

帯電した渦面および密度不連続面の巻上がり

名大工 沢田 正明
名大工 金田 行雄

1 はじめに

工業の多くの分野において、水銀や原子炉の冷却に用いられる溶融ナトリウムなどの液体金属がしばしば使用されている。これらの流体は高い電導性を持つという性質から、電場などを加えて駆動・制御することが多いため、そのふるまいに興味を持たれる。

Taylor & McEwan[6] は上部に非電導性流体、下部に電導性流体から成る二層流体の界面の運動を調べ、鉛直方向に強い電場をかけたとき、界面が突起状に変形することを報告している。界面のふるまいに関する解析的な研究は、帯電していない場合には、その非線形性について最近多くの研究（例えば、Baker, Meiron & Orszag や Krasny など）がなされているが、帯電した場合に関するものは非常に少なく、界面の特異的な変形の様子を明らかにすることはできていない。そこで本研究では、非線形領域における帯電した界面の運動の特異性を明らかにすることを目的とし、重力場・電場中における、水平方向に周期性を仮定した上述の二層流体間の界面の運動を調べる。二種の流体は非粘性・非圧縮で、流体運動は渦なしを仮定し、界面での表面張力は無視する。

2 基礎方程式および境界条件

本研究では、鉛直方向に一様な外部電場が加えられたときの界面の運動を調べるわけであるが、速度ポテンシャルを Φ 、電気ポテンシャルを χ とすると各々の流体中において満たされる方程式は以下のようなになる。

流体 1（上部流体，非電導性流体）

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \nabla \Phi_1, & \Delta \Phi_1 &= 0 \\ \mathbf{E}_1 &= -\nabla \chi, & \Delta \chi &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

流体 2（下部流体，電導性流体）

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \nabla \Phi_2, & \Delta \Phi_2 &= 0 \\ \mathbf{E}_2 &= 0, & \chi &= \text{const} \end{aligned} \quad (2)$$

また、界面における境界条件として、次のように電場の大きさの 2 乗に比例する力が働く。

$$p_1 - p_2 = \frac{\epsilon}{2} \left| \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|^2 \quad (3)$$

ここで (3) の右辺は Maxwell 応力と呼ばれており、電場が導体表面（界面）と直交することから、界面はその上に誘起される電荷の正負に関せず、面に垂直に流体 1 側へ引張られる力を受ける。

$g, \lambda, \rho_{\{1,2\}}, q, \epsilon$ をそれぞれ重力加速度、周期的界面の波長、上下流体の質量密度、面電荷密度、上部流体の誘電率とし、それらが与えられたとき代表的電場の強さ E 、速さ V 、時間 T を以下のように定義する。ただし q は平均質量密度 $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ としたときに、 $q = \sqrt{g\lambda\bar{\rho}\epsilon}$ と表わされる量である。

$$E = \frac{q}{\epsilon}, \quad V = \sqrt{g\lambda}, \quad T = \frac{\lambda}{V} = \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \quad (4)$$

本研究では、これらの代表量を用いて上式の無次元化を行った。また電荷量 q_β が与えられたとき q との比をとり、無次元化電荷量 $Q = q_\beta/q = q_\beta/\sqrt{g\lambda\bar{\rho}\epsilon}$ を定義する。

3 数値計算法

界面 S が水平方向に周期的（ここではその周期を 1 とする）であると仮定する。 S 上の点の位置座標を $(x(\alpha, t), y(\alpha, t))$ とし、複素関数表示 $z = x + iy$ を用いると、運動は

$$\frac{\partial z^*}{\partial t}(\alpha, t) = \frac{1}{2i} p.v. \int_0^1 \cot \pi \{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)\} \gamma(\alpha', t) d\alpha' + \frac{AR}{2} \gamma(\alpha, t) \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^{-1} \quad (5)$$

