

**BLOCH-KATO 予想の紹介 (その1)**  
— NON-ARCHIMEDEAN LOCAL FIELD 上の理論 —

広島大学理学部 都築 暢夫

§1. はじめに

大域体上の代数群の Tamagawa 数は、Tamagawa、Weil、Ono らにより研究され、Artin motif の  $L$ -関数の  $s = 1$  での特殊値はこれらの方法で解釈できる。([W])

$k$  を代数体、 $T = \text{Res}_{k/\mathbf{Q}} \mathbf{G}_m/k$  とする。 $S = S_f \cup \{\infty\}$  を有理素点の有限集合で、 $S_f$  は  $k$  で分岐する有限素点を含む有限素点の集合とする。 $T$  を  $T$  の  $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/S_f]$  上の model とし、同型

$$\omega : \det \text{Lie}(T) \rightarrow \mathbf{Z}[1/S_f]$$

を一つ固定する。各素点  $p$  に対して、

$$\exp : \text{Lie}_{\mathbf{Q}_p}(T) \rightarrow T(\mathbf{Q}_p)$$

を exponential 写像とし、 $\omega$  で決まる  $\text{Lie}_{\mathbf{Q}_p}(T)$  の Haar measure から  $\exp$  で誘導される  $T(\mathbf{Q}_p)$  上の Haar measure を  $\mu_{p,\omega}$  とする。すると、 $p \notin S$  に対して、

$$\mu_{p,\omega}(T(\mathbf{Z}_p)) = \prod_{v|p} \frac{1 - N_v}{N_v}$$

となる。ただし、 $v$  は  $k$  の素点で  $p$  の上にあるものを走り、 $N_v$  で剰余体の位数をあらわす。これは、 $T$  の  $L$ -関数

$$L_S(T, s) = \prod_{p \notin S} L_p(T, s) = \prod_{p \notin S} \prod_{v|p} \frac{1}{1 - N_v^{-s}}$$

の local factor の  $s = 1$  での値の逆数に他ならない。 $T^0(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$  を  $T(\mathbf{Q})$  で割ったとき compact になる  $T(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$  の最大部分群とする。 $T^0(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$  上の Tamagawa measure を

$$\mu_{\omega} = \left| \lim_{s \rightarrow 1} \{(s-1)L_S(T, s)\}^{-1} \right| \prod_{p \in S} \mu_{p,\omega} \prod_{p \notin S} L_p(T, 1) \mu_{p,\omega}$$

と定めると、 $\mu_{\omega}$  は  $S$  の取り方によらない。 $T$  の Tamagawa 数を

$$\text{Tam}(T) = \mu_{\omega}(T^0(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}))$$

で定義する。積公式より、これは  $\omega$  の取り方によらない。

さて、 $\text{III}(T) = \ker(H^1(\mathbf{Q}, T) \rightarrow \prod_{p \leq \infty} H^1(\mathbf{Q}_p, T))$  とおくと、 $G$  に対する Tamagawa 数予想とは、

$$\text{Tam}(T) = \frac{\#\text{Pic}(T)}{\#\text{III}(T)}$$

が成り立つというもので、この場合には成り立つことが知られている。この等式を  $L$ -関数の特殊値の言葉で言い換えると、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)L_S(T, s) &= \mu_\omega(T(\mathbf{Q}) \backslash T(\mathbf{A}_\mathbf{Q})) \\ &= \mu_{\infty, \omega}(O_k^\times \backslash (k \otimes \mathbf{R})^0) \prod_{p \in S_f} \mu_{p, \omega}((O_k \otimes \mathbf{Z}_p)^\times) \\ &= \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} R_k h_k}{u_k \sqrt{d_k}} \prod_{p \in S_f} \prod_{v|p} \frac{N_v - 1}{N_v} \end{aligned}$$

となり、これは代数体  $k$  の Dedekind- $\zeta$ -関数の極限公式に他ならない。ただし、 $r_1(r_2)$  は  $k$  の実数体 (複素数体) への埋め込みの個数、 $R_k, h_k, u_k, d_k$  は  $k$  の単数基準、類数、1 のべき根の個数、判別式をあらわす。

Bloch-Kato 予想とは pure motif の  $L$ -関数の特殊値を数論的对象で書き表す予想であり、代数群に対する Tamagawa 数予想の motif における拡張の形で述べられる。代数群の場合は有理点や exponential 写像があり、上の例のようにして adelic points 上に Tamagawa measure を定義することができ、Tamagawa 数が決まる。比較して、Motif に対する Tamagawa 数の自然な拡張を得るためには、まず、有理点や exponential 写像の概念の拡張が必要になる。これらを定義することは、近年の  $p$  進 Hodge 理論の発展によって可能になった。(BSD 予想については Bloch が Tamagawa 数予想と類似の形で定式化した。([B])) また、exponential 写像は explicit reciprocity law として解釈され、Bloch-Kato 予想は岩沢理論の拡張とみることもできる。([K1][K3][K4][P])

