

## ヘリカルな曲がり円管内の流れとその安定性

岡山大・工 山本恭二, 柳瀬眞一郎

### Stability of the Flow in a Helical Pipe

Kyoji YAMAMOTO and Shinichiro YANASE

Faculty of Engineering, Okayama University

#### §1. 序論

曲がり管内の流れでは、流体が遠心力の作用によって、管軸方向に垂直な断面で回転する2次流れが引き起こされ、流体が攪拌される。このため、直管に比べ、熱伝達や、異種気体の混合が増進される一方、管摩擦係数は増大する。

曲がり管内流れについては、このような工業上の重要性から、古くから多くの研究者によって理論的・実験的な研究がなされており、近年では電子計算機の急速な進歩によって多くの数値解が得られている。いくつかの例を挙げれば、伊藤は境界層理論に基づく解析的研究<sup>1)</sup>を行っている。また、村上<sup>2),3)</sup>らは、曲率の流れに対する影響について実験を行っている。総合的な解説が、例えば、須藤<sup>4)</sup>、Berger et al.<sup>5)</sup>等によってなされている。

ヘリカルな曲がり管は、熱交換機や化学反応装置などに広く用いられていて、工学上特に重要である。それにもかかわらず、ヘリカルな形状を持つ曲がり管に対する捻れの効果の研究はその複雑さのため、これまであまり進んでいなかった。しかし、曲がり管内流に対して捻れがどのような影響を及ぼすかということは、物理的興味ばかりでなく、曲がり管内での熱や拡散あるいは圧力損失に関連した化学工学及び機械工学上の興味ある問題である。

最近になって Germano<sup>6)</sup> が、直交座標系でヘリカルな曲がり管内流の支配方程式を表現し、その式を用いた解析が行われるようになった<sup>7),8)</sup>。特に、Yamamoto et al.<sup>9)</sup> は、広い範囲の捻れ及び曲がりに対し、ヘリカルな曲がり管内流の数値解を求めた。また、Yamamoto et al.<sup>10)</sup> は、実験的研究によって、ヘリカルな曲がり管内流が捻れ度のある値の範囲において、非常に低いレイノルズ数で不安定となる事を発見した。本研究は、これらの数値的・実験的研究をふまえて、定常解の線形安定性を調べることによって実験結果を説明しようとするものである。

#### §2. 基礎方程式

ヘリカルな曲がり管に対して直交座標系を導入したのは Germano が最初であるが、同じ方法はそれ以前から、核融合プラズマに対して Mercier によって<sup>(11)</sup>、また渦管の力学に対して Moore and Saffman<sup>(12)</sup> と Callegari and Ting<sup>(13)</sup> によって用いられていた。図 1 に Germano の座標系とヘリカルな曲がり管を示す。