で与えられる。ここで t は時間、 α は *Lagrangian parameter* である。 $*$ 、 $p.v.$ はそれぞれ複素共役、積分の主値を表わす。また AR は Atwood Ratio で $AR = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ で与えられる定数である。密度差がなく ($AR = 0$) 帯電もない場合には、(5) の渦度密度 $\gamma(\alpha, t)$ は時間に依存せず、(5) は Birkhoff-Rott 方程式に帰着される。密度差、帯電がある場合には、 $\gamma(\alpha, t)$ は時間に依存し、その進展は Maxwell 応力の項を含む非常に複雑な方程式に従う。帯電がない場合には、それはよく知られた方程式（例えば、Pullin[7]）になる。

ところで、Maxwell 応力の項に現われる電場 $E = -\partial\chi/\partial n$ は、 χ が界面上で一定であるという条件のもとで、各時刻の界面の形状により決定されねばならないが、その目的のために文献 [5] を参照し、等角写像と高速フーリエ変換を利用する方法を用いた。界面の形状 z は適当な写像関数を用いて $z = w(\zeta)$ と表わされる。ここで w は z を写像することにより得られる閉曲線、 ζ は単位円上の点を表わす。すなわち界面と単位円とを結びつける

わけである。この w を用いれば、電場を求める式は、界面に誘起される 1 周期あたりの帯電量を Q とすると、次のようになる。

$$E = -\frac{\partial\chi}{\partial n} = Q \left| \frac{w}{\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)} \right| \quad (6)$$

また、閉曲線 w と単位円 ζ が $w(\zeta) = w(e^{i\theta}) = \sum A_k e^{ik\theta}$ の形で結びつけられるので、 $\partial w/\partial \zeta = \sum k A_k e^{ik\theta}$ となり、 w が分かれば高速フーリエ変換によりフーリエ係数 A_k が求められ、それによって $\partial w/\partial \zeta$ も簡単に、効率良く計算できるメリットがある。

実際の数値計算においては、(5) などの主値積分における特異性を避けるために、Krasny[2] において導入されている δ (smoothing parameter) を用いた。これは数値計算上のパラメータであり、 $\delta \rightarrow 0$ で厳密式に近づく。

4 計算結果

数値計算では、(i) 密度差による影響をみるため上下流体が初期に静止している場合と (ii) 界面間の速度差および帯電量による影響をみるため上下流体が一定の速度差で運動している場合の二つの場合に関して、初期に界面に攪乱を与え、その発展を追った。初期条件は (i), (ii) のそれぞれについて以下の様においた。

$$z(\alpha, 0) = \alpha - i A \cos 2\pi\alpha, \quad \gamma(\alpha, 0) = 0, \quad (A = 0.1) \quad (7)$$

$$z(\alpha, 0) = \alpha + A(1 - i) \sin 2\pi\alpha, \quad \gamma(\alpha, 0) = 0, \quad (A = 0.01) \quad (8)$$

初期条件 (7), (8) はそれぞれ Rayleigh-Taylor, Kelvin-Helmholtz 不安定に関する研究において、よく知られているものである。本研究では以降この頭文字の略称を借り、(i) の場合を RT 型、(ii) の場合を KH 型と呼ぶことにする。この二つの場合の線形増幅率は、線形安定性解析により以下のように求まる。

$$RT \text{ 型: } \sigma = \pm \sqrt{\frac{k[kQ^2 - (\rho_2 - \rho_1)g]}{2}} \quad (9)$$

$$KH \text{ 型: } \sigma = \frac{-ikU(\rho_2 - \rho_1) \pm 2\sqrt{D}}{4} \quad (10)$$

$$D = \rho_1 \rho_2 k^2 U^2 - 2k[(\rho_2 - \rho_1)g - kQ^2]$$

ここで k, U はそれぞれ波数の絶対値、界面間の速度差を表わす。これから、帯電により界面に働く Maxwell 応力や速度差があることは不安定の効果を持ち、密度差による重力は $\rho_1 > \rho_2$ (上の流体が重い) の場合には不安定化、 $\rho_2 > \rho_1$ (下の流体が重い) の場合は安定化の効果を持つことが分かる。不安定を満たすパラメータ領域において行った解析を以下にまとめる。

