

## 一様乱流における圧力場の統計

名工大 日比野 豊 (Yutaka Hibino)

名工大 後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

### 1 Introduction

二点間の速度差  $|\delta \mathbf{v}(l)|$  は乱流のsmallスケール ( $l \ll L$ ,  $L$  はエネルギーインプットのスケール) を特徴づける. 流体の運動は慣性力, 圧力勾配, 粘性力の釣合によって決まるが, 一般に乱流のsmallスケール ( $1/k_d \ll l \ll L$ ) でのダイナミクスに重要なのは圧力勾配である. 流体の非圧縮性を保ちながら, 圧力勾配は流体を加速したり変形させたりする. 圧力はポアソン方程式の解として与えられ, 積分核を通して速度場のlargeスケールに支配される量であるが, ソース項は速度勾配の二次で表されるため, 圧力場の統計は non-Gaussian になる. 圧力場の統計が重要になる例として Lagrangian velocity auto-correlation がある. 簡単のために  $\nu = 0$  として, 十分に小さい  $t-s$  で展開すると, [1][3]

$$R_L(t, s) = \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(s) \rangle = C_0 + \frac{1}{2} C_2 (t-s)^2 + \dots, \quad t \geq s. \quad (1)$$

ここに,

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \int_0^\infty E(k, s) dk, \\ C_2 &= -\langle (\nabla p(\mathbf{x}, s))^2 \rangle = -\int_0^\infty k^2 P(k, s) dk \\ &= -\int \frac{\langle D(\mathbf{k}, s) D(-\mathbf{k}, s) \rangle}{k^2} d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$D(\mathbf{k}, s) = k_i k_j \iint_{\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}} d\mathbf{p} d\mathbf{q} u_i(\mathbf{p}, s) u_j(\mathbf{q}, s), \quad (3)$$

$$\langle p^2(\mathbf{x}, s) \rangle = \int_0^\infty P(k, s) dk. \quad (4)$$

(2) 式は  $R_L(\tau)$  の初期の曲率が圧力勾配に支配されていることを示している. 速度場が Gauss 分布に従うと仮定したときは次式で与えられる.

$$\begin{aligned} C_2^G &= -\langle (\nabla p(\mathbf{x}, s))^2 \rangle_G = -\int_0^\infty k^2 P_G(k, s) dk \\ &= -\int_0^\infty dk \int_0^\infty dq k q J_d \left( \frac{q}{k} \right) E(k, s) E(q, s). \end{aligned} \quad (5)$$

$$J_3(x) = \left\{ (a^2 - 1)^2 \log \frac{1+a}{|1-a|} - 2a + \frac{10}{3} a^3 \right\} / (2a^4), \quad a = \frac{2x}{1+x^2}, \quad (3-D)$$

$$J_2(x) = \begin{cases} 3x - x^3, & x < 1, \\ 3/x - 1/x^3, & x \geq 1. \end{cases} \quad (2-D)$$

一方,  $R_L(\tau)$  は乱流拡散において重要な量である. すなわち, テイラーの拡散理論では, 定常一様乱流中の時刻  $\tau = t - s$  における拡散係数  $K$  は次のように表される.

$$K(\tau) = \int_0^\tau \langle \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{v}(\tau') \rangle d\tau' = \int_0^\tau R_L(\tau') d\tau'. \quad (6)$$

$K$  は  $R_L(\tau)$  の積分で表される量である. したがって, もし  $|C_2|$  が  $|C_2^G|$  より大きければ,  $R_L(\tau)$  は速く減衰し, Navier-Stokes (N-S) の拡散係数は Gaussian 理論のそれより小さくなると考えられる. これは流体粒子が周囲の流体と混合して初期の情報を失う時間が短いことを意味する. この意味において, 圧力勾配の統計は乱流における輸送係数と結び付いている.

本研究では Gotoh & Rogallo (1994) による三次元一様定常乱流における結果を参考にして, 新たに二次元一様定常乱流の直接数値計算を行ない, 圧力と圧力勾配の統計について, 同じエネルギースペクトルをもった turbulent field と Gaussian field の比較,  $R_\lambda$  依存性, 3次元 (Gotoh & Rogallo, 1994) と 2次元の比較を行なった.

