数理解析研究所講究録
919巻 1995年 44-55

Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環

野海 正俊 (神戸大学・理学部)

§0：序.

実 Riemann 対称空間の球函数の動径成分は、Weyl 群対称性をもつ微分作用素の可換な族の同時固有函数となる。その微分方程式系は、対称空間の制限ルートの重複度に対応する離散的なパラメータを含んでいるが、方程式論の水準では、このパラメータを連続化した可換微分作用素系を考察し、調和解析を展開することが可能である。その同時固有函数は、1 変数の場合の Gauss の超幾何函数の、多変数への 1 つの拡張とみなすことができる。このような微分方程式系は、Heckman-Opdam の微分方程式と呼ばれることが多い。また固有値系が適当な整数性の条件をみたす場合には、この可換微分作用素系が Weyl 群不変な (Laurent) 多項式の同時固有函数をもち、それらは多変数の直交多項式系を与える。

I.G. Macdonald は、(恐らく) p 進体上の対称空間の球函数の研究を通じて、上のような多変数直交多項式系の q 類似を導入した。この q 直交多項式は、ルート系 (の組) とルートの重複度に対応するデータから構成される対象であり、総称して『Macdonald 多項式』と呼ばれる。Macdonald 多項式は、微分方程式でなく q 差分方程式によって統制される直交多項式系であるが、Macdonald の議論からは、A_n 型の場合を除くと、可換な q 差分作用素系の存在も必ずしも明らかな訳ではない。

一方 1 変数の q 直交多項式としては、Askey-Wilson 多項式と呼ばれる広いクラスの直交多項式系が知られている。これは、q 以外に a, b, c, d と書かれる 4 個の連続パラメータを含んでいて、Jacobi 多項式の多様な q 類似を特殊化として含む。また $q \to 1$ の極限まで含めて考えると、あらゆる古典直交多項式の master family というべきものになっている。Macdonald 多項式との関係においても、Askey-Wilson 多項式は、階数 1 のルート系 (A_1 型, BC_1 型) の場合を特殊化として含み、真に広いクラスの直交多項式系を与えている。

これを踏まえて、T.H. Koornwinder は Askey-Wilson 多項式の n 変数版にあたる q 直交多項式の族を導入した。$n = 1$ では Askey-Wilson 多項式そのもの、$n \geq 2$ では q 以外に a, b, c, d, t という 5 個の連続パラメータを含む。Koornwider が "Askey-Wilson polynomials for BC_n" と呼んでいるように、パラメータを特殊化することにより、(2 種類ある) BC_n 型の Macdonald 多項式や、B_n, C_n 型の Macdonald 多項式を含むクラスとなっている。考え方にも依るが私見では、BC_n 型を考える場合には元々の Macdonald 流よりも Koornwinder 流に広げたクラスを考える方が自然に思われる。Koornwinder によるこの多変数版 Askey-Wilson 多項式のことをここで

は『Macdonald-Koornwinder 多項式』と呼ぶ。普遍的な対象に個人の名前を冠すべきではないという意見もあるし、私もその意見には賛成なので、あまり感心した名前ではないと思うが、今回はこういう呼び名で許してもらうことにしたい。良い呼び名の提案があったら教えていただきたい。

さて Cherednik, 松尾 厚は、共形場理論の Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (KZ 方程式) の一つの variant として、ルート系に付随する KZ 方程式を考察し、特別な場合にはこれが Heckman-Opdam 型の微分方程式と等価になることを示した。しかも KZ 方程式を記述する 1 階の微分作用素たちは Heckman-Opdam 型の微分方程式で Dunkl 作用素と呼ばれているものとほぼ同様なものになる。(本来の Dunkl 作用素は rational な量子可積分系に対応する場合のものである。Heckman-Opdam の微分方程式は trigonometric な場合に対応するので、ここで Dunkl 作用素といったのは Heckman による、Dunkl 作用素の trigonometric version を指す。) この種の方程式系の可積分性は退化した affine Hecke 環の構造論と深く結びついている。

Macdonald 多項式の導入された経緯から考えても、KZ 方程式の q 類似であるいわゆる q KZ 方程式が Macdonald 多項式と直接の繋がりをもつと期待するのは自然であろう。Cherednik, 加藤信一等によってこのことは明らかにされ、実際 affine Hecke 環の構造論から自然に、Macdonald 多項式を同時固有函数にもつような可換な q 差分作用素の族を構成することが可能である。このことの応用として Cherednik は、Macdonald 多項式に対する内積値予想の解決を与えたということらしい。

一方 van Diejen は、Macdonald-Koornwinder 多項式に対して、それを同時固有函数にもつような可換な q 作用素の族が存在することを、具体的に構成して示した。またその特殊な場合として古典型のルート系に付随する Macdonald 多項式に対しても、可換な q 差分作用素の族を与えている。