- RT 型の場合

密度差の影響をみるため Q の値は 1.0 に固定し計算を行った。また空間刻み $N = 512$, 時間刻み $\Delta t = 0.005$ とした。 $AR = 0.5$ の場合を Fig.1 に示す。時間が経つにつれて Maxwell 応力により界面が盛り上がり, peak を生じている。 $t = 0.25$ において $AR = 0, AR = 0.5, AR = 0.75$ の 3 つの場合における界面の形状を並べたのが Fig.2 である。これより peak は同時刻でみれば, AR が大きい (密度差が大きい) ほど鋭くなっているのが分かる。また $AR = 0$ の場合, $t = 0.25$ 以降, Fig.3 にみられるように渦の集中領域 (spiral) もみられた。

- KH 型の場合

上下流体の速度差および帯電量による影響をみるため, 密度差のない場合 ($AR = 0$) についてのみ行った。初期に与えた滑らかな界面が臨界時間 t_c でその解析性を失うが, t_c の見積りについては Krasny[3] の導入した t_c^N を用いた。 t_c^N は, 時間発展を追っていったとき, 垂直 kink の生じる時間として定義され, これを N^{-1} の関数としてプロットする。そして, $N^{-1} \rightarrow 0$ におけるその曲線の収束点を t_c とするものである。この t_c と帯電量 Q の関係を $0 \leq Q \leq 1$ で 0.1 ごとに調べたのが Fig.4 である。帯電量の増加につれて t_c が早まることが分かった。また t_c 時において $Q = 0, 0.5$ の場合の渦層の強さ γ や曲率 κ と α の関係を見たのが Fig.5 である。帯電していない場合 ($Q = 0$) については, Krasny[3] において得られている結果と良く一致している。これと $Q = 0.5$ の違いは, 渦層の強さ γ のグラフで $\alpha \simeq 0.5$ の singularity 近傍において $Q = 0$ の場合と比べ, $Q = 0.5$ の場合は渦が強く集中していることである。 t_c 以後, 界面は spiral 形状を生じる。その時系列を Fig.6, 7 に示す。 $Q = 0$ の場合には対称性のある spiral ができるが, $Q = 0.5$ の場合には帯電には, それが崩れている。また, 界面の特異性について, spiral 部分への渦度の集中度合 fraction と時間 t の依存を調べたのが Fig.8 である。 $0.6 \leq t \leq 1.0$ において計測を行い, グラフは log-log プロットしてある。それぞれ fraction $\propto t^{3/2}$ (帯電していない場合: $Q = 0$), $\propto t^2$ (帯電している場合: $Q = 0.5$) という結果が得られた。すなわち, 帯電しているほうが spiral 部分への渦の集中が早く, 同時刻でみれば, その度合が強くなっていることが言える。

参考文献

- [1] Baker, G.R., Meiron, D.I. & Orszag, S.A. 1982 Generalized vortex methods for free-surface flow problems. *J.Fluid Mech.* **123**, 477-501
- [2] Krasny, R. 1986 Desingularization of periodic vortex sheet roll-up. *J.Comp. Phys.* **65**, 292-313
- [3] Krasny, R. 1986 A study of singularity formation in a vortex sheet by the point vortex approximation. *J.Fluid Mech.* **167**, 65-93
- [4] Krasny, R. 1987 Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane. *J.Fluid Mech.* **184**, 123-155
- [5] Meiron, D.I., Orszag, S.A. & Israeli, M. 1981 Application of numerical conformal mapping. *J.Comp. Phys.* **40**, 345-360
- [6] Taylor, G.I. & McEwan, A.D. 1965 The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field. *J.Fluid Mech.* **22**, 1-15
- [7] Pullin, D.I. 1982 Numerical studies of surface-tension effects in nonlinear Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instability. *J.Fluid Mech.* **119**, 507-532
- [8] 天谷 澄, 1990 電気流体力学的界面の運動, 名古屋大学工学研究科応用物理学専攻博士前期課程論文.
- [9] 工 益功, 1992 帯電した円柱状流体の電気流体力学的な運動, 名古屋大学工学研究科応用物理学専攻博士前期課程論文.