## 2 Numerical simulation

速度場は三次元, 二次元ともに低波数での forcing による一様等方性定常乱流である. Forcing は三次元については速度に対して積の形で  $\alpha(k, t)$  が, 二次元については渦度に対して和の形で  $F_\omega$  が入っている. さらに, 二次元の場合には低波数へのエネルギーの逆カスケードを抑えるために drag term  $d\nabla^{-2}\omega$  が加わっている.

[3-D] (CTR data base<sup>[2]</sup>)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 - \alpha(k, t) \right) u_i(\mathbf{k}, t) = M_{ilm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k}} u_l(\mathbf{p}, t) u_m(\mathbf{q}, t),$$

$$\alpha(k, t) = \begin{cases} c(t), & \text{for low wavenumber,} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$M_{ilm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [k_m P_{il}(\mathbf{k}) + k_l P_{im}(\mathbf{k})],$$

$$P_{il}(\mathbf{k}) = \delta_{il} - k_i k_l / k^2.$$

格子数

$$N^3 = 256^3 \text{ for } R_\lambda = 172, 96,$$

$$N^3 = 128^3 \text{ for } R_\lambda = 63,$$

$$N^3 = 64^3 \text{ for } R_\lambda = 38.$$

[2-D] (present)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= F_\omega + d\nabla^{-2}\omega + \nu \nabla^2 \omega, \\ \nabla^2 \Psi &= -\omega, \end{aligned}$$

$F_\omega$  : Gaussian force ( $4 \leq k \leq 6$ , white noise in time),

$$d = \begin{cases} c, & \text{for } k \leq 3, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

初期条件:  $\omega(\mathbf{x}) = 0, \quad (t = 0)$

格子数

$$N^2 = 2048^2 \text{ for } R_\lambda = 42,$$

$$N^2 = 1024^2 \text{ for } R_\lambda = 25,$$

$$N^2 = 512^2 \text{ for } R_\lambda = 19.$$

本研究での  $R_\lambda$  の定義は次のとおりである.

$$R_\lambda(t) = \frac{\{\Omega(t)\}^{3/2}}{\eta(t)}, \quad (2-D),$$

$$R_\lambda(t) = \frac{\lambda_3(t) \cdot u(t)}{\nu}, \quad \lambda_3(t) = \sqrt{\frac{5E(t)}{\Omega(t)}}, \quad (3-D).$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk \quad : \text{ Total energy per unit mass,}$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \langle |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk \quad : \text{ Enstrophy,}$$

$$\eta(t) = 2\nu \int_0^\infty k^4 E(k, t) dk \quad : \text{ Enstrophy dissipation rate.}$$

圧力場はスペクトル法 (de-aliased spectral methods) で求めている.

### 3 Result

#### *Turbulent field (2-D & 3-D)*

数値計算によって得られた二次元定常乱流のエネルギースペクトルを Fig.1.(a) に示す. 独立変数を  $\bar{\eta}$  を使ってスケールリングしている. 100 ステップ毎に得られたスペクトルを重ねて描いてあり, スペクトルの時間的変化を見ることができる. この図から定常性は良好であることがわかる.

スケールリング則に関しては Kolmogorov 理論と同様な次元解析によって得られる慣性領域スペクトル  $E(k) \propto k^{-3}$  は  $R_\lambda = 42$  に於いても実現していない.

Fig.1.(b) に三次元定常乱流のエネルギースペクトルを  $R_\lambda = 96$  の場合について示す. この図もあるステップ毎に得られたスペクトルを重ねて描いてあり, 定常性は良好であることがわかる.