BC_n 型の Macdoanld 多項式の拡張である Macdonald-Koornwinder 多項式に対しても、Cherednik 流に affine Hecke 環からのアプローチができるのかどうか、気になるところであるが、これが実際に可能である — というのが以下で述べたいことである。つまり、affine Hecke 環を用いて Macdonald-Koornwinder 多項式に対する Dunkl 作用素を構成し、それによって Macdonald-Koornwinder 多項式を同時固有函数にもつ、可換な q 差分作用素の族が構成できることを示す。ここで述べるようなアイディアは Heckman や、Macdonald 自身ももっていたようである。私はまだ確認していないが、このような考え方で Macdonald-Koornwinder 多項式に対する内積値予想の証明も可能であると、Macdonald が最近の Séminaire Bourbaki の論文の中で述べている。

ルート系に付随する Macdonald 多項式を導入した論文の序文の中で、Macdonald は、このような直交多項式系を支配する群論的な対象とはいったい何だろうか — という問を発している。現在の段階では、 affine Hecke 環というのがその一つの答えなのであろう。ただそれが最良の答えであるのか、あるいは唯一の答えであるのかどうかについては、まだ議論の余地があるように思う。

Macdonald 多項式についての原論文は [Ma1] である。Cherednik 流の affine Hecke 環からのアプローチ、内積値予想関連については [C, Ma2, Ka, Ki] を参照して頂き

たい。また Macdonald-Koornwinder 多項式の詳細については [Ko] 。量子対称空間の球函数の枠組みでも、Macdonald 多項式や Macdonald-Koornwinder 多項式が自然に現われることが知られている。これについては [NS] を参照のこと。

§1: Macdonald-Koornwinder 多項式.

$x=(x_1,\cdots,x_n)$ を $(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系とし、Laurent 多項式環

$$A=\mathbb{C}[x^{\pm 1}]=\mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\cdots,x_n^{\pm 1}]$$

を考えよう。この環 A は階数 n の自由加群 $P=\mathbb{Z}\epsilon_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\epsilon_n$ の群環 $\mathbb{C}[P]$ ともみなせる。P の元を (integral) weight と呼び、各 weight $\lambda=\lambda_1\epsilon_1+\cdots+\lambda_n\epsilon_n\in P$ に対応する A の元を $x^\lambda=x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}$ と書く。λ を n 個の整数の組 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ と同一視すれば、これで多重指数の記法と両立する。

この Laurent 多項式環 A には、変数 $x_1,\cdots,x_n$ の添え字の入れ替えと、各変数についての反転 $x_k\to x_k^{-1}$ で生成される群 $W=\{\pm1\}^n\rtimes\mathfrak{S}_n$ (半直積) が作用している。その不変式環 A^W の $\mathbb{C}$ 基底として、たとえば次のようなものがとれる。

$$P^+=\{\lambda=\lambda_1\epsilon_1+\cdots+\lambda_n\epsilon_n\in P\ ;\ \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0\}$$

とおいて P^+ の元を dominant weight と呼ぶ。各 $\lambda\in P^+$ に対して、orbit sum $m_\lambda(x)$ を

$$m_\lambda(x)=\sum_{\mu\in W\lambda}x^\mu$$

で定めると、$\{m_\lambda(x);\lambda\in P^+\}$ は不変式環 A^W の $\mathbb{C}$ 基底を与える:

$$A^W=\bigoplus_{\lambda\in P^+}\mathbb{C}\,m_\lambda(x).$$

P^+ の元に対応する $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ は分割とも呼ばれ、しばしば Young 図形で表わされる。

Macdonald-Koornwinder 多項式は、不変式環 A^W の基底を指定する Laurent 多項式であって、q と (a,b,c,d,t) という 5 個のパラメータに依存して決まる。generic な (a,b,c,d,t) に対して、

$$P_\lambda(x)=P_\lambda(x;a,b,c,d,t;q)\quad(\lambda\in P^+)$$

なる Laurent 多項式であって次のような性質をもつものが定まる。

(0) 半順序に関する三角性。$P_\lambda(x)$ は次の形の表示をもつ：

$$P_\lambda(x)=m_\lambda(x)+\sum_{\mu<\lambda}c_{\lambda\mu}m_\mu(x).$$

ここで $\lambda\geq\mu$ と書いたのは dominance order とよばれる weight の間の半順序で、条件

$$\lambda_1\geq\mu_1,\ \lambda_1+\lambda_2\geq\mu_1+\mu_2,\ \cdots,\lambda_1+\cdots+\lambda_n\geq\mu_1+\cdots+\mu_n$$

を満たすことと定める。

(1) q 差分方程式。q 差分作用素 D を次のように定義する。

$$D = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k^+(x)(T_{q,x_k} - 1) + \sum_{k=1}^{n} \Phi_k^+(x^{-1})(T_{q,x_k}^{-1} - 1).$$