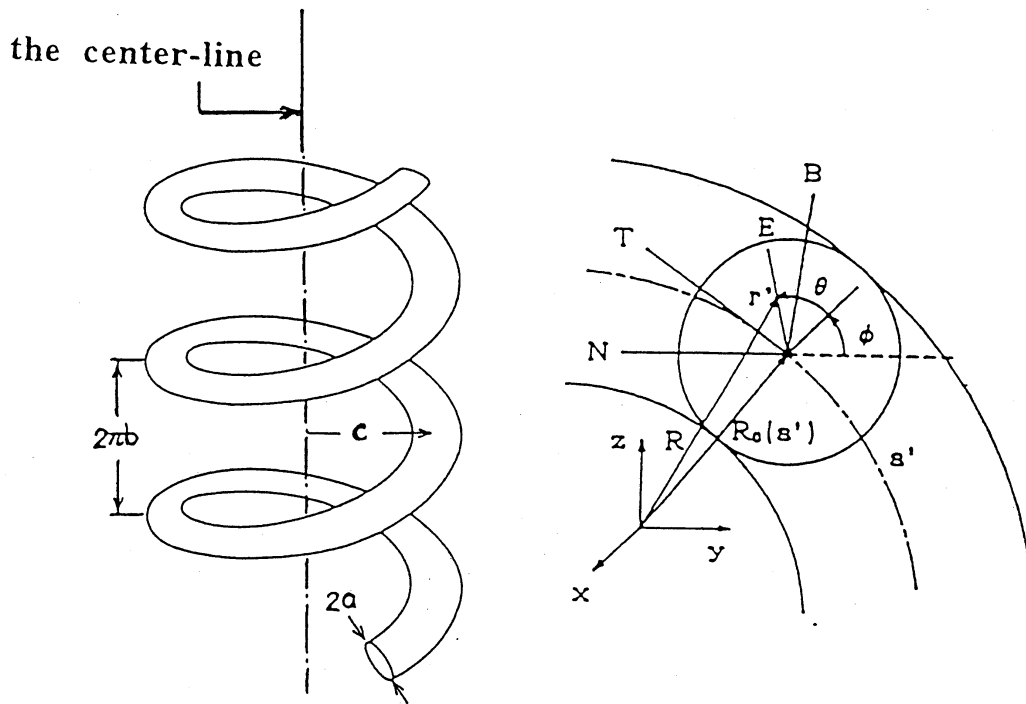


図 1. ヘリカルな曲がり管内流と Germano の座標系

連続の式及び Navier-Stokes 方程式を Germano の座標系に変換し、無次元化する。次に、管軸方向に流れが一様であると仮定して、Navier-Stokes 方程式から圧力項を消去すると、管断面内の 2 次流れに対する変形流れ関数  $\psi$  と軸方向速度  $w$  に関する 2 つの方程式が得られる（付録参照）。この時、以下に示す 3 つの無次元パラメータが現れる。

- ・ Dean 数 :  $D_n = Ga^3 \sqrt{2\delta} / (\mu\nu)$

( $G$  : 圧力勾配、 $\mu$  : 粘性係数、 $\nu$  : 動粘性係数、 $a$  : 管半径)

- ・ 無次元曲率 :  $\delta = a/L$  ( $L$  : 管の曲率半径)

- ・ 捻率・曲率比 :  $\beta_0 = \tau / \sqrt{2\delta}$  ( $\tau$  : 無次元捻率)

境界条件は

$$\psi = \partial\psi/\partial r = w = 0 \quad (r = 1)$$

となる。なお、Reynolds 数  $Re$  は、定常解が得られると

$$Re = \sqrt{2/\delta} \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} w d\alpha$$

で計算される。ここで  $\alpha = \theta + \phi$  は周方向の角度である。

変形流れ関数  $\psi$  と軸方向速度  $w$  によって、半径方向速度  $u$ 、周方向速度  $v$  は

$$u = \frac{1}{r\omega} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, \quad v = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \beta_0 \frac{rw}{\omega}$$

と表される。ここで  $\omega = 1 + \delta r \cos \alpha$  である。

### §3. スペクトル法と線形安定性

基礎方程式 (A-1, A-2) で時間変化項をゼロと置いた方程式の数値解は Yamamoto et al.<sup>9)</sup> によってスペクトル法を用いて得られている。その定常解を  $\bar{\psi}$ 、 $\bar{w}$  とし、流れ関数・軸方向速度に対する攪乱をそれぞれ  $\psi_m$ 、 $w_m$  とすると非定常解は

$$\psi(r, \alpha, t) = \bar{\psi}(r, \alpha) + \psi_m(r, \alpha, t),$$

$$w(r, \alpha, t) = \bar{w}(r, \alpha) + w_m(r, \alpha, t)$$

となる。これを基礎方程式へ代入し、攪乱の 2 次の項を無視すると、攪乱に対する線形方程式が得られる。

攪乱  $\psi_m$ 、 $w_m$  を

$$\psi_m(r, \alpha, t) = \hat{\psi}(r, \alpha) e^{\lambda t}, \quad (1a)$$

$$w_m(r, \alpha, t) = \hat{w}(r, \alpha) e^{\lambda t} \quad (1b)$$

と仮定し、 $\hat{\psi}(r, \alpha)$ 、 $\hat{w}(r, \alpha)$  を Fourier-Chebyshev 級数に展開する。

$$\hat{\psi} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M F_{nm}^s \Psi_{nm}(R) \sin n\alpha + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M F_{nm}^c \Psi_{nm}(R) \cos n\alpha, \quad (2a)$$

$$\hat{w} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M W_{nm}^s \Phi_{nm}(R) \sin n\alpha + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M W_{nm}^c \Phi_{nm}(R) \cos n\alpha, \quad (2b)$$

