数理解析研究所講究録
920巻 1995年 115-119

12.

近似代数その1 – 近似多項式の四則演算

佐々木 建昭 (筑波大数学系)

12.1 はじめに

筆者は6年前に近似代数の概念を提唱し [1]、共同研究者とともに近似 GCD [2,3] や近似因数分解 [4,5]、多変数代数方程式の近似べき級数解法 [6,7] などの算法を考案してきた。数値計算や応用分野では近似計算は主流をなす計算法であるが、そこでの近似とは「正確な計算の模擬計算」、すなわち「近似は精度が高いほど良い」というものである。一方、近似代数では、多項式や有理式にノルムを定義し、ノルムが微小な項の不定性の範囲内で代数演算を扱う。したがって、微小項は小さいほどよいというものではなく、「この程度以下」というように、場合に応じて規定されるべきものである。近似演算の対象となる多項式を**近似多項式**と呼ぶ。近似多項式の数係数は近似数である必要はなく(もちろん、近似数であってもよいが)、ノルムが微小な項の不定性を許容するという意味である。

微小項の不定性を導入した場合、通常の代数演算の算法を少し修正すれば事足りると思えるが、実はそうではない。たとえば、従来の因数分解算法は最終的に Z_p 上の因数分解に帰着されるから、係数部に 10^{-14} 程度の誤差が入り込む(浮動小数の計算がそうである)だけで算法は破綻してしまう。この例が端的に示すように、近似代数では従来の代数がそのままでは通用せず、基礎から作り上げていかねばならない。本稿では、第一歩として、近似多項式の四則演算を議論する。

12.2 多項式のノルムと O 記号

多項式 $P(x)$ の係数の絶対値のなかで最大のものを P のノルムと定義し、$\|P\|$ と表す。

我々は近似代数で、近似の精度として 10^{-2} と 10^{-4} が区別できるような詳細な議論をしたいが、それには積 $G \cdot H$ のノルムの大きさをかなり精度よく評価することが必要である。数の大きさのオーダを表す記号として、Landau の O 記号がよく使われるが、それは極限値として 0, 有限値, ∞ の3値をとるものと定められているので、近似代数の議論には全く使えない。さて、多項式 G と H の積を F とするとき、比 $r = \|F\|/(\|G\| \cdot \|H\|)$ は F と G, H によって種々の値をとる。例外的に $r \ll 1$ となることはあるが、$r \gg 1$ となることはなく、多くの場合に r は1の周りに分布する。$r \ll 1$ となる場合、積 $G \cdot H$ において**組織的桁落ち** (systematic cancellation) が生じたという。r の上限を G と H に関わらない形で決めることはできるが、それは一般に近似代数には大きすぎて使えない。また、r の値を一般の場合に精度よく決めるのは理論的に極めて難しい。そこで、多くの場合に r の値が1の周りに分布することに注目して、$\|G \cdot H\|$ の $\|G\| \cdot \|H\|$ からのずれを r の分布の分散で平均的に評価することにする。こうすれば、小さい確率で評価値が狂うことはあっても、平均的には程良い評価値が得られる。

以下では、積 $G \cdot H$ において組織的桁落ちが生じない場合に対して、積のノルム $\|G \cdot H\|$ はノルムの積 $\|G\| \cdot \|H\|$ と**同じ程度**の大きさであるとし、それを O **記号**で $\|G \cdot H\| = O(\|G\| \cdot \|H\|)$ と表すことにする。組織的桁落ちを考慮すると、一般には $\|G \cdot H\| \le O(\|G\| \cdot \|H\|)$ となる。上述したように、O 記号は比 r の分布の分散と解釈するから、G と H の項数に依存することになる。このように O 記号を使うことにより、以下の議論は極めて簡素なものとなる。

12.3 近似の精度… acc 記号

多項式 Fの数係数が誤差を含み、誤差の上限が $\varepsilon \ll 1$ であるとき、Fの精度は ε であるという。多項式 Fと G が $\|F - G\| \le \varepsilon$ を満たすとき、Fと G は精度 ε で等しいといい、次のように表す。

$$\|F - G\| \le \varepsilon \ll 1 \quad \Longleftrightarrow \quad F = G \ \ (\mathrm{acc}\ \varepsilon)$$

