数理解析研究所講究録
921巻 1995年 1-8

回転円盤流における二種類の不安定性について

航技研　伊藤信毅（Nobutake Itoh）

1．はじめに

最近筆者[1)]は、後退翼上の三次元境界層において、流線曲率の存在そのものに基づく新しい遠心力型不安定が発生することを発見した。本論文では、その解析手法を回転円盤流の問題に適用し、この流れにおいても流線曲率不安定が発生し得るかどうかを調べる。

2．攪乱方程式と境界条件

静止流体中に置かれた半径の十分大きい円盤が一定角速度 ω_D で反時計方向に回転している場合を考え、円盤の表面から一様速度の吸込みが行われているものとする。吸込み速度は、無次元パラメター a_s を用いて、$v_z(0)=-a_s\sqrt{\nu\omega_D}$（$\nu$ は動粘性係数）と表わされる。円盤と同じ回転角速度で回転する円筒座標系を用い、外部非粘性流の速度 Q_E と境界層厚さ δ

$=\sqrt{\nu/\omega_D}$ を用いて諸量を無次元化するとき、局所レイノルズ数は $R=Q_E\delta/\nu$ で定義される。基本流と微小な波動型撹乱を重ね合せて連続の式とナビエ・ストークス方程式に代入すれば、線形撹乱方程式が導かれる。本論文では、厳密な偏微分撹乱方程式を、その主要項だけ残すことによって、簡単な常微分型モデル方程式に帰着させる。後退翼境界層の安定解析における考察[1)]に従い、回転円盤流では境界層厚さが変化しないことを考慮すると、モデル方程式は次式で与えられる。

$$[(\alpha^2+\beta^2)\{\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)\}-2\alpha\beta\kappa(U-1)]u$$

$$-[i\alpha\{\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)\}D$$

$$+\beta(\beta U'-\alpha V')]w=0,$$

$$[\{\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)\}(D^2-\alpha^2-\beta^2)$$

$$+i(\alpha U''+\beta V'')]w-2i\beta\kappa\{(U-1)D+U'\}u=0. \qquad (2.1)$$

ただし、$D=d/d\zeta$、基本流は $U=-G(\zeta)$, $V=F'(\zeta)$と表わされ、関数$F(\zeta)$および$G(\zeta)$は常微分方程式

$$F'''+2FF''-(F')^2+(1+G)^2=0,\quad G''+2FG'-2F'(1+G)=0,$$

$$F(0)-a_s/2=F'(0)=G(0)=F'(\infty)=G(\infty)+1=0 \qquad (2.2)$$

の解である。また、αとβは局所的な境界層厚さδで無次元化された周方向と半径方向の波数、ωは複素数で、その実部

が振動数を、虚部が時間的増幅率を表わす。回転円盤流では、流れ場の曲率を表わすパラメター κ がレイノルズ数Rの逆数に等しくなるが、本論文では仮想的に両者を独立な量として扱う。

境界条件は、適当な高さに境界層の外縁 $\zeta=\zeta_e$ を設定し、そこでの接合条件を考慮すると、つぎのように表わされる。

$$u = w = w' = 0 \quad \text{at} \ \zeta = 0,$$

$$u' + \rho_1 u - \frac{i\alpha}{\rho_2^2}(w'' + \rho_1 w') = 0,$$

$$w''' + (2\rho_1 + \rho_2) w'' + \rho_1(\rho_1 + 2\rho_2) w' + \rho_1^2 \rho_2 w = 0,$$

$$w'' + (\rho_1 + \rho_2) w' + \rho_1 \rho_2 w = 0 \qquad \text{at} \ \zeta = \zeta_e, \qquad (2.3)$$

但、$\rho_1 = (\alpha^2 + \beta^2 - i\omega R + i\alpha R)^{1/2}$, $\rho_2 = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ である。

以上の方程式と境界条件で定義される固有値問題は、複素振動数 ω を波数 α と β、レイノルズ数Rおよび基本流に含まれるパラメター a_s、流線曲率 κ の関数として定める。なお境界層外縁 ζ_e の適切な位置は、予備計算の結果にしたがって $\zeta_e=10$ に選ばれた。

3．曲率の効果に関する検討

この節では、レイノルズ数Rと流線の曲率 κ を互いに独立なパラメターとして扱う。実際の回転円盤流では $R=\kappa^{-1}$ の関

係が成り立つから、計算結果のうちこの関係を満たすものだけが現実の流れ場に対して意味を持ち、それ以外の結果は仮想的な流れに対するものである。また、横流れの強さを自由に変えるために、物体表面から一様な吸い込みのある場合を考える。流れの安定特性を定量的に表わす最も簡単で有意義な量は臨界レイノルズ数であるから、以下では臨界レイノルズ数の吸込み量a_sと流線曲率κに対する変化を調べる。