ここで $k = 1, \cdots, n$ に対し

$$\Phi_k^+(x) = \frac{(1-ax_k)(1-bx_k)(1-cx_k)(1-dx_k)}{(1-x_k^2)(1-qx_k^2)} \prod_{j \neq k} \frac{(tx_k - x_j)(1-tx_kx_j)}{(x_k - x_j)(1-x_kx_j)}$$

で、T_{q,x_k} は変数 x_k についての q シフトの作用素 $x_k \to qx_k$ を表わす。このとき D は不変式環 A^W に作用し、各 $\lambda \in P^+$ について $P_\lambda(x)$ は D の固有函数である:

$$DP_\lambda(x) = c_\lambda P_\lambda(x), \quad c_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \{abcdq^{-1}t^{2n-k-1}(q^{\lambda_k} - 1) + t^{k-1}(q^{-\lambda_k} - 1)\}.$$

(2) 直交関係式。q は実数で $0 < q < 1$, また簡単のためパラメータ a, b, c, d, t も絶対値 1 未満の実数とする。このとき

$$\Delta^+(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(x_k^2; q)_\infty}{(ax_k, bx_k, cx_k, dx_k; q)_\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_i/x_j, x_ix_j; q)_\infty}{(tx_i/x_j, tx_ix_j; q)_\infty}$$

と置く。但し

$$(a; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1 - aq^i), \quad (a_1, \cdots, a_m; q)_\infty = (a_1; q)_\infty \cdots (a_m; q)_\infty$$

と記した。そこで、A^W 上の Hermite 内積 $\langle\, ,\, \rangle$ を $f(x), g(x) \in A^W$ に対し

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{|W|} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^n \int_T \overline{f(x)} g(x) |\Delta^+(x)|^2 \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n}$$

で定める。ここで $T = \{|x_1| = \cdots = |x_n| = 1\}$. この内積に対して、$\{P_\lambda(x); \lambda \in P^+\}$ は A^W の直交基底をなす:

$$\langle P_\lambda(x), P_\mu(x) \rangle = 0 \quad (\lambda, \mu \in P^+; \lambda \neq \mu).$$

パラメータが適当な条件を満たせば、(0) と (1) または (0) と (2) で不変式環 A^W の基底 $\{P_\lambda(x); \lambda \in P^+\}$ が一意に定まる。この基底を構成する Laurent 多項式を Macdonald-Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; a, b, c, d, t; q)$ と称する訳である。

ここには、ただ 1 個の q 差分作用素 D を記したが、van Diejen [vD] によれば、これを含む q 差分作用素の可換な族 $D = D_1, D_2, \cdots, D_n$ を構成できることも知られている。

[注釈] ここで考えた Macdonald-Koornwinder 多項式は、多変数 Askey-Wilson 多項式とも、BC_n 型の Askey-Wilson 多項式とも呼ばれる。詳細については [Ko] を参照のこと。上では敢えてルート系を指定しなかったが、weight lattice 等、BC_n 型のルート系に付随するものと考えていただければよい。ただし、q 差分作用素 D や内積をきめる重み函数などどういう意味で BC_n なのかは、いわく言い難いところである。ルート系に付随する Macdonald 多項式については、[Ma1, Ma2] を見ていただきたい。

§2: q 差分作用素環、affine Weyl 群、affine Hecke 環.

有理函数を係数とする q 差分作用素は、指数函数の有理式に対する平行移動を乗法的に書いたものにほかならない。これに座標の入れ替えや反転を加えた作用素の代数を考察して、系統的に代数解析を展開することの重要性は、いくら強調しても強調しすぎることはないであろう。$n=1$ の場合と $n \geq 2$ の場合で若干事情が異なるのでこの節以降では、$n \geq 2$ としておく。

今、Laurent 多項式を係数とする q 差分作用素環

$$\mathbb{K}[x^{\pm 1}; T_{q,x}^{\pm 1}] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}; T_{q,x_1}^{\pm 1}, \cdots, T_{q,x_n}^{\pm 1}]$$

を考えよう。(ここで、$\mathbb{K}$ は $\mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})$ を含む適当な体とし、以下の議論では必要なパラメータを含むよう適宜大きくとる。) x_k と T_{q,x_k} を対等に扱うために記号を変えて $\tau_k = T_{q,x_k}$ と書けば、可逆な元の組 $x_1, \cdots, x_n$, $\tau_1, \cdots, \tau_n$ と交換関係 $\tau_i x_j = q^{\delta_{ij}} x_j \tau_i \quad (1 \leq i, j \leq n)$ で定義される代数を考えるのと同じである。階数 n の自由加群 $P = \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_n$ に $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \delta_{ij}$ なる標準的な双一次形式を与えて、P とその双対 $P^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$ を適宜同一視する。この記号のもとで、上の交換関係は

$$\tau^h x^\lambda = q^{\langle h, \lambda \rangle} x^\lambda \tau^h \quad (\lambda \in P, h \in P^*)$$