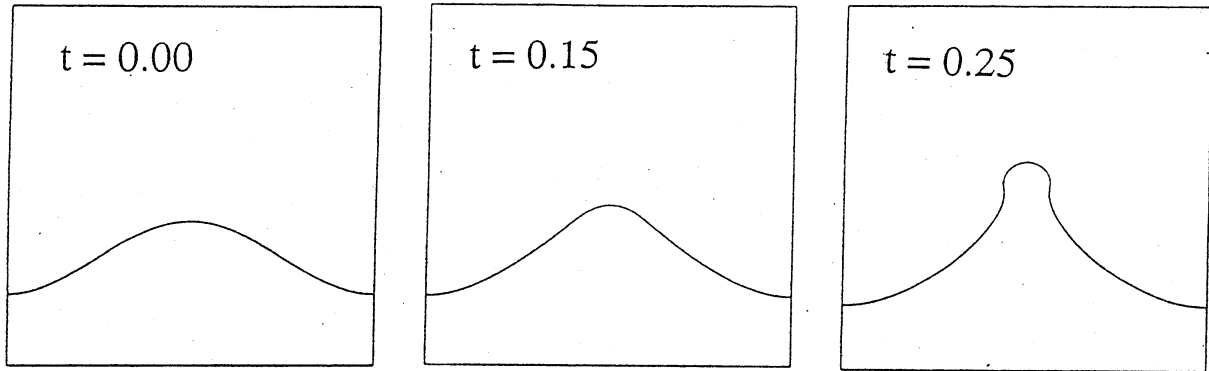


Fig.1 RT型 ($AR = 0.5$, $Q = 1.0$, $\delta = 0.025$)