$$R = 2r - 1.$$

ここで関数  $\Psi_{nm}(R)$ 、 $\Phi_{nm}(R)$  は、 $m$  次の Chebyshev 多項式  $T_m(R)$  を用いて次のように定義される。

$$\Psi_{nm}(R) = (R-1)^2(R+1)^2 T_m(R) \quad (n \geq 2),$$

$$\Psi_{1m}(R) = (R-1)^2(R+1)(R+3) \quad (m=0),$$

$$\Psi_{1m}(R) = (R-1)^2(R+1)^2 T_{m-1}(R) \quad (m \geq 1),$$

$$\Psi_{0m}(R) = (R-1)^2(R^2+3R+3) \quad (m=0),$$

$$\Psi_{0m}(R) = (R-1)^2(R+1)^2 T_{m-1}(R) \quad (m \geq 1),$$

$$\Phi_{nm}(R) = (R-1)(R+1)T_m(R) \quad (n \geq 1),$$

$$\Phi_{0m}(R) = (R-1)(R+3) \quad (m=0),$$

$$\Phi_{0m}(R) = (R-1)(R+1)^2 T_{m-1}(R) \quad (m \geq 1).$$

$\lambda > 0$  なら攪乱は時間と共に成長し、定常解は不安定である。 $\lambda < 0$  なら攪乱は時間と共に減衰し、定常解は安定である。 $\lambda$  を求めるために攪乱 (1a)、(1b) を展開式 (2a)、(2b) の形で攪乱方程式へ代入する。さらに攪乱方程式が次の選点

$$R_i = \cos \frac{\pi i}{M+2} \quad (1 \leq i \leq M+1),$$

$$\alpha_j = 2\pi \frac{j-1}{2N+1} \quad (1 \leq j \leq 2N+1)$$

で成立すると仮定すると、 $\lambda$  は  $2(M+1)(2N+1)$  次の実行列の一般固有値問題の固有値として求める事ができる。計算には EISPACK の複素固有値のためのサブルーチン及び IMSL の一般複素固有値のためのサブルーチンを用いた。 $\delta = 0.01$  の場合では IMSL を用いないと解が求まらない場合が存在した。使用した計算機は Specfp92 が 80 程度のワークステーションである。

#### §4. 結果

$\delta = 0.01, 0.1$  に対して、 $0 \leq \beta_0 \leq 1.8$  の範囲で定常解の安定性を調べた。まず、表 1 に  $(Dn, \delta, \beta_0, R\epsilon) = (2400, 0.1, 1.0, 695), (2300, 0.1, 1.2, 770)$  の場合の固有値を、実部の大きい順に 5 つ並べたものを示す。 $M = 25, N = 20$  でほぼ収束が得られていることがわかる。

Dn=2400, $\delta=0.1$ , $\beta_0=1.0$ , Re=695					
N, M	eig1	eig2	eig3	eig4	eig5
15, 15	1.5175E+01	1.5175E+01	5.3413E+00	5.3413E+00	-5.6128E+00
	2.3279E+02	-2.3279E+02	2.0640E+02	-2.0640E+02	3.6450E+02
20, 20	7.2000E+00	7.2000E+00	-1.3685E+01	-1.3685E+01	-2.2876E+01
	2.0030E+02	-2.0030E+02	2.1760E+02	-2.1760E+02	-1.1430E+02
20, 25	6.8371E+00	6.8371E+00	-1.3476E+01	-1.3476E+01	-2.2929E+01
	1.9990E+02	-1.9990E+02	2.2000E+02	-2.2000E+02	1.1380E+02
25, 25	6.7369E+00	6.7369E+00	-1.3509E+01	-1.3509E+01	-2.2956E+01
	1.9990E+02	-1.9990E+02	2.2000E+02	-2.2000E+02	1.1380E+02
Dn=2300, $\delta=0.1$ , $\beta_0=1.2$ , Re=770					
15, 15	1.7894E+01	1.7894E+01	1.3931E+01	1.3931E+01	9.3722E+00
	8.1099E+01	-8.1099E+01	1.5189E+02	-1.5189E+02	3.7620E+02
20, 25	6.6390E+00	6.6390E+00	-4.2660E+00	-4.2660E+00	-1.1857E+01
	5.3765E+01	-5.3765E+01	2.0960E+02	-2.0960E+02	0
25, 25	6.6388E+00	6.6388E+00	-4.2440E+00	-4.2440E+00	-1.1855E+01
	5.3765E+01	-5.3765E+01	2.0973E+02	-2.0973E+02	0

