \in \mathbf{C}^r$$

で, Δ は r 次元の chain で, $|t| \to \infty$ のとき, 被積分関数が指数関数的に 0 に近づくようなものをとる. Z の定義より $tz_0 = 1$ であるので

$$F(t,z) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \theta_i (tz_1, \ldots, tz_n) \in \mathbf{C}[t,z]$$

とおくと, 被積分関数は

$$\chi(tz;\alpha) = \exp F(t,z)$$

とかけることに注意する.

3 有理的 de Rham cohomology

次の記号を用いる

- $T := \mathbf{C}^r$; t-space,
- $M = T \times Z$,
- $S(Z) := \mathbf{C}[z][\det(z')^{-1}]$; the ring of regular functions on Z,
- $\Omega_T^p := \{$ polynomial p-forms in $t\}$,
- $\Omega_{M/Z}^p := \Omega_T^p \otimes_{\mathbf{C}} S(Z)$.

F は上に定義した多項式として, $\nabla_F : \Omega_{M/Z}^p \to \Omega_{M/Z}^{p+1}$ を

$$\nabla_F \eta = d\eta + dF \wedge \eta$$

で定義する. ここで, d は t に関する外微分を表す. ∇_F は integrable である, すなわち $\nabla_F \cdot \nabla_F = 0$ が成り立つ.

定義 2 複体 $C_{\nabla_F} := (\Omega^\bullet_{M/Z}, \nabla_F)$ を

$$0 \to \Omega^0_{M/Z} \xrightarrow{\nabla_F} \Omega^1_{M/Z} \xrightarrow{\nabla_F} \Omega^2_{M/Z} \xrightarrow{\nabla_F} \cdots \xrightarrow{\nabla_F} \Omega^r_{M/Z} \to 0.$$

を一般 *Airy* 積分に付随した *twisted de Rham complex* と呼ぶ.

この複体の cohomology $H^*(C_{\nabla_F})$ について次を主張する.

定理 3 パラメータ α は $\alpha_n \neq 0$ を満たすとする. このとき

1) $H^p(C_{\nabla_F}) = 0$ *for* $p \neq r$.

2) $H^r(C_{\nabla_F})$ は, 自由 $S(Z)$-加群で, その階数は

$$rank\ H^r(C_{\nabla_F}) = \binom{n-1}{r}.$$

$H^r(C_{\nabla_F})$ の基底の取り方については, 第5節で言及する.

4 アイデア

第3節の定理を示すために, 上記の複体の cohomology の計算を,孤立特異点を持つ weighted homogeneous polynomial で定義される Koszul complex の cohomology の計算に帰着させる.

1) $X := \{(1_{r+1}, x'')\ ;\ x'' \in M(r+1, n-r)\}$ とおく. また $S(X) := \mathbf{C}[x'']$, $N := T \times X$ とおく. X は Z の部分空間と思うことができる. 従って $N \subset M$ と思える. N 上の関数

$$G(t, x) := \log \chi(tx; \alpha) \in S(X)[t],$$

を用いて, 複体 $C_{\nabla_G} = (\Omega^\bullet_{N/X}, \nabla_G)$ を考え, その cohomology を $H^*(C_{\nabla_G})$ で表す. これは $S(X)$-加群である.

2) cohomologies $H^*(C_{\nabla_F})$ と $H^*(C_{\nabla_G})$ を関係づける. そのために, 写像 $\beta : Z \to X$ を $(z', z'') \mapsto (1_{r+1}, (z')^{-1}z'')$ で定義する. これにより, $Z \to X$ は principal fiber bundle になる. 関数環に誘導される写像 $\beta^* : S(X) \to S(Z)$ によって, $S(Z)$ は $S(X)$-加群である. このとき, 次が成り立つ.

$$H^*(C_{\nabla_F}) \simeq H^*(C_{\nabla_G}) \otimes_{S(X)} S(Z).$$

3) 次に $H^*(C_{\nabla_G})$ の計算を Koszul complex の cohomology の計算に帰着させる.

$$g(t) = \theta_n(t_1, \ldots, t_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}[t]$$

とおく. これは, 変数 t_i の weight を i/n としたとき, 多項式 $G(t,x)$ の weighted homogeneous part の中で一番 weight の高い部分, すなわち weight 1 の部分を選び出したものである. Koszul 複体

$$(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) : 0 \to \Omega_T^0 \xrightarrow{dg\wedge} \Omega_T^1 \xrightarrow{dg\wedge} \Omega_T^2 \xrightarrow{dg\wedge} \cdots \xrightarrow{dg\wedge} \Omega_T^r \to 0$$

を考える. すると次が示せる: $S(X)$-加群の同型

$$H^*(C_{\nabla_G}) \simeq H^*(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) \otimes_{\mathbf{C}} S(X)$$

が成り立つ.