図1にはa_sをいくつかの値に固定した場合についてR_cのκに対する変化を示した。細い点線は $R_c=\kappa^{-1}$ の曲線で、臨界曲線がこの点線と交わるときに、その値が現実の回転円盤流における臨界値を与える。破線は横流れ不安定に対する臨界曲線を表わす。特に$a_s=0$, $\kappa=0$の点ではオル・ゾンマーフェルト方程式から得られる臨界レイノルズ数$R_c=177$に一致する。$a_s=0$に対する破線はκに対して単調に上昇し、点線と交わる点で、現実の回転円盤流に対して流線曲率の効果を含めた臨界値$R_c=250$に達する。すなわち、回転円盤流においては、流線曲率が横流れ不安定に対して安定化の効果をもたらす。一方、実線は横流れ不安定とは明らかに異なるもう一つの不安定性が存在することを示す。この新しい臨界曲線はκが0に近づくにつれてR_cが急激に大きくなる性質を表わし、κが小さいところでは $R_c=\kappa^{-1}$ 曲線より下方に、κが十分大きいと

ころではそれより上方に位置する。これらの曲線は吸込みa_sを増すと比較的緩やかに上昇し、$R_c = \kappa^{-1}$曲線との交点で与えられる現実的な臨界レイノルズ数はそれに伴って高くなる。

図2にはκを一定にしたときのR_cをa_sに対して描いた。横流れ不安定の臨界値は吸込みに対して二次関数のような急激さで高くなるが、これは横流れ速度が小さくなると流れが安定になることを表わす。壁面からの吸込みが横流れ不安定を抑制するのに極めて有効であることを示している。実線の方はこれに比べてずっと緩やかな増加を示し、新しい不安定性が横流れの強さにそれほど敏感でないことを意味している。

図1の実線はほぼ$\sqrt{\kappa}\ R_c$=const.で特徴づけられる。この

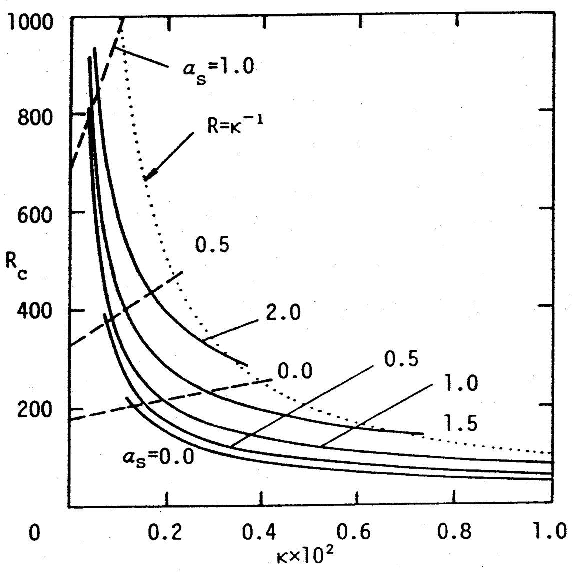

図1．臨界レイノルズ数の曲率に対する変化

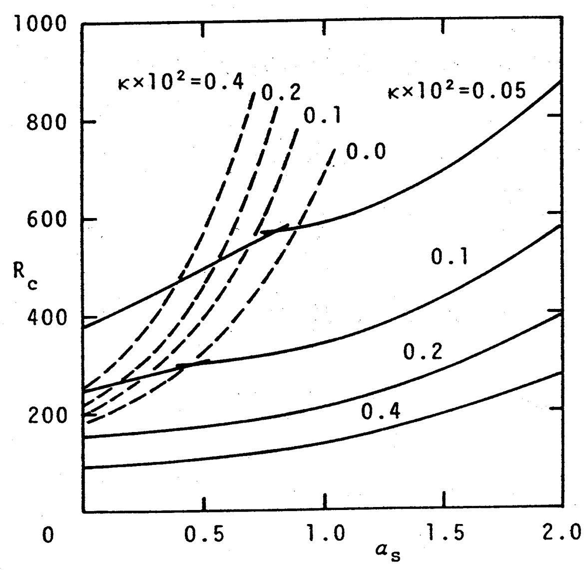

図2．臨界レイノルズ数の吸い込みに対する変化

事実は、第二の不安定性が、ゲルトラー不安定と同様に、曲率に支配されたものであることを意味する。実際この不安定攪乱を記述する攪乱方程式において、曲率項が本質的な役割を果たしていることを示す他の証拠も見い出されている。

4．回転円盤上の増幅攪乱の特性

ここでは実際の回転円盤流を考えて、$R=\kappa^{-1}$ の条件を課したときの吸込みのない流れの安定特性を議論する。既に見たように、回転円盤流では横流れ不安定と流線曲率不安定が発生する。流線曲率不安定の臨界レイノルズ数は非常に低いために、本研究が対象としている100 以上のレイノルズ数領域では既に増幅攪乱が現れている。したがってレイノルズ数が横流れ不安定の臨界値R_cより低いところでは流線曲率不安定から生じる攪乱だけが存在し、R がR_cを超えると二つの異なるタイプの攪乱が共存する状態になる。そこで本節では、各レイノルズ数において最大増幅率を与える攪乱と、R を固定したときの波数平面上における中立安定曲線の形状を調べる。