表 1. 固有値の収束

Yamamoto et al. の実験によると<sup>10)</sup>、ヘリカルな曲がり管内流は不安定になり易く、場合によっては Reynolds 数が 800 程度で乱流へ遷移する事が示されている。線形安定性計算の結果はこれとほぼ定量的に一致している。図 2 (a), (b) にその結果を示す。図 1 は  $\delta = 0.01$  の場合、図 2 は  $\delta = 0.1$  の場合である。● は不安定、■ は安定の結果を示している。不安定になる Reynolds 数が  $\beta_0 > 0.6$  においてかなり低いことがわかる。なお、○ は実験による不安定な状態であり、□ は同じく安定な状態を示す。また、△ はどちらとも断定し難い状態である。

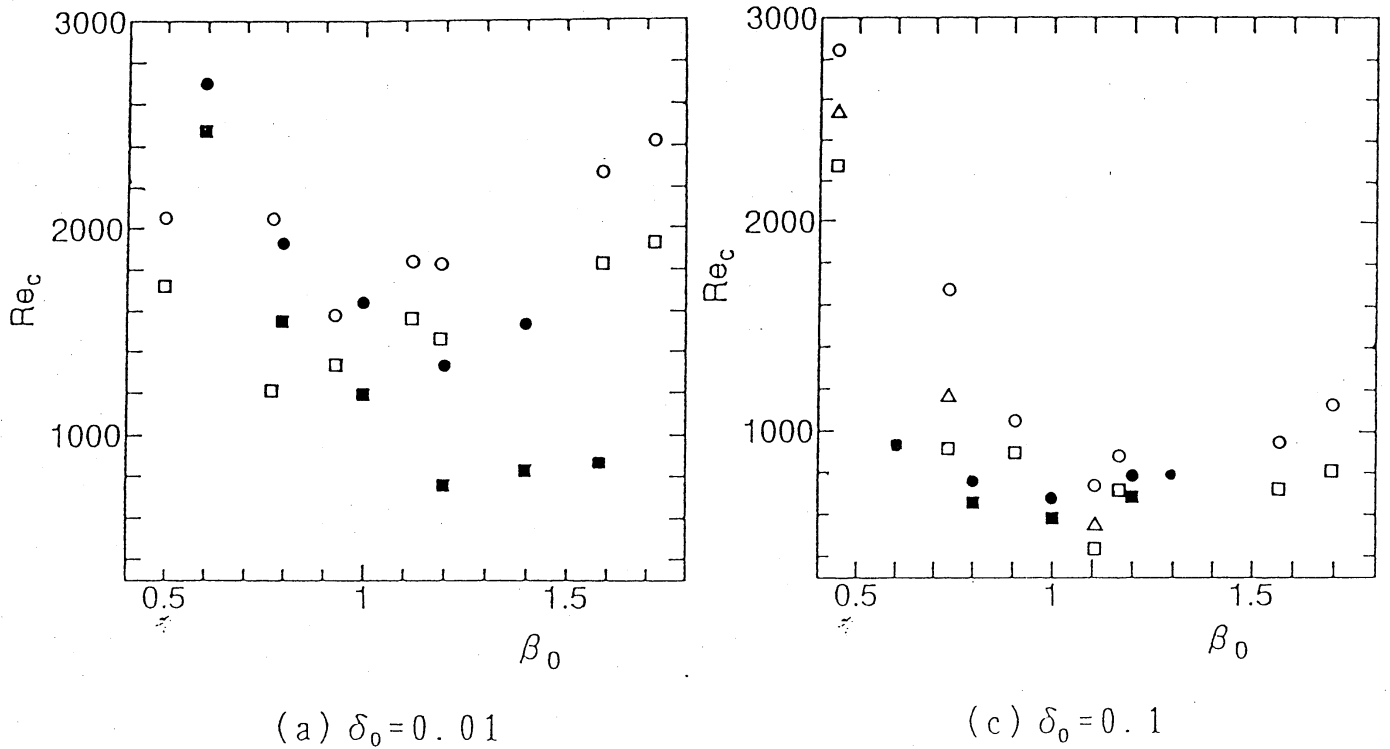


図 2(a) ( $\delta = 0.01$ ), (b) ( $\delta = 0.1$ ). 安定性 diagram

#### 参考文献

- 1) 伊藤英覚: 東北大学高速力学研究所報告 14 No.137 (1959).
- 2) 村上光清、森健二、佐野勝志: 日本機械学会論文集 (B) 37-296 (1971) 717.
- 3) 村上光清、末広億、大野正直: 日本機械学会論文集 (B) 39-324 (1973) 2546.
- 4) 須藤浩三: 機械の研究, 42 (1990) 1097.
- 5) S.A. Berger, L. Talbot and L.-S Yao: Ann. Rev. Fluid Mech. 15 (1986) 461.
- 6) M. Germano: J. Fluid Mech. 125 (1982) 1.
- 7) C.Y. Wang: J. Fluid Mech. 108 (1981) 185.
- 8) H.C. Kao: J. Fluid Mech. 184 (1987) 335.
- 9) K. Yamamoto, S. Yanase and T. Yoshida: Fluid Dynamics Res. 14 (1994) 259.

- 10) K. Yamamoto, T. Akita, H. Ikeuchi and Y. Kita: Fluid Dynamics Res. (to appear).  
 11) C. Mercier: Fusion Nucleaire **3** (1963) 89.  
 12) D.W. Moore and P.G. Saffman: Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A272** (1972) 403.  
 13) A.J. Callegari and L. Ting: SIAM J. Appl. Maths. **35** (1978) 149.