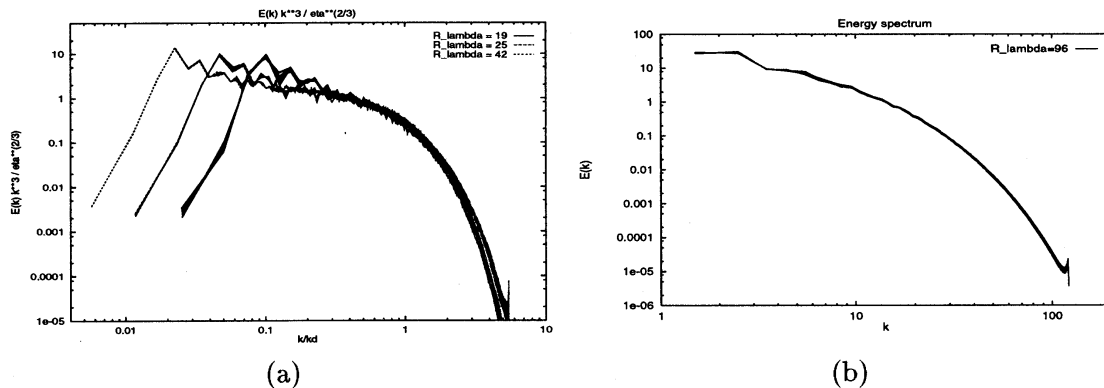


Fig.1. (a) スケールリングされたエネルギースペクトル (2-D):  $\eta^{-2/3} k^3 E(k)$ ; 各  $R_\lambda$  について 100 step 毎に plot した. (b) エネルギースペクトル (3-D):  $E(k)$ ; 十分離れた時刻毎に plot した ( $R_\lambda = 96$ ).

#### *One-point one-time statistics (3-D pressure field)*

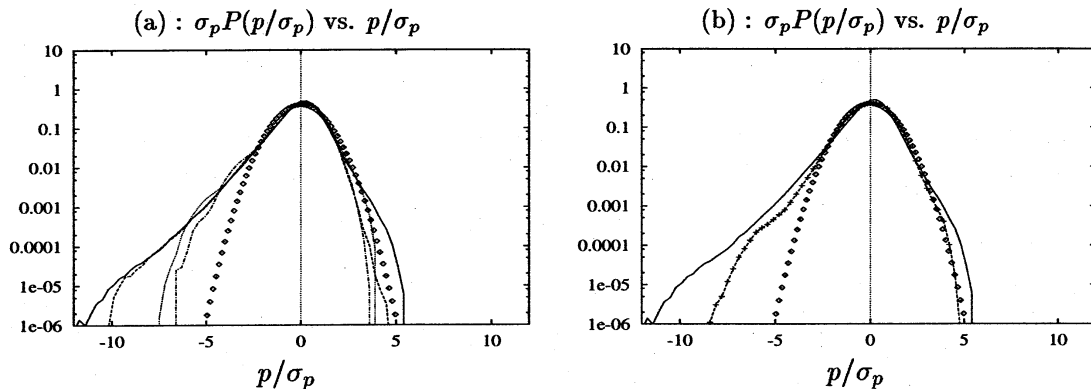


Fig.2. 圧力  $p$  の pdf (3-D). (a) 各  $R_\lambda$  について plot (N-S field). — :  $R_\lambda = 172$ , ---- :  $R_\lambda = 96$ , ..... :  $R_\lambda = 63$ , —— :  $R_\lambda = 38$ ,  $\diamond$  : Gaussian. (b) N-S field vs. Gaussian velocity field; — : N-S field ( $R_\lambda = 172$ ), +---- : Gaussian field,  $\diamond$  : Gaussian.

三次元乱流 (N-S field) における圧力の pdf を Fig.2.(a) に示す. 分布は正負非対称であり, 圧力変動が負の領域では漸近的に exponential form  $P(p) \propto \exp(-a|p/\sigma_p|^\alpha)$  に近くなる. ここに  $a$  は無次元定数,  $\alpha$  は 1 よりわずかに小さい値. 分布の tail は  $R_\lambda$  が大きくなるに従って長く伸びているが,  $\alpha$  の値は  $R_\lambda$  に対してあまり変化しない. 圧力変動が正の領域では Gauss 分布に近く,  $R_\lambda$  に対する変化はほとんど見られない. N-S field と同じエネルギースペクトルを持った Gaussian velocity field における圧力の pdf を Fig.2.(b) に示す. N-S field とほぼ同じ傾向を示しているが, 負の領域の tail は N-S ほど伸びていない.

圧力勾配  $p_{,i}$  ( $\equiv \frac{\partial p}{\partial x_i}$ ) の 1 成分の pdf を Fig.3.(a) に示す. 分布は対称で tail は  $R_\lambda$  が大きくなるに従って長く伸びている. Fig.3.(b) に  $R_\lambda = 172$  における圧力勾配 3 成分の分布と Gaussian field から得られる圧力勾配 3 成分を示す. 圧力勾配は等方的である. しかし, N-S field と Gaussian velocity field の差は顕著であり, N-S field における分布の tail は漸近的に stretched exponential form  $P(p_{,i}) \propto \exp(-b|p_{,i}/\sigma_{p_{,i}}|^\beta)$ , ( $b$  は無次元定数,  $0 < \beta < 1$ ) に書け, tail が長く伸びている部分に対して  $\beta \sim 1/2$  である. これは三次元乱流における圧力勾配は非常に間欠的である (Gauss 分布からずれている) ことを示している [2].