図 3 には最大増幅率を持つ攪乱の波数と振動数のレイノルズ数に対する変化を示してある。波数αとβの計算結果から、円盤を一周する間に存在する波の個数 n $(=\alpha R)$と波頭の円周方向となす角度ϕを知ることができる。横流れ攪乱では R が

300から600に変る間にnは30から59に変化し、ϕは約16°に固定されている。これに対して、流線曲率攪乱では$n=7\sim3$、$\phi=-7°\sim-2°$となって、両者の間には大きな違いがある。さらに回転数との比$\hat{f}=2\pi f/\omega_D$ $(=\omega_r R)$で表わした振動数でも、横流れ攪乱は流線曲率攪乱と逆符号のやや小さい値を持つ。

図4にはいくつかのレイノルズ数に対して中立曲線を重ねて描いた。Rが横流れ不安定の臨界値以下の場合には流線曲率不安定に対する中立曲線だけが存在し、R=200ではそれがαとβの正の領域を中心にかなり大きな範囲を占めているが、Rが増すにつれてその領域は緩やかに縮小する。これに対して、横流れ不安定は臨界値を越えると急激に領域を拡げ、臨

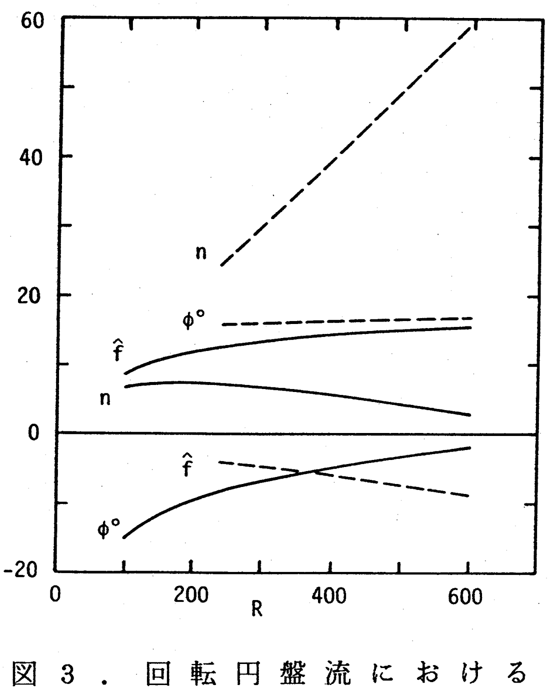

図3．回転円盤流における最大増幅率攪乱の性質

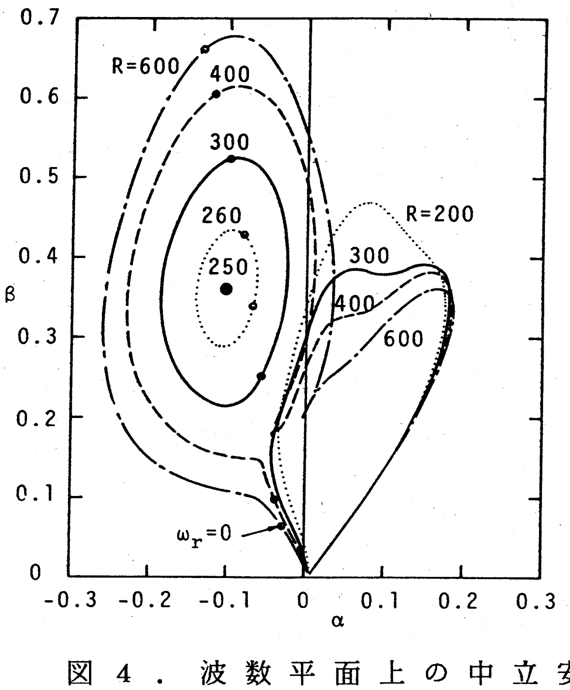

図4．波数平面上の中立安定曲線

界点を中心とした同心の楕円形状を示す。Rが400では二つの中立曲線は一部分で接続し、それぞれの増幅領域の形状をほぼ維持しながら一本の曲線に退化する。このような中立曲線の形状は、既にいくつかの文献[2,3]に与えられているものとほとんど同じであり、'parallel'不安定と呼ばれていたものが流線曲率不安定であることを意味する。

5．むすび

回転円盤流には全く性質の異なる二種類の不安定性が存在する。その一つは横流れ不安定で、曲率の影響は二義的である。もう一つの不安定は後退翼境界層の研究で発見された流線曲率不安定に属するもので、遠心力が不安定の力学機構に本質的な役割を果たす。従来の 'parallel' 不安定は後者と同じものである。

参考文献

1) Itoh,N. (1994) Fluid Dyn. Res. 14, 353-366.

2) Lilly,D.K. (1966) J.Atmos.Sci. 23, 481-494.

3) Faller,A.J. (1991) J.Fluid Mech. 230, 245-269.