多項式 $F_1, \ldots, F_r$ に代数演算 Op を施し、その結果が精度 ε で G に等しいとき、近似演算 Op は精度 ε で G になるといい、次のように表す。

$$\mathrm{Op}(F_1, \ldots, F_r) = G \quad (\mathrm{acc}\ \varepsilon)$$

12.4 従来の除算算法の破綻

多項式 G と Hの精度がそれぞれ ε_G と ε_H のとき、和 $G + H$ の精度は $\max\{\varepsilon_G, \varepsilon_H\}$ となり、

積 $G \times H$ の精度は $\max\{\|G\|\varepsilon_H, \|H\|\varepsilon_G\}$ となる。和と積の演算は従来の算法で行なえばよい。

ところが、従来の除算算法は近似多項式に対しては破綻する場合がある。たとえば、除多項式 G はノルムが1で主係数が小さく、全ての係数に $O(\varepsilon)$ の誤差が含まれているとしよう。G の主係数を $\mathrm{lc}(G) = \eta \ll 1$ とすれば、主係数の精度は相対的に $O(\varepsilon/\eta)$ しかない。F/G に対する従来の除算算法は G の主係数で Fの高次項を割って消去していくものゆえ、$\mathrm{lc}(G)$ の精度が不足している場合、結果はたちまち誤差だらけとなる。さらに、$F = GH \pmod{\mathrm{acc}\ \varepsilon}$ で、$\varepsilon < |\mathrm{lc}(G)|, |\mathrm{lc}(H)| \ll 1$, $|\mathrm{lc}(G)| \cdot |\mathrm{lc}(H)| = 0 \quad (\mathrm{acc}\ \varepsilon)$ の場合、$\deg(F) < \deg(G) + \deg(H)$ となってしまう … これを次数低下 (degree-decreasing) と呼ぶ。このような場合、従来の除算算法は全く破綻する。

12.5 キャンセル数(cancel number)

数ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ に対し、ノルム $\|\mathbf{u}\|$ を次式で定義する。

$$\|\mathbf{u}\| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{|u_1|, \cdots, |u_n|\}$$

n 次元の数ベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$、ただし $m \le n$、が数 $c_1, \ldots, c_m$ に対し次式を満たすとする。

$$\begin{cases} c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = (0, \ldots, 0) \quad (\mathrm{acc}\ \varepsilon), \\ \max\{|c_1|, \cdots, |c_m|\} = 1/\max\{\|\mathbf{u}_1\|, \cdots, \|\mathbf{u}_m\|\}. \end{cases}$$

上式を満たす ε のうち、値が最小のものを $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ のキャンセル数 (cancel number) と名付け、$\mathrm{canc}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ と表す。上式は近似線形従属関係である。実際、$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ が線形独立な場合、上式が $\varepsilon = 0$ に対して成立することはないが、$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ が微小項を除いて線形従属である場合、その微小項の精度で近似的に線形従属関係が成立する。キャンセル数については次の定理が成立する。

定理 12.5.1. $m \le n$ とし、U を n 次元の数ベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ を行とする $m \times n$ の数値行列とする。U に対し完全ピボッティング Gauss 消去法により列消去を行なった結果を U' とすると、

$$U' = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & u'_{1n} \\ & u'_{22} & u'_{23} & \cdots & \cdots & u'_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & u'_{mm} & \cdots & u'_{mn} \end{pmatrix}$$

と表される。このとき $\mathrm{canc}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m)$ は次式で与えられる。

$$\mathrm{canc}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m) = \frac{O(\|m\text{th row of } U'\|)}{\max\{\|\mathbf{u}_1\|, \ldots, \|\mathbf{u}_m\|\}}. \quad \square$$

12.6 近似多項式の除算算法

多項式 F, G, H の間には $F = GH$ (acc ε), $\varepsilon \ll 1$ なる関係が成立するとし、F と G を与えて商 H を計算することを考える。F, G, H を以下のように表す。

$$\begin{cases} F(x) = f_l x^l + f_{l-1} x^{l-1} + \cdots + f_0, \\ G(x) = g_m x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \cdots + g_0, \\ H(x) = h_n x^n + h_{n-1} x^{n-1} + \cdots + h_0. \end{cases}$$