#### One-point one-time statistics (2-D pressure field)

二次元乱流における圧力の pdf を Fig.4.(a) に示す. 三次元と同じように正負非対称である. 分布の負の領域は exponential tail になるが, 今回調べた  $R_\lambda$  の範囲では tail の伸び方に  $R_\lambda$  の依存性は見られなかった. Gaussian field (Fig.4.(b)) においても傾向は同じであるが, N-S より tail の伸びは短い. 圧力変動が正の部分は発達が弱く Gauss 分布にも達していない. むしろ, 平均の近くのピークが目立つ. N-S field と同じエネルギースペクトルを持つ Gaussian field も同様の傾向がある.

圧力勾配 2 成分の pdf を Fig.5.(a) に示す. 分布は対称で等方的である. しかし, 三次元と大きく違い, N-S field における分布の tail は  $P(p_{,i}) \propto \exp(-a'|p_{,i}/\sigma_{p_{,i}}|^{\alpha'})$  で,  $R_\lambda$  依存性もほとんど見られない. Gaussian field (Fig.5.(b)) も同様な傾向であるが, 分布の tail の伸びが弱く, より Gaussian に近い.

#### Two-points one-time statistics (3-D pressure field)

スケーリングされた圧力勾配のスペクトルを Fig.6.(a) に示す. 同時にスケーリングされたエネルギースペクトルが示されている. エネルギースペクトルのスケーリングは良いが, 圧力勾配スペクトルについて良いスケーリングを得るには  $R_\lambda^{1/2}$  の補正が必要である.

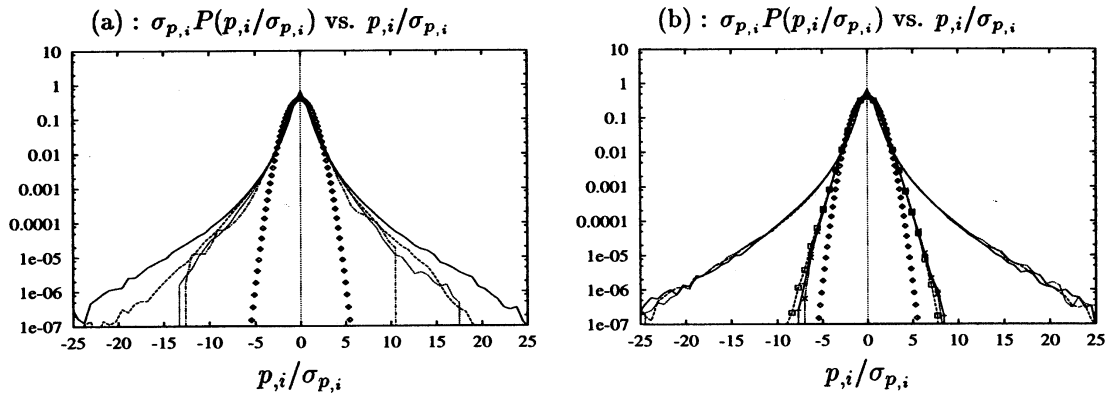


Fig.3. 圧力勾配  $p_i$  の pdf (3-D). (a) 各  $R_\lambda$  について1成分. (N-S field) — :  $R_\lambda = 172$ , ---- :  $R_\lambda = 96$ , ..... :  $R_\lambda = 63$ , — — :  $R_\lambda = 38$ ,  $\diamond$  : Gaussian. (b) N-S field vs. Gaussian velocity field; — :  $\partial p/\partial x$ , ---- :  $\partial p/\partial y$ , ..... :  $\partial p/\partial z$  for N-S ( $R_\lambda = 172$ ); + — :  $\partial p/\partial x$ ,  $\square$  ---- :  $\partial p/\partial y$ ,  $\times$  ..... :  $\partial p/\partial z$  for Gaussian field;  $\diamond$  : Gaussian.