と書ける。q もシンボルと考えて、適当な係数体 $\Bbbk$ の上で考えれば q 差分作用素環 $\Bbbk[q^{\pm 1}, x^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}]$ は、$(\mathbb{Z}\delta \oplus P) \times P^*$ に積構造

$$(m\delta + \lambda, h).(m'\delta + \lambda', h') = ((m + m' + \langle h, \lambda' \rangle)\delta + \lambda + \lambda', h + h')$$

を与えた Heisenberg 群 の群環にほかならない。formal exponential $\mathbf{e}^{m\delta}, \mathbf{e}^{\lambda}, \mathbf{e}^{h}$ をそれぞれ q^m, x^λ, τ^h と同一視する訳である。

そこで、q 差分作用素環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}]$ に Weyl 群 $W = \{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ を取り込んで、Weyl 群付きの q 差分作用素環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}; W]$ を考えよう。いろいろな流儀がありうるが、ここでは Weyl 群は P に左から、P^* に右から作用するものとして

$$\langle h.w, \lambda \rangle = \langle h, w.\lambda \rangle \quad (h \in P^*, \lambda \in P)$$

となるようにしておく。P^* に W を左から作用させるときには $w.h = h.w^{-1}$ で反転する。この約束のもとで q 差分作用素と Weyl 群の元との交換関係は $w \in W$ に対し

$$w\, x^\lambda = x^{w.\lambda} w, \quad w\, \tau^h = \tau^{w.h} w$$

で指定する。Laurent 多項式環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用は

$$\tau^h . x^\lambda = q^{\langle h, \lambda \rangle} x^\lambda, \quad w.x^\lambda = x^{w.\lambda}$$

で与えられ、これで $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ は左 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}; W]$ 加群となる。Weyl 群付きの q 差分作用素環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}; \tau^{\pm 1}; W]$ は、affine Weyl 群 $\widetilde{W} = P^* \rtimes W$ の群環と同型な部分環 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}; W]$ (あるいは $\mathbb{K}[x^{\pm 1}; W]$) を含んでいることに注目しよう。

以下では、P を C_n 型ルート系の weight lattice とみなす。(あえて BC_n とは見ない。) 念のためルート系の記号をきめておく。

$$R = R_+ \cup (-R_+), \quad R_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j, \epsilon_i + \epsilon_j \ (1 \le i < j \le n),\ 2\epsilon_k \ (1 \le k \le n)\}.$$

単純ルート $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は

$$\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \cdots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = 2\epsilon_n.$$

weight lattice P の上で、ルート $\alpha \in R$ に関する鏡映を

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \alpha, \quad \alpha^\vee = 2\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$$

と記す。affine Weyl 群 $\widetilde{W} = P^* \rtimes W$ の一般の元を $\tau(\nu) w$ $(\nu \in P^*, w \in W)$ で表わし、$\tau(\nu)$ $(\nu \in P^*)$ は、$\mathbb{Z}\delta \oplus P$ 上で次の形に実現する:

$$\tau(\nu)(m\delta + \lambda) = (m + \langle \nu, \lambda \rangle)\delta + \lambda.$$

乗法的に $\mathbf{e}^\delta = q$, $\mathbf{e}^\lambda = x^\lambda$ と書けば上の $\tau(\nu)$ は 群環 $\mathbb{K}[\widetilde{W}] = \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}; W]$ における q シフトの作用素 τ^ν に対応する。

そこで affine root の集合 $\widetilde{R} = \{a = m\delta + \alpha; m \in \mathbb{Z}, \alpha \in R\}$ を考え、affine root $a = m\delta + \alpha$ の定める $\mathbb{Z}\delta \oplus P$ 上での鏡映を

$$s_a(\ell\delta + \lambda) = \ell\delta + \lambda - \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle a = (\ell - m\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle)\delta + s_\alpha(\lambda)$$

で表わそう。乗法的に書けば s_a の $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ への作用は

$$s_a(x^\lambda) = x^\lambda (q^m x^\alpha)^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle} = q^{-m\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle} x^{s_\alpha(\lambda)}$$

なる $\mathbb{K}$ 代数の自己同型となる。これは、

$$s_a = \tau^{m\alpha^\vee} s_\alpha = s_\alpha \tau^{-m\alpha^\vee}$$

を意味する。そこで、正の affine root の base として

$$a_0 = \delta - 2\epsilon_1, a_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \cdots, a_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, a_n = 2\epsilon_n$$

をとる。($2\epsilon_1$ が今の場合の highest root である。$k = 1, \cdots, n$ に対しては $a_k = \alpha_k$.) 対応する鏡映を $s_k = s_{a_k}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ と書くと、affine Weyl 群 $\widetilde{W} = P^* \rtimes W$ は、$s_0, s_1, \cdots, s_n$ から生成され、その基本関係式は

$$\begin{aligned}
&s_k^2 = 1 \quad (k = 0, 1, \cdots, n)\\
&s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0\\
&s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1} \quad (j = 1, \cdots, n-2)\\
&s_{n-1} s_n s_{n-1} s_n = s_n s_{n-1} s_n s_{n-1}\\
&s_i s_j = s_j s_i \quad (|i - j| \ge 2)
\end{aligned}$$

で与えられることが知られている。対応する Coxeter 図形は

$$\overset{0}{\circ} = \overset{1}{\circ} - \cdots - \overset{n-1}{\circ} = \overset{n}{\circ}$$

である $(n \ge 2)$。われわれの流儀では、$s_0 = s_{2\epsilon_1} \tau_1$ となることに注意しておく。

さて、affine Weyl 群 $\widetilde{W} = P^* \rtimes W = \langle s_0, s_1, \cdots, s_n \rangle$ から affine Hecke 環へ移ろう。今、各 affine の simple root a_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ にパラメータ t_k (の平方根) を割り当てて、$t_1 = \cdots = t_{n-1} = t$ としよう。係数体 $\mathbb{K}$ が、$t_0^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}, t_n^{\frac{1}{2}}$ を含むものとして、$\widetilde{W}$ の Hecke 化 $H(\widetilde{W})$ を次のように定義しよう。$H(\widetilde{W})$ は、生成元 $T_0, T_1, \cdots, T_n$ と基本関係

$$\begin{aligned}
&(T_k - t_k^{\frac{1}{2}})(T + t_k^{-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n)\\
&T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0\\
&T_j T_{j+1} T_j = T_{j+1} T_j T_{j+1} \quad (j = 1, \cdots, n-2)\\
&T_{n-1} T_n T_{n-1} T_n = T_n T_{n-1} T_n T_{n-1}\\
&T_i T_j = T_j T_i \quad (|i - j| \geq 2)
\end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{K}$ 代数である。$\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ のとき、$\ell = \ell(\widetilde{w})$ を $\widetilde{w}$ の長さとして、最短表示

$$\widetilde{w} = s_{k_1} \cdots s_{k_\ell} \quad (0 \leq k_1, \cdots, k_\ell \leq n)$$

をとり $H(\widetilde{W})$ の元

$$T(\widetilde{w}) = T_{k_1} \cdots T_{k_\ell}$$

を作ると、これは $\widetilde{w}$ の最短表示のとり方によらない。また

$$\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in \widetilde{W}, \quad \ell(\widetilde{w}_1 \widetilde{w}_2) = \ell(\widetilde{w}_1) + \ell(\widetilde{w}_2)$$

ならば、Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ においても等式

$$T(\widetilde{w}_1 \widetilde{w}_2) = T(\widetilde{w}_1) T(\widetilde{w}_2)$$

が成立することが知られている。(Matsumoto の補題。)

さて affine Weyl 群の群環 $\mathbb{K}[\widetilde{W}] = \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}; W]$ は、可換な部分環 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]$ を含んでいて、さらに中心については

$$\mathcal{Z}(\mathbb{K}[\widetilde{W}]) = \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W = \bigoplus_{\nu \in (P^*)^+} \mathbb{K} m_\nu(\tau)$$

が成立する。この事実の affine Hecke 環版は Bernstein の定理と呼ばれていて、われわれの議論でも最重要な役割を果たす。まず、可換部分環 $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]$ に対応する部分を考えよう。上のように最短表示を用いて定義した $T(\tau^\nu)$ $(\nu \in P^*)$ 達は一般にはもはや可換ではないが、dominant なパート $(P^*)^+ = P^+$ に限れば

$$\mu, \nu \in (P^*)^+ \quad \Longrightarrow \quad T(\tau^\mu) T(\tau^\nu) = T(\tau^\nu) T(\tau^\mu)$$

が成立する。そこで、一般の $\nu \in P^*$ を$\nu = \nu_+ - \nu_-$ の形に、dominant な $\nu_+, \nu_- \in (P^*)^+$ の差に表わして

$$Y(\nu) = T(\tau^{\nu_+}) T(\tau^{\nu_-})^{-1} \in H(\widetilde{W})$$

と定義すれば、この元は差の表わし方によらず定まり、しかも $Y(\nu)$ 達は互いに可換になることが示される。元の q シフトの作用素 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ の affine Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ での対応物を

$$Y_1 = Y(\epsilon_1),\cdots,Y_n = Y(\epsilon_n)$$

と定めると、$Y(\nu) = Y_1^{\nu_1}\cdots Y_n^{\nu_n} = Y^\nu$ となり、これによって $H(\widetilde{W})$ 内に Laurent 多項式環と同型な可換部分環

$$\mathbb{K}[Y^{\pm 1}] = \mathbb{K}[Y_1^{\pm 1},\cdots,Y_n^{\pm 1}] = \bigoplus_{\nu\in P^*} \mathbb{K}Y^\nu$$

が得られることになる。さらに、 affine Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ は

$$H(\widetilde{W}) = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]T(w)$$

なる自由 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ 加群で、その中心についても

$$\mathcal{Z}(H(\widetilde{W})) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W = \bigoplus_{\nu\in(P^*)^+} \mathbb{K}m_\nu(Y)$$

が成立することがわかる。

[注釈] この種の議論で本質的なのは、次の事実である。上のように Y^ν を定義すると、$k=1,\cdots,n-1$ に対して

$$T_kY^\nu - Y^{s_k(\nu)}T_k = -\frac{(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})Y^{\alpha_k}}{1-Y^{\alpha_k}}(Y^\nu - Y^{s_k(\nu)})$$

が成立する。また $k=n$ に対しては

$$T_nY^\nu - Y^{s_n(\nu)}T_n = -\frac{(t_n^{\frac{1}{2}} - t_n^{-\frac{1}{2}})Y_n + (t_0^{\frac{1}{2}} - t_0^{-\frac{1}{2}})Y_n^2}{1-Y_n^2}(Y^\nu - Y^{s_n(\nu)}).$$

§3: Dunkl 型作用素と q 差分作用素の可換族.

前節で考察した affine Hecke 環を、$x=(x_1,\cdots,x_n)$ の有理函数を係数とする、Weyl 群付き q 差分作用素環 $\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1};W]$ の中で実現することを考えよう。まず affine Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の定義の段階で既に 3 個のパラメータ $t_0, t_1=\cdots=t_{n-1}=t, t_n$ が含まれていたことを思い起こしておこう。ここでは、2 個のパラメータ u_0, u_n に依存する表現 (代数の準同型)

$$\pi : H(\widetilde{W}) \to \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1};W]$$

を構成する。これによって affine Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ の可換部分環 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ が Weyl 群付きの q 差分作用素環の中で表現されることになる。この実現で得られる互いに可

換な作用素 $\pi(Y_1),\cdots,\pi(Y_n)\in\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm1};W]$ が、我々の Dunkl 作用素である。以下では便宜上、パラメータ u_0,u_n に加えて $u_1=\cdots=u_{n-1}=1$ と補って考える。

$\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm1};W]$ の元 $\widehat{T}_0,\widehat{T}_1,\cdots,\widehat{T}_n$ を次の式で定義する: $k=0,1,\cdots,n$ に対し

$$\widehat{T}_k=t_k^{\frac{1}{2}}+t_k^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_k^{\frac{1}{2}}u_k^{\frac{1}{2}}x^{a_k/2})(1+t_k^{\frac{1}{2}}u_k^{-\frac{1}{2}}x^{a_k/2})}{1-x^{a_k}}(s_k-1).$$

統一的に書くためにこのような記法を用いたが、実際には、これらの作用素は次のようなものである。$k=1,\cdots,n-1$ に対しては

$$\widehat{T}_k=t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-tx_k/x_{k+1}}{1-x_k/x_{k+1}}(s_k-1).$$

また $k=0,n$ については

$$\widehat{T}_0=t_0^{\frac{1}{2}}+t_0^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1})(1+t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x_1^{-1})}{1-qx_1^{-2}}(s_0-1),$$

$$\widehat{T}_n=t_n^{\frac{1}{2}}+t_n^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{\frac{1}{2}}x_n)(1+t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{-\frac{1}{2}}x_n)}{1-x_n^2}(s_n-1).$$

ここで $x^{a_0}=qx_1^{-2}$, $s_0=s_{2\epsilon_1}\tau_1$ であることを注意しておく。これらの $\widehat{T}_0,\widehat{T}_1,\cdots,\widehat{T}_n$ は、前節で述べた $H(\widetilde{W})$ の生成元の交換関係を満たすことが検証できる。これによって $\mathbb{K}$ 代数の準同型 $\pi: H(\widetilde{W})\to\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm1};W]$ であって、$\pi(T_k)=\widehat{T}_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ となるものが一意に定まる。実際には、この準同型は injective で affine Hecke 環 $H(\widetilde{W})$ が Weyl 群付き q 差分作用素環 $\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm1};W]$ の部分環と同型になるので、以下では π を略し、$H(\widetilde{W})$ はこの実現のもとで考えることにする。

$H(\widetilde{W})$ の可換部分環 $\mathbb{K}[Y^{\pm1}]$ を構成する前節の手続きを追跡すると、この C_n 型の場合 $Y_1,\cdots,Y_n$ が生成元 $T_0,T_1.\cdots,T_n$ を用いて次のように表わされることが分かる。$k=1,\cdots,n$ について

$$Y_k=T_kT_{k+1}\cdots T_nT_{n-1}\cdots T_0T_1^{-1}\cdots T_{k-1}^{-1}.$$

これを書き下していくと、Dunkl 型作用素 $Y_1,\cdots,Y_n$ の具体的な積表示が得られる。そのために、長さ 2 の正ルート $\alpha\in R_+$ の各々に対し作用素 $\mathcal{R}(\alpha)$ を、また長さ 4 の正ルート $\alpha\in R_+$ の各々に対し 2 種類の作用素 $\mathcal{K}_0(\alpha),\mathcal{K}_n(\alpha)$ を定義しよう。$\alpha\in R_+$ で $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$ のとき

$$\mathcal{R}(\alpha)=t^{\frac{1}{2}}s_\alpha+t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-tx^\alpha}{1-x^\alpha}(1-s_\alpha).$$

とおく。単純ルートに対しては $\mathcal{R}(\alpha_k)=T_ks_k$ $(k=1,\cdots,n-1)$ となっていることに注意する。$\langle\alpha,\alpha\rangle=4$ のとき

$$\mathcal{K}_0(\alpha)=t_0^{\frac{1}{2}}s_\alpha+t_0^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x^{\alpha/2})(1+t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x^{\alpha/2})}{1-qx^\alpha}(1-s_\alpha),$$

$$\mathcal{K}_n(\alpha)=t_n^{\frac{1}{2}}s_\alpha+t_n^{-\frac{1}{2}}\frac{(1-t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{\frac{1}{2}}x^{\alpha/2})(1+t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{-\frac{1}{2}}x^{\alpha/2})}{1-x^\alpha}(1-s_\alpha).$$

とおく。$\mathcal{K}_n(\alpha_n) = T_n s_n$ である。これらの作用素を用いて Y_k $(k=1,\cdots,n)$ は次のように表わされる:

$$
\begin{aligned}
Y_k =& \mathcal{R}(\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) \cdots \mathcal{R}(\epsilon_k - \epsilon_n) \mathcal{K}_n(2\epsilon_k) \\
& \times \mathcal{R}(\epsilon_k + \epsilon_n) \cdots \mathcal{R}(\epsilon_k + \epsilon_{k+1}) \mathcal{R}(\epsilon_{k-1} + \epsilon_k) \cdots \mathcal{R}(\epsilon_1 + \epsilon_k) \\
& \times \left\{ t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - t_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_k)(1 + t_0^{\frac{1}{2}} u_0^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_k)}{1 - q x_k^2} (\tau_k - 1) + \mathcal{K}_0(2\epsilon_k) \right\} \\
& \times \mathcal{R}(\epsilon_1 - \epsilon_k)^{-1} \cdots \mathcal{R}(\epsilon_{k-1} - \epsilon_k)^{-1}.
\end{aligned}
$$

構成法から、これらは可逆で互いに可換な作用素となり、Laurent 多項式 $f(\tau) \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]$ に上の Dunkl 型作用素 $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ を代入して $f(Y) \in \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}; W]$ を作る操作で、可換な部分環

$$
\mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \subset \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}; W]
$$

が得られることになる。

さて affine Hecke 環の元 $L \in H(\widetilde{W})$ が与えられたとき、これを $\mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}; W]$ の作用素と見て

$$
L = \sum_{w \in W} L_w(x;\tau) w \quad (L_w(x;\tau) \in \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}];\ w \in W)
$$

の形に展開し、L の『対称化』$\mathrm{Sym}(L)$ を

$$
\mathrm{Sym}(L) = \sum_{w \in W} L_w(x;\tau)
$$

なる q 差分作用素として定義しよう。いま W 不変な Y の Laurent 多項式 $f(Y) \in \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$ の対称化 $\mathrm{Sym}(f(Y))$ をつくると、$f(Y)$ が $H(\widetilde{W})$ の中心に属することと

$$
T_k - t_k^{\frac{1}{2}} = t_k^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - t_k^{\frac{1}{2}} u_k^{\frac{1}{2}} x^{\alpha_k/2})(1 + t_k^{\frac{1}{2}} u_k^{-\frac{1}{2}} x^{\alpha_k/2})}{1 - x^{\alpha_k}} (s_k - 1) \quad (k = 1, \cdots, n)
$$

から、$\mathrm{Sym}(f(Y))$ が実際に W 不変な q 差分作用素となることが従う。同じ理由で任意の $L \in H(\widetilde{W})$ に対して $[\mathrm{Sym}(f(Y)), \mathrm{Sym}(L)] = 0$ となることも分かる。従って特に、$\mathrm{Sym}(f(Y))$ $(f \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W)$ 達が互いに可換となる。記号を簡単にするために、$f \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W$ に対して

$$
D_f = \mathrm{Sym}(f(Y)) \in \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}]
$$

と書くことにすれば、D_f $(f \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W)$ は W 不変で、互いに可換な q 差分作用素の族を構成するのである。

各 T_k $(k=0,1,\cdots,n)$ の実現をみると、これらが、従って $H(\widetilde{W})$ 全体が、$\mathbb{K}(x)$ の部分環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ にも作用することが分かる。W 不変な Laurent 多項式 $P(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ に affine Hecke 環の元 $L \in H(\widetilde{W})$ が作用するときには、その対称化の q 差分作用素によって

$$L.P(x) = \mathrm{Sym}(L).P(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$$