本稿では簡単のため、F, G, H は 1 変数多項式で、$\deg(F) = \deg(G) + \deg(H)$ のとき（すなわち次数低下が生じないとき）のみを扱うが、この制限は本質的なものではない。

$n+1$ 個の l 次元数ベクトル $\mathbf{g}_n, \cdots, \mathbf{g}_0$ を次のように定める。

$$\begin{cases} \mathbf{g}_n & = & (\ g_m,\ \ldots,\ g_0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\ ) \\ \mathbf{g}_{n-1} & = & (\ 0,\ g_m,\ \ldots,\ g_0,\ 0,\ \ldots,\ 0\ ) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{g}_0 & = & (\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ g_m,\ \ldots,\ g_0\ ) \end{cases}$$

$\mathbf{f} = (f_l, f_{l-1}, \cdots, f_0)$ とおくと、関係式 $F = GH$ (acc ε) は次のように表せる。

$$\mathbf{f} - h_n \mathbf{g}_n - \cdots - h_0 \mathbf{g}_0 \ = \ (0, 0, \ldots, 0) \quad (\text{acc } \varepsilon)$$

これは l 次元ベクトル $\mathbf{f}, \mathbf{g}_n, \cdots, \mathbf{g}_0$ に対する近似線形従属関係であり、次の定理が成立する。

定理 12.6.1. 関係式 $F = GH$ (acc ε) において、$\|G\| = 1$ として G を固定した場合、H の不定性 ΔH は $\|\Delta H\| \le \varepsilon / \mathrm{canc}(\mathbf{g}_n, \cdots, \mathbf{g}_0)$ を満たす。（H の不定性 ΔH とは $F = GH = G \cdot (H + \Delta H)$ (acc ε) を満たすものである。） □

定理 12.6.2. $n+2$ 個の l 次元数ベクトル $\mathbf{f}, \mathbf{g}_n, \cdots, \mathbf{g}_0$ を行とする $(n+2) \times l$ 行列を U とする：$U = (\mathbf{f}, \mathbf{g}_n, \cdots, \mathbf{g}_0)^T$. U の第 2 行以下（すなわち $\mathbf{g}_n, \cdots, \mathbf{g}_0$）を使い、完全ピボッティング Gauss 消去法により U の列消去を行なえば、$F = GH$ (acc ε) を満たす H を計算できる。 □

12.7 おわりに

上記の定理の証明は論文 [8] を参照されたい。同論文は、1 変数のみならず多変数多項式の除算も扱い、また次数低下が生じる場合の算法も与えている。さらに、剰余のある除算 $F = GH + R$ (acc ε) も扱っている。この場合も、商と剰余の不定性はキャンセル数で規定できる。

除算における不定性のみならず、因数分解や GCD などの代数演算においても、因子の不定性の上限や演算の最小精度が問題になるが、それらもキャンセル数で規定できることを論文 [9] は示している。

参考文献

[1] 佐々木建昭：近似的代数計算、数理研講究録、Vol. 676 (1988), 307–319.

[2] T. Sasaki and M-T. Noda, Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. J. Inf. Proces., **12** (1989), 159–168.

[3] T. Sasaki and M. Sasaki, Analysis of accuracy decreasing in polynomial remainder sequence with floating-point number coefficients. J. Inf. Proces., **12** (1989), 394–403.

[4] T. Sasaki, M. Suzuki, M. Kolář and M. sasaki, Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing. Japan J. Indus. Appl. Math., **8** (1991), 357–375.

[5] T. Sasaki, T. Saito and T. Hilano, Analysis of approximate factorization algorithm I. Japan J. Indus. Appl. Math., **9** (1992), 351–368.

[6] T. Sasaki and F. Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba and Nara Women's Univ., Jan. 1993, 22 pages (submitted).

[7] T. Sasaki, T. Kitamoto and F. Kako, Error analysis of approximate power series roots of multivariate algebraic equation. Preprint of Univ. Tsukuba and Nara Women's Univ., March 1994, 30 pages (submitted).

[8] T. Sasaki, A study of approximate polynomials, I – representation and arithmetic –. Japan J. Indus. Appl. Math., **12** (1995) (in press).

[9] T. Sasaki, A study of approximate polynomials, II – properties of approximate divisors –. Preprint of Univ. Tsukuba, Dec. 1994.