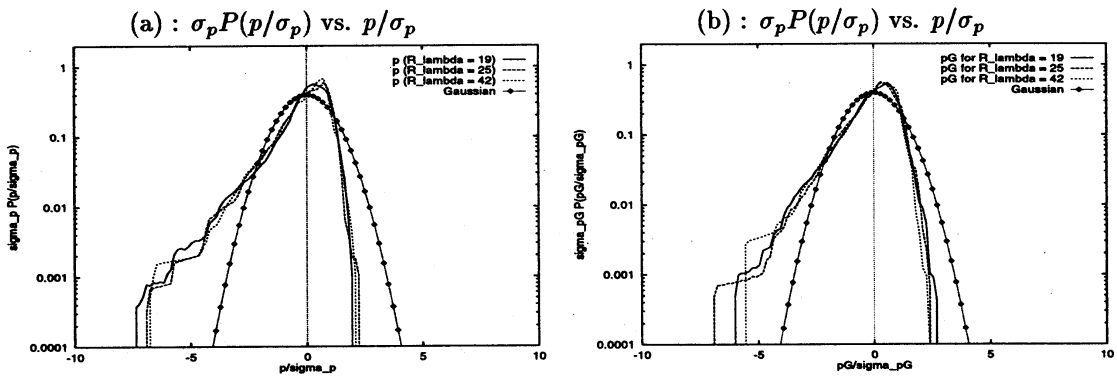


Fig.4. 圧力  $p$  の pdf (2-D). (a) N-S field. (b) Gaussian velocity field.

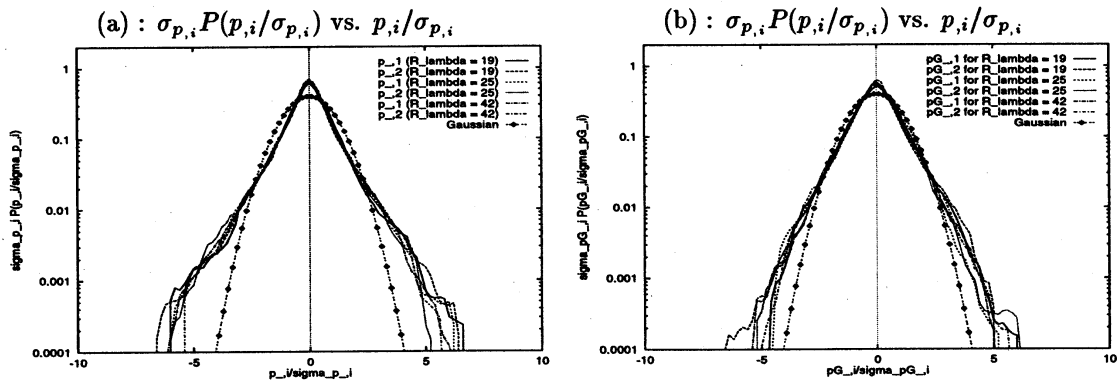


Fig.5. 圧力勾配  $p_i$  の pdf (2-D). (a) N-S field. (b) Gaussian velocity field.