と作用することに注意しよう。特に $f(Y) \in \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$ に対しては $D_f = \mathrm{Sym}(f(Y))$ が W 不変なので、作用の結果も W 不変な Laurent 多項式となる:

$$f(Y).P(x) = D_f.P(x) \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W.$$

これで、

$$D_f : \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W \to \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W \quad (f \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W)$$

なる q 差分作用素の可換な族が得られた。

いま特に、最初の W 不変な Laurent 多項式

$$m_{\epsilon_1}(Y) = \sum_{k=1}^{n} Y_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k^{-1}$$

に注目しよう。その対称化を D_{ϵ_1} と書くと、

$$D_{\epsilon_1} = \sum_{k=1}^{n} \Psi_k^{+}(x)\tau_k + \sum_{k=1}^{n} \Psi_k^{-}(x)\tau_k^{-1} + \Psi_0(x)$$

の形の W 不変な q 差分作用素を得る。そこで定義にしたがって計算をすると、τ_1 の係数 $\Psi_1^{+}(x)$ は

$$(t_0t_n)^{-\frac{1}{2}}t^{-n+1}\frac{(1-t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x_1)(1+t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}x_1)(1-t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{\frac{1}{2}}x_1)(1+t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{-\frac{1}{2}}x_1)}{(1-x_1^2)(1-qx_1^2)}$$
$$\times \prod_{j=2}^{n} \frac{(tx_1-x_j)(1-tx_1x_j)}{(x_1-x_j)(1-x_1x_j)}$$

となる。パラメータを

$$\{a,b,c,d\} = \{q^{\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}, t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{\frac{1}{2}}, -t_n^{\frac{1}{2}}u_n^{-\frac{1}{2}}\}$$

と読み替えれば、第 1 節で登場した $\Phi_1^{+}(x)$ との関係は

$$\Psi_1^{+}(x) = (t_0t_n)^{-\frac{1}{2}}t^{-n+1}\Phi_1^{+}(x)$$

となっている。W 不変性を考慮すれば、この事実と

$$D_{\epsilon_1}.1 = (t_0t_n)^{\frac{1}{2}}\frac{1-t^n}{1-t} + (t_0t_n)^{-\frac{1}{2}}\frac{1-t^{-n}}{1-t^{-1}}$$

から、D_{ϵ_1} と第 2 節の q 差分作用素 D との関係が分かる:

$$D_{\epsilon_1} = (t_0 t_n)^{-\frac{1}{2}} t^{-n+1} D + (t_0 t_n)^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^n}{1-t} + (t_0 t_n)^{-\frac{1}{2}} \frac{1-t^{-n}}{1-t^{-1}}.$$

従って、任意の D_f $(f \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W)$ は Macdonald-Koornwinder 多項式の定義に用いた D と可換とである。パラメータが generic ならば D の $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ での固有空間はすべて 1 次元なので、任意の D_f が、Macdonald-Koornwinder 多項式を固有函数にもつ。実際、各 dominant weight $\lambda \in P^+$ に対して、character $\chi_\lambda : \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W \to \mathbb{K}$ が定まり、

$$D_f . P_\lambda(x) = \chi_\lambda(f) P_\lambda(x) \quad (f \in \mathbb{K}[\tau^{\pm 1}]^W)$$

なる関係式が得られる。character $\chi_\lambda(f)$ の具体形は

$$\chi_\lambda(f) = f((t_0 t_n)^{\frac{1}{2}} t^{n-1} q^{\lambda_1}, (t_0 t_n)^{\frac{1}{2}} t^{n-2} q^{\lambda_2}, \cdots, (t_0 t_n)^{\frac{1}{2}} q^{\lambda_n})$$

で与えられる。

References

[C] I Cherednik, *The Macdonald constant term conjecture*, IMRN **6** (1993), 165–177.

[Ma1] I.G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint (1988).

[Ma2] I.G. Macdonald, *Affine Hecke algebas and orthogonal polynomials*, Séminaire Bourbaki, 47ème année, 1994–95, no. 797.

[Ka] S. Kato, *R-matrix arising from affine Hecke algebra and its application to Macdonald's q-difference operators*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 533–553.

[Ki] A.A. Kirillov Jr., *Lectures on the affine Hecke algebras and Macdonald conjectures, ftp from*: euler.math.ualberta.ca (/ftp/pub/hecke.tex).

[Ko] T.H. Koornwinder, *Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC*, Contemporary Math. **138** (1992), 189–204.

[NS] M. Noumi and T. Sugitani, *Quantum symmetric spaces and related q-orthogonal polynomials, ftp from*: euler.math.ualberta.ca (/ftp/pub/noumi-sugitani.tex).

[vD] J.F. van Diejen, *Families of commuting difference operators*, Ph.D. Thesis (University of Amsterdam) (1994).