## 付録

$w$  と  $\psi$  に対する方程式:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\delta}{\omega} \left( \sin \alpha \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) w \\
 &\quad - D_n - \delta r (\cos \alpha) \Delta w + \frac{\delta^2}{\omega} w - \delta \Lambda w \\
 -\beta_0 &\left[ \frac{2\delta}{\omega} \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{2\delta^2 \sin \alpha}{r\omega^3} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)^2 + r^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right\} + \frac{2\delta}{r^2 \omega^2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{2\delta}{\omega^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} \right. \\
 &\quad - \left( \frac{2\delta^2 \sin \alpha}{r\omega^2} - \frac{3\delta^3 \sin 2\alpha}{\omega^3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \left( \frac{2\delta^2 \cos \alpha}{\omega^2} + \frac{6\delta^3 r \sin^2 \alpha}{\omega^3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} \\
 &\quad \left. + \frac{4\delta^2 \cos \alpha}{r\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{4\delta^2 \sin \alpha}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} - 2r\delta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{2\delta^2 r \cos \alpha}{\omega} \Omega \right] \\
 -\beta_0^2 &\left[ \frac{2\delta^2 r^2 \sin \alpha}{\omega^3} w \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2\delta r}{\omega^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{4\delta^3 r^2 \sin^2 \alpha}{\omega^3} w + \frac{4\delta^2 r \sin \alpha}{\omega^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{4\delta}{\omega} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right] \\
 -\beta_0^3 &\left[ \frac{12\delta^4 r^3 \sin^2 \alpha}{\omega^5} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{12\delta^3 r^2 \sin \alpha}{\omega^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} + \frac{4\delta^3 r^2 \cos \alpha}{\omega^4} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{4\delta^2 r}{\omega^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \alpha^2 \partial r} \right] \\
 -\beta_0^4 &\left[ \frac{12\delta^4 r^4 \sin^2 \alpha}{\omega^5} w + \frac{12\delta^3 r^3 \sin \alpha}{\omega^4} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{4\delta^3 r^3 \cos \alpha}{\omega^4} w + \frac{4\delta^2 r^2}{\omega^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right].
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \omega &= 1 + \delta r \cos \alpha, \\
 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad \Lambda = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
 \Omega &= -\frac{1}{\omega} \left[ \Delta \psi - \frac{\delta}{\omega} \Lambda \psi + \beta_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r w) + \frac{w}{\omega} \right\} \right].
 \end{aligned} \tag{A-3}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \Delta - \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta^2 \psi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{\delta \Omega}{\omega} \left( \sin \alpha \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \\
& \quad - w \left( \sin \alpha \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{2\delta}{\omega} \Lambda \Delta \psi - \frac{3\delta^2}{\omega^2} \Lambda^2 \psi + \frac{3\delta^3}{\omega^3} \Lambda \psi \\
& \quad - \beta_0 \left[ - \frac{\delta r \sin \alpha}{\omega} w \Omega - \Omega \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\delta^2 \sin^2 \alpha}{\omega^3} w \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\delta \sin \alpha}{r \omega^2} w \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \right. \\