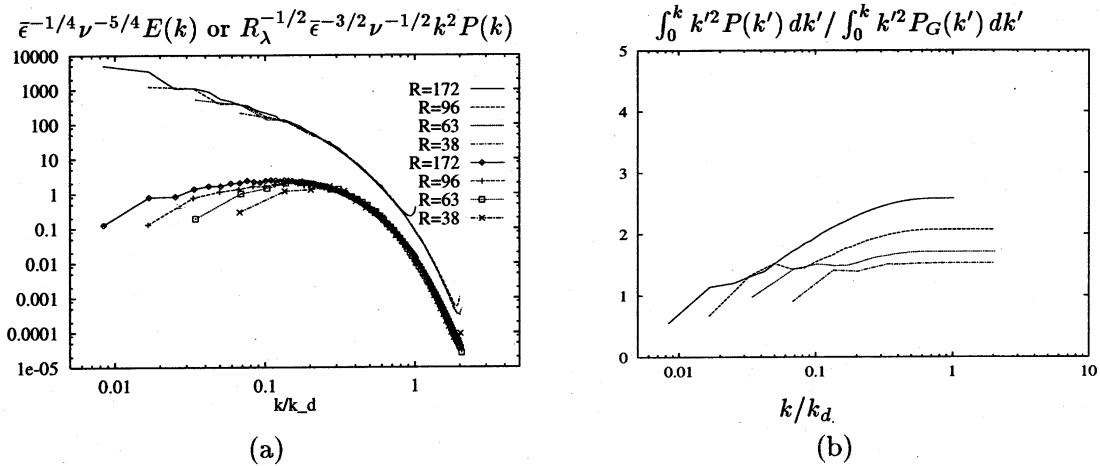


Fig.6. (a) スケーリングされたエネルギースペクトル (3-D)(上) :  $\bar{\epsilon}^{-1/4} \nu^{-5/4} E(k)$  と 圧力勾配のスペクトル (3-D)(下) :  $R_\lambda^{-1/2} \bar{\epsilon}^{-3/2} \nu^{-1/2} k^2 P(k)$ . (b) 圧力勾配スペクトルの Ratio function (3-D) :  $F_3(k) = \int_0^k k'^2 P(k') dk' / \int_0^k k'^2 P_G(k') dk'$ ; — :  $R_\lambda = 172$ , ---- :  $R_\lambda = 96$ , ..... :  $R_\lambda = 63$ , - - - :  $R_\lambda = 38$ .

圧力勾配の Ratio function を次のように定義する.

$$F_3(k) = \int_0^k k'^2 P(k') dk' / \int_0^k k'^2 P_G(k') dk'. \quad (7)$$

従って,  $F_3(k_{max})$  は  $\frac{\langle (\nabla p)^2 \rangle}{\langle (\nabla p)^2 \rangle_G}$  を意味する. Fig.6.(b) に Ratio function  $F_3(k)$  を示す.  $R_\lambda$  が大きくなるに従って一定値に達するまでの  $k$  は大きくなっている. これは,  $R_\lambda$  が大きくなるにつれ Gaussian field よりも N-S の方がより小さなスケールで圧力勾配が重要であることを示している. 即ち, Lagrangian velocity auto-correlation の初期の曲率は N-S の方が Gaussian field よりも大きく,  $R_\lambda$  と共に増大していることを示している.

圧力のスペクトルを Fig.7.(a) に示す.  $P(k)$  が外力を受けている波数を除いた全波数で  $P_G(k)$  を上回っている. 圧力スペクトル ratio を次のように定義し, Fig.7.(b) に示す.

$$K_1(k) = \frac{P(k)}{P_G(k)}. \quad (8)$$

$R_\lambda^{1/2}$  の補正により  $k/k_d \leq 1/2$  の範囲で良く一致し,

$$K_1(k) \simeq \alpha_3 R_\lambda^{-1/2} \log \left( \frac{k}{k_d} \right) + \beta_3, \quad k/k_d \leq 1/2 \quad (9)$$

の関係がある. 傾き  $\alpha_3$  は 対数正規分布の理論 (Kolmogorov 1962, Oboukhov 1962) から

$$\alpha_3 = \frac{2\mu}{9}, \quad (10)$$

と与えられ,  $\mu$  として 0.2 ~ 0.25 の値を与えると良く一致する.

#### Two-points one-time statistics (2-D pressure field)

スケーリングされた圧力勾配のスペクトルを Fig.8.(a) に示す. 二次元の場合は  $R_\lambda$  による補正なしでスペクトルのスケーリングは良い. 三次元 (Fig.6.(a)) は圧力勾配スペクトルがフラットであるのに対して, 二次元は forcing の波数帯より高い波数で勾配が急であり, 低波数で支配的であることがわかる. 圧力勾配の Ratio function  $F_3(k)$  (Fig.8.(b)) は低波数で一定値に落ち着いて

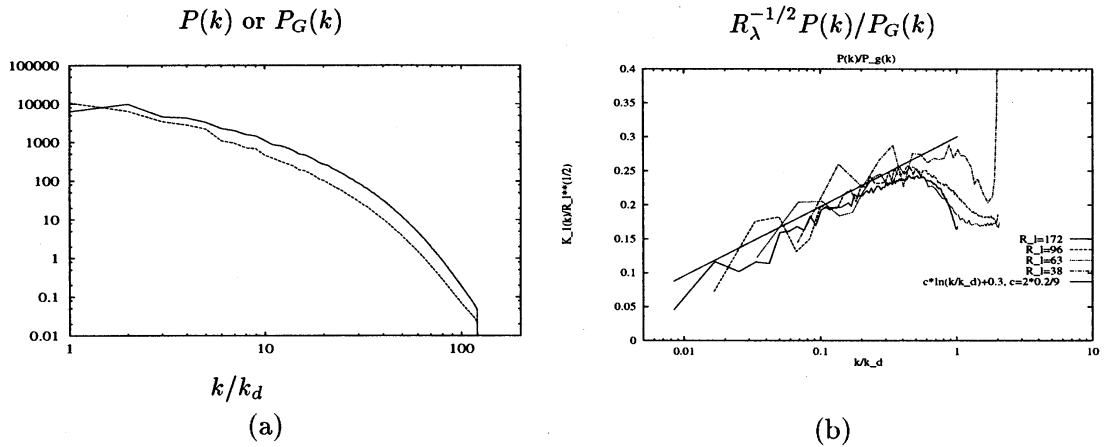


Fig.7. (a) 圧力スペクトル (3-D) :  $P(k)$  or  $P_G(k)$  — :  $P(k)$  , ---- :  $P_G(k)$ . (b) 圧力スペクトル ratio (3-D) :  $R_\lambda^{-1/2} K_1(k)$ .

いる。これは圧力勾配の分散への寄与がほとんどスペクトルの低波数成分から来ると、低波数での分布がほぼ Gaussian であるためであると考えられる。  $F_3(k_{max})$  の  $R_\lambda$  依存性はほとんど見られない。したがって、Lagrangian velocity auto-correlation の初期の曲率は N-S と Gaussian で三次元ほどの大きな違いはないと思われる ( $R_\lambda \leq 42$ )。

圧力スペクトルを Fig.9.(a) に示す。三次元と傾向が逆で  $P(k)$  が  $P_G(k)$  の下になっている。その比をとったのが Fig.9.(b) で、傾きは負であり、 $R_\lambda$  による補正なしで良く一致し、 $k/k_d > 1$  の波数まで伸びている。従って、 $K_1(k)$  は次のように表される。

$$K_1(k) \simeq \alpha_2 \log(k/k_d) + \beta_2. \tag{11}$$

傾きは  $\alpha_2 \sim -0.19$  であったが、説明はついていない。

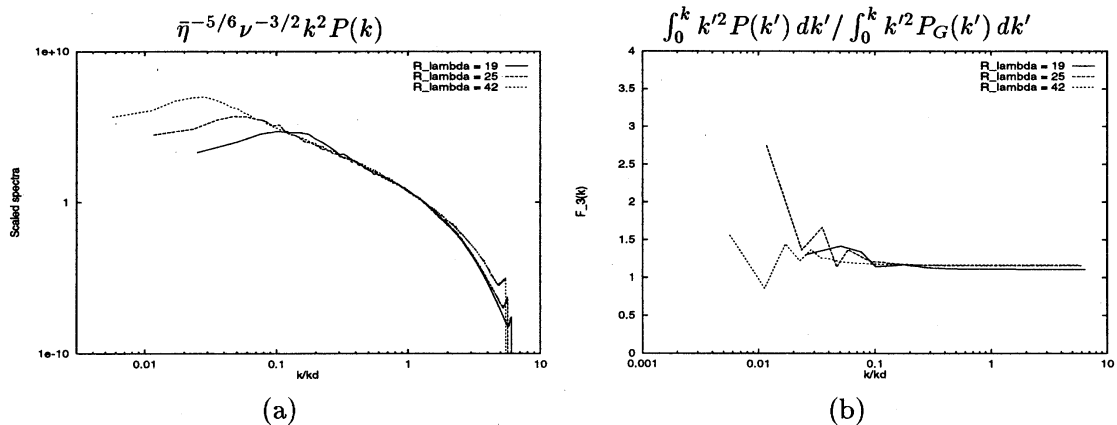


Fig.8. (a) スケーリングされた圧力勾配スペクトル (2-D) :  $\bar{\eta}^{-5/6} \nu^{-3/2} k^2 P(k)$ . (b) 圧力勾配スペクトルの Ratio function (2-D) :  $F_3(k) = \int_0^k k'^2 P(k') dk' / \int_0^k k'^2 P_G(k') dk'$

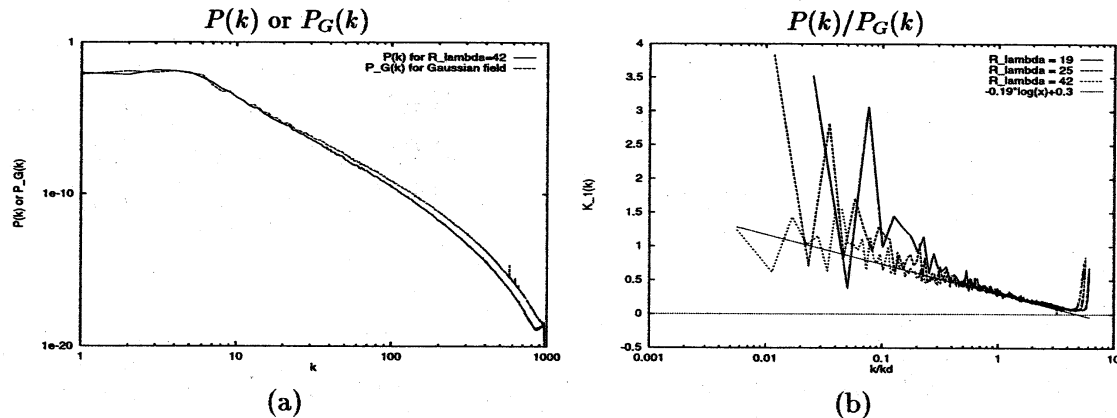


Fig.9. (a) 圧力スペクトル (2-D) :  $P(k)$  or  $P_G(k)$ . (b) 圧力スペクトル ratio (2-D) :  $K_1(k)$

#### 4 Conclusions

本研究では新たに二次元等方定常乱流を数値計算によって実現し、その圧力と圧力勾配の統計を調べ、三次元の場合 (Gotoh & Rogallo, 1994) と比較した。

三次元において圧力勾配の pdf は N-S field では tail が stretched exponential form になり、Gaussian velocity field との間に顕著な違いがあるが、二次元の場合には N-S field の tail は exponential form であり、Gaussian field との差は小さかった。

二次元での圧力勾配の Ratio function  $F_3(k) = \int_0^k k'^2 P(k') dk' / \int_0^k k'^2 P_G(k') dk'$  の値は低波数で一定値に落ち着いており、 $R_\lambda$  によってあまり変化しないことがわかった ( $R_\lambda \leq 42$ )。

二次元における圧力スペクトルは  $P(k)$  が  $P_G(k)$  が三次元と逆で下になっていた。また、その比は  $P(k)/P_G(k) \simeq \alpha_2 \log(k/k_d) + \beta_2$ ,  $\alpha_2 \sim -0.19$  の関係があり、三次元と違い  $R_\lambda$  の依存性はなく ( $R_\lambda \leq 42$ )、傾きの説明もできていない。

圧力勾配の統計において二次元乱流の N-S field と Gaussian field と同じエネルギー・スペクトルを持つ Gaussian velocity field との間の違いが小さかった。これは、二次元乱流の渦運動が三次元に比べラージスケールが支配的であり、従って、圧力勾配もラージスケールに集中し、さらにラージスケールでの分布がほぼ Gaussian であるためであると考えられる。したがって、二次元乱流の圧力場の統計はある程度 Gaussian theory で近似できる。しかしながら、圧力スペクトルの比  $P(K)/P_G(k)$  は N-S field と Gaussian field の違いを示すものである。したがって、三次元のみならず二次元の結果も説明できるような Non-Gaussian theory の構築が今後の課題である。

#### 参考文献

- [1] T.Gotoh, R.S.Rogallo, J.R.Herring and R.H.Kraichnan, 1993, *Phys. Fluids*. **A5**, 2846.
- [2] T.Gotoh and R.S.Rogallo, 1994, "Statistics of pressure and pressure gradient in homogeneous isotropic turbulence," Center for Turbulence Research, *Proceedings of the Summer Program 1994* pp.184.
- [3] Y.Kaneda and T.Gotoh, 1991, *Phys. Fluids*. **A3**, 1924.
- [4] A.N.Kolmogorov, 1962, *J. Fluid Mech.* **13**, 82.
- [5] A.M.Oboukhov, 1962, *J. Fluid Mech.* **13**, 77.