4) 以上で, 問題は cohomology $H^*(\Omega_T^\bullet, dg\wedge)$ を調べることに帰着した. さて, 多項式 $g(t)$ に関しては次のことがすぐ分かる:

- g は孤立特異点 $t = 0$ を持つ weighted homogeneous な多項式である.
- 孤立特異点の Milnor 数は
$$\mu(g) := \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$$
である.

この事実から, 次が分かる:

- $p \neq r$ のとき $H^p(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) = 0$ である.
- $H^r(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) \simeq \mathbf{C}[t]/(\partial_1 g, \ldots, \partial_r g)$ は次元 $\mu(g)$ の 複素ベクトル空間 である. ただし, $(\partial_1 g, \ldots, \partial_r g)$ は g の偏導関数たちで生成される $\mathbf{C}[t]$ の ideal である.

$R = \mathbf{C}[t]/(\partial_1 g, \ldots, \partial_r g)$ は g の Jacobi ring と呼ばれる.

5 R の基底

ここでは, $\mathbf{C}$ 上の R の基底について予想を述べる. そのために, いくつか言葉を用意する.

$p \leq r$ なる 自然数 p を取り $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ を分割とする. 分割は, 通常のように Young diagram を用いて視覚化される. $|\lambda|$ で diagram の箱の数を表す. λ に対する変数 $= (x_1, \ldots, x_r)$ の Schur 関数 を $s_\lambda(x)$ とかく:

$$s_\lambda(x) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+r-1} & \ldots & x_r^{\lambda_1+r-1} \\ x_1^{\lambda_2+r-2} & \ldots & x_r^{\lambda_2+r-2} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{\lambda_{r-1}+1} & \ldots & x_r^{\lambda_{r-1}+1} \\ x_1^{\lambda_r 1} & \ldots & x_r^{\lambda_r} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} x_1^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \\ x_1^{r-2} & \ldots & x_r^{r-2} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

ただし, ここで $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_r = 0$ という便法を用いている. $s_\lambda(x)$ は x の $|\lambda|$ 次斉次対称多項式である.

$t_1, \ldots, t_r$ を x の基本対称式とする. Suffix はその次数である. $s_\lambda(x)$ を t の関数とみたものを $S_\lambda(t)$ とかく. これは, t_i の weight を i としたとき weighted homogeneous polynomial で, その次数はやはり $|\lambda|$ である

.

$\mathbf{Y}_{r,n-r-1}$ によって length が $n-r-1$ 以下で depth が r 以下の Young diagram の集合を表す.

予想: $[S_\lambda(t)]$ $(\lambda \in \mathbf{Y}_{r,n-r-1})$ はJacobi ring の $\mathbf{C}$ 上の基底を与える. ただし, $[S_\lambda(t)]$ は $S_\lambda(t)$ の定める R の元を表す.

この予想については, いくつか状況証拠がある. たとえば, Jacobi ring $R = \mathbf{C}[t]/(\partial g)$ は monomial からなる $\mathbf{C}$-basis を持つが, その分布を表す Poincaré 多項式は

$$\begin{aligned} P_g(T) &:= \sum_i \mu_i T^i, \\ \mu_i &:= \sharp\{\text{monomials of weight } i \text{ which form a basis of } R\} \end{aligned}$$

で与えられる. このとき

$$P_g(T) = \prod_{i=1}^{r} \frac{T^{n-i}-1}{T^i-1}.$$

が成り立つ. [AVG] 参照. 一方,

$$P_Y(T) := \sum_i \nu_i T^i, \quad \nu_i := \sharp\{\lambda \in \mathbf{Y}_{r,n-r-1}\ ;\ |\lambda| = i\}.$$

と定義すると, これは $P_g(T)$ と一致することが知られている, [Mac] 参照.

参考文献

[AGV] V. Arnold, A. Varchenko and S. Goussein-Zadé, Singularité des applications différentiables **vol 1,2** , Mir Moscou (1986).

[GRS] I. M. Gelfand, V. S. Retahk, and V. V. Serganova, Generalized Airy functions, Schublrt cells, and Jordan groups, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **298** (1988), 17–21.

[K] H. Kimura, On Wronskian determinants of the generalized confluent hypergeometric functions, (1994) preprint

[Mac] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press (1979).

[N] M. Noumi, Expansion of the solutions of a Gauss-Manin system at a point of infinity, Tokyo J. Math., **7** (1984), 1–60.

[OK] K. Okamoto and H. Kimura, On particular solutions of Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables , Quarterly J. Math. **37** (1986) 61–80