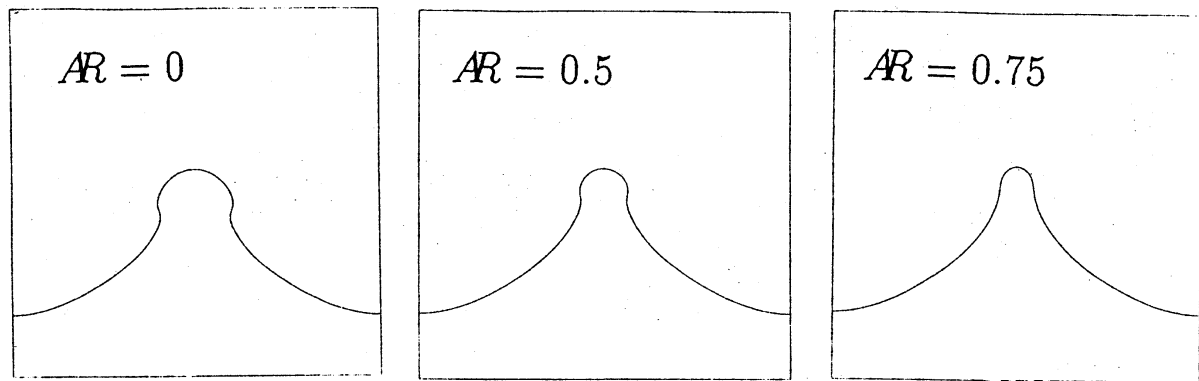


Fig.2 $t = 0.25$ における界面の形状の違い

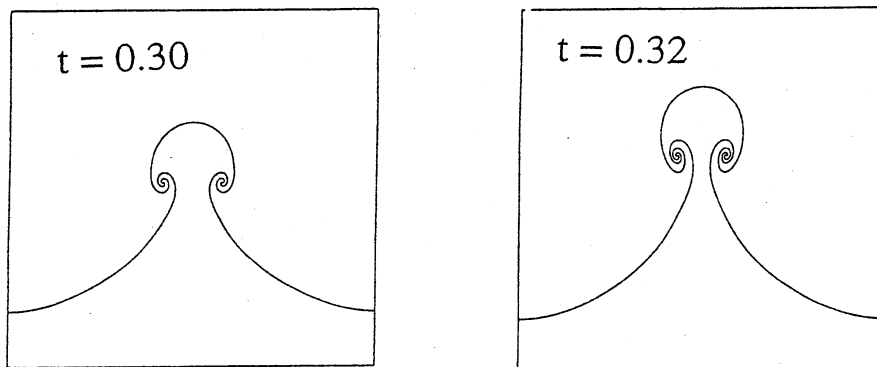
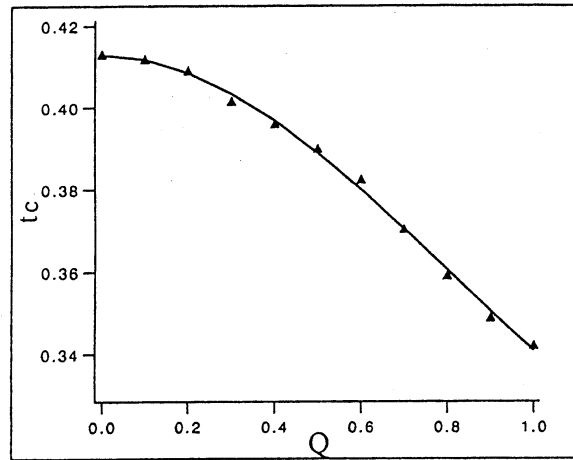
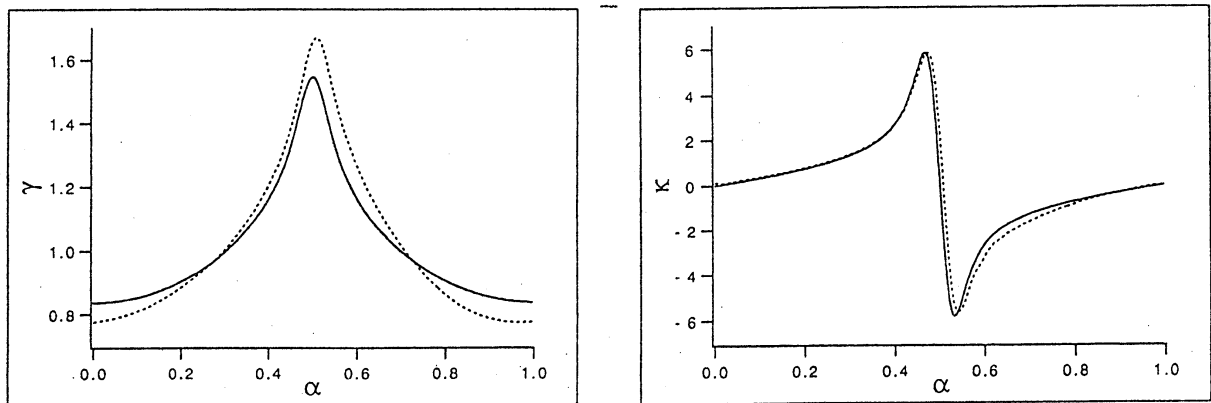
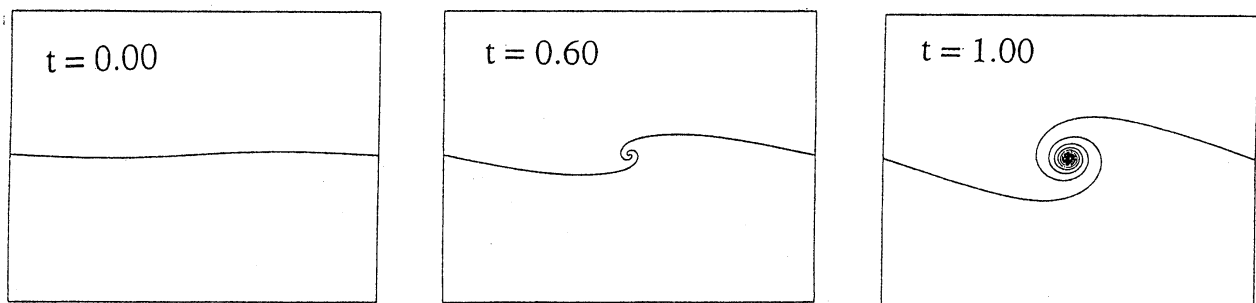