& \quad + \frac{\delta^2 r \sin 2\alpha}{2\omega^3} w \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\delta \cos \alpha}{\omega^2} w \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} - \frac{\delta \sin \alpha}{r \omega^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{r^2 \omega} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \\
& \quad - \frac{\delta r \sin \alpha}{\omega^2} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} - \frac{\delta}{\omega} \Lambda \frac{\partial r w}{\partial \alpha} - \frac{3\delta}{\omega^2} \Lambda w + \frac{1}{\omega} \Delta w + \frac{\delta^2}{\omega^3} (3w + \omega w) \\
& \quad \left. + \Delta \frac{\partial r w}{\partial r} + \frac{\delta \sin \alpha}{r \omega^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{2\delta \cos \alpha}{r \omega} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{2\delta \sin \alpha}{\omega} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial r} - \frac{\delta (\cos \alpha + \delta r)}{\omega^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\
& \quad - \beta_0^2 \left[ \frac{\delta^2 r^2 \sin 2\alpha}{2\omega^3} w^2 + \frac{\delta r^2 w}{\omega^2} \left( \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial r} \right) w \right. \\
& \quad \quad - \frac{r}{\omega} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{12\delta^2 \sin \alpha}{r \omega^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \alpha^3} + \frac{2\delta}{r^2 \omega^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^4} \\
& \quad + \left\{ \frac{9\delta^3 r \sin 2\alpha}{\omega^4} - \frac{2\delta^2 \sin \alpha}{r \omega^3} + \frac{28\delta^4 r \sin^3 \alpha}{\omega^5} + \frac{2\delta^4 r \sin \alpha}{\omega^5} + \frac{\delta^3 \sin 2\alpha}{\omega^5} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \\
& \quad \quad + \left\{ \frac{8\delta^2 \cos \alpha}{r \omega^4} + \frac{8\delta^3}{\omega^4} + \frac{22\delta^3 \sin^2 \alpha}{\omega^4} \right\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \\
& \quad + \left\{ (22 - 8\delta r \cos \alpha) \frac{\delta^3 r \sin^2 \alpha}{\omega^5} + \frac{4\delta^2 \cos \alpha}{\omega^4} - \frac{4\delta^3 r}{\omega^4} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \left\{ \frac{2\delta^2 r \cos \alpha}{\omega^3} + \frac{6\delta^3 r^2 \sin^2 \alpha}{\omega^4} \right\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\
& \quad + 12(1 - \delta r \cos \alpha) \frac{\delta^2 \sin \alpha}{\omega^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial r} + (1 - 2\delta r \cos \alpha) \frac{2\delta}{r \omega^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \alpha^2 \partial r} \\
& \quad \quad \left. + \frac{6\delta^2 r \sin \alpha}{\omega^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \alpha \partial r^2} + \frac{2\delta}{\omega^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^2 \partial r^2} \right] \\
& \quad - \beta_0^3 \left[ \left\{ 2(3 - \delta r \cos \alpha) \frac{\delta^2 r \cos \alpha}{\omega^4} + 6(4 - \delta r \cos \alpha) \frac{\delta^3 r^2 \sin^2 \alpha}{\omega^5} \right\} w \right. \\
& \quad \quad + 6(3 - \delta r \cos \alpha) \frac{\delta^2 r \sin \alpha}{\omega^4} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + (2 - \delta r \cos \alpha) \frac{2\delta}{\omega^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \\
& \quad \quad \left. + \left\{ \frac{2\delta^2 r^2 \cos \alpha}{\omega^3} + \frac{6\delta^3 r^3 \sin^2 \alpha}{\omega^4} \right\} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{6\delta^2 r^2 \sin \alpha}{\omega^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial r} + \frac{2\delta r}{\omega^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial r} \right].
\end{aligned}$$

(A - 2)