本稿では、 $p$  進 Hodge 理論を利用して  $p$  進 motivic points および exponential 写像を定義する方法について解説する。

## §2. $p$ -進 HODGE 理論からの準備

この節では  $p$ -進 Hodge 理論について復習する。(詳しくは [F1]、[I]、[Fo2]、[Fo3] を見よ。) 記号を次のように定める。

$p$ : 素数

$K$ :  $\mathbf{Q}_p$  の有限次代数拡大体

$K_0$ :  $K$  中での  $\mathbf{Q}_p$  の最大不分岐拡大体

$G_K$ :  $K$  の絶対 Galois 群  $\text{Gal}(\bar{K}/K)$

$\varphi$ :  $K_0$  の Frobenius;  $\varphi(x) \equiv x^p \pmod{(p)}$  ( $x \in O_K^\times$ )

$K^{nr}$ :  $K$  の最大不分岐拡大体

$H^i(K, \cdot)$ :  $G_K$  の  $i$  次連続 cohomology 群

### (2.1.) 環 $\mathbf{B}_{\text{dR}}, \mathbf{B}_{\text{crys}}$ ([Fo1][BK])

$\mathbf{B}_{\text{dR}}$  および  $\mathbf{B}_{\text{crys}}$  を Fontaine の定義した環とすると、両者は以下の性質を持つ。

(ア)  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  は

$$\bigcup \mathbf{B}_{\text{dR}}^i = \mathbf{B}_{\text{dR}}, \quad \bigcap \mathbf{B}_{\text{dR}}^i = 0$$

を満たす減少 filtration  $\{\mathbf{B}_{\text{dR}}^i\}$  をもつ  $\bar{K}$ -algebra で、filtration から定まる位相に関して完備かつ filtration を保つ連続な  $G_K$ -作用をもつ。また、標準射

$$\log : \mathbf{Z}_p(1) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^1$$

は、同型  $\mathbf{C}_p(i) \cong \mathbf{B}_{\text{dR}}^i / \mathbf{B}_{\text{dR}}^{i+1}$  を導く。ただし、 $\mathbf{C}_p$  は  $\bar{K}$  の  $p$  進完備化をあらわし、 $(i)$  は  $i$  次 Tate-twist をあらわす。

(イ)  $\mathbf{B}_{\text{crys}}$  は  $G_K$ -作用を保つ  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  の  $K_0^{nr}$ -subalgebra で、 $K_0^{nr}$  の Frobenius  $f^{nr}$  と可換な Frobenius 射  $f : \mathbf{B}_{\text{crys}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{crys}}$  をもつ。また、(ア) の標準射  $\log$  での  $\mathbf{Z}_p(1)$  の像は  $\mathbf{B}_{\text{crys}}$  に入る。

(ウ)  $H^0(K, \mathbf{B}_{\text{crys}}) = K_0$ ,  $H^0(K, \mathbf{B}_{\text{dR}}) = K$

(エ) 次の上下 2 つの  $G_K$ -加群の列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{B}_{\text{crys}}^{f=1} \otimes \mathbf{B}_{\text{dR}}^0 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}_{\text{dR}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \cap & & \downarrow x \mapsto (0, x) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Q}_p & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{B}_{\text{crys}} \otimes \mathbf{B}_{\text{dR}}^0 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}_{\text{crys}} \oplus \mathbf{B}_{\text{dR}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

は、完全である。ただし、 $\alpha(x) = (x, x)$ 、 $\beta(x, y) = (x - f(x), x - y)$  とする。

## (2.2.) de Rham 表現、crystalline 表現

$l$  を素数とする。 $V_l$  が  $l$  進表現であるとは、 $V_l$  が連続な  $G_K$ -作用をもつ有限次元  $\mathbf{Q}_l$ -vector space のことをいう。 $T_l$  が  $l$  進表現  $V_l$  の lattice とは、 $G_K$ -作用を保つ  $V_l$  の部分自由  $\mathbf{Z}_l$ -加群で、 $V_l = \mathbf{Q}_l \otimes_{\mathbf{Z}_l} T_l$  を満たすものとする。さらに、 $T$  が  $\hat{\mathbf{Z}}$ -表現であるとは、連続な  $G_K$ -作用をもつ階数有限自由  $\hat{\mathbf{Z}}$ -加群とする。

$V$  を  $p$  進表現とする。 $V$  に対して、

$$\begin{aligned} \text{DR}(V) &= H^0(K, \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V), & \text{DR}(V)^i &= H^0(K, \mathbf{B}_{\text{dR}}^i \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \\ \text{Crys}(V) &= H^0(K, \mathbf{B}_{\text{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \end{aligned}$$

と定める。前者は、減少 filtration 付きの  $K$ -vector space で、後者は  $\mathbf{B}_{\text{crys}}$  の Frobenius  $f$  から定まる  $\varphi$ -linear な射  $f$  をもつ  $K_0$ -vector space になる。 $V$  に対して

$$\dim_K \text{DR}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V \quad (\dim_{K_0} \text{Crys}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V)$$

が成り立つとき、 $V$  を de Rham 表現 (crystalline 表現) という。 $V, W$  を de Rham 表現 (crystalline 表現) とすると、tensor 積  $V \otimes W$  および双対  $V^*$  も de Rham 表現 (crystalline 表現) になる。([Fo1]) また、 $K$  上の proper smooth variety  $X$  が good reduction をもてば、 $p$  進 etale cohomology  $H_{\text{et}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$  は crystalline 表現になる。([FM][Fa][K2]...) )

$l$  進表現  $V$  に対して、

$$P(V, u) = \begin{cases} \det(1 - f_K u \mid H^0(K^{nr}, V)) \in \mathbf{Q}_l[u] & (l \neq p) \\ \det(1 - f^{[K_0 : \mathbf{Q}_p]} u \mid \text{Crys}(V)) \in K_0[u] & (l = p) \end{cases}$$

と定める。ここで、 $f_K$ は  $G_K$  の geometric frobenius (剰余体上で  $p^{[K_0:\mathbf{Q}_p]}$  乗写像の逆写像) とする。 $X$  を  $K$  上の good reduction をもつ projective smooth variety とし、 $V_l$  を  $X$  の  $l$  進 cohomology 群  $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_l)$  とすると、[KM] により、 $P(V_l, u)$  は  $l$  によらずに  $\mathbf{Z}[u]$  に属する。

### (2.3.) Fontaine-Laffaille の理論 ([FL])

$p$  進 Hodge 理論で通常扱うのは  $\mathbf{Q}_p$ -係数の表現であるが、岩沢理論、特に、 $L$ -関数の  $p$  進的な性質を考察するときには、 $\mathbf{Z}_p$ -lattice や torsion の様子を知ることは不可欠である。実は、絶対分岐指数が 1 の局所体の場合には若干の仮定の下で  $\mathbf{Z}_p$ -係数や torsion も扱うことができる。それが、Fontaine-Laffaille の理論である。

以下、 $K = K_0$ 、 $O_K$  で  $K$  の整数環をあらわす。

$O_K$  上の Dieudonne filtered module (以下、DMF という。) とは、減少 filtration  $\{D^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  と  $\varphi$ -linear 準同型  $\{f_i : D^i \rightarrow D\}$  をもつ有限生成  $O_K$ -加群  $D$  で、条件

$$(ア) \bigcup D^i = D, \quad \bigcap D^i = 0;$$

$$(イ) f_i|_{D^{i+1}} = p f_{i+1};$$

$$(ウ) D = \sum_{i \in \mathbf{Z}} f_i(D^i)$$

を満たすものである。また、DMF の射とは、filtration および  $f_i$  を保つ  $O_K$ -加群の射である。

$a \leq b$  とする。DMFD が type  $[a, b]$  とは、

$$D^a = D \text{ かつ } D^{b+1} = 0$$

となることをいう。また、長さが  $n$  以下とは、ある  $b - a \leq n$  が成り立つ  $a, b \in \mathbf{Z}$  が存在して、 $D$  の type が  $[a, b]$  となることをいう。

定理 I.  $b - a \leq p - 2$  とすると、type が  $[a, b]$  の DMF の圏は abel 圏である。

DMF から  $p$  進表現を構成する共変関手

$$T : (\text{DMF of type } [2 - p, 0]) \rightarrow (G_K \text{ の連続 } \mathbf{Z}_p\text{-表現})$$

を、 $T(D) = \ker(1 - f; \text{Fil}^0(\mathbf{B}_\infty \otimes_{O_K} D) \rightarrow \mathbf{B}_\infty \otimes_{O_K} D)$  で定義する。 $\mathbf{B}_\infty$  は Fontaine が定義した  $\mathbf{Z}_p$ -algebra で、Frobenius  $f$  と