Fig.3 $AR = 0$ の場合, $t = 0.25$ 以後の時間発展

Fig.4 t_c と帯電量 Q の関係Fig.5 t_c 時における物理量 (実線： $Q=0$, 破線： $Q=0.5$)左図： γ (渦層の強さ) と α の関係右図： κ (渦層の曲率) と α の関係Fig.6 KH 型-(a) ($AR=0$, $Q=0$, $\delta=0.05$)

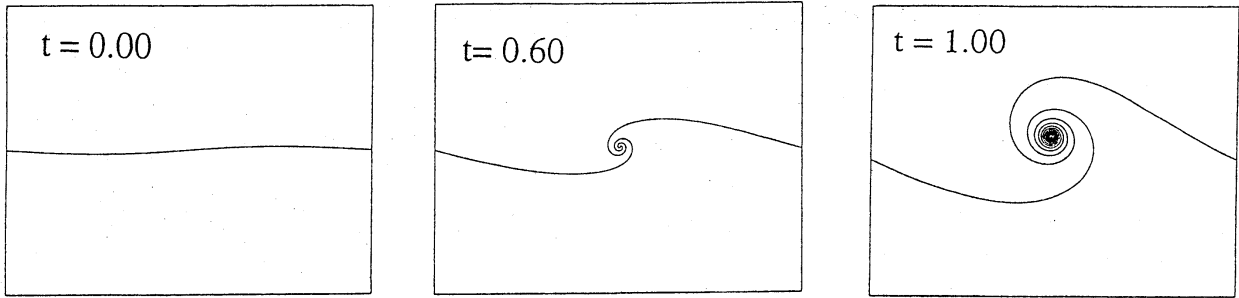


Fig.7 KH 型-(b) ($AR = 0$, $Q = 0.5$, $\delta = 0.05$)

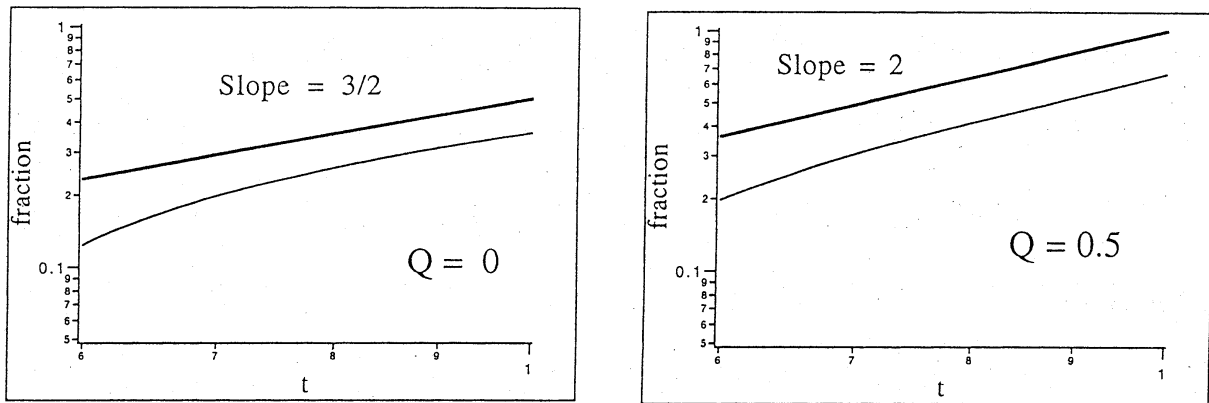


Fig.8 fraction の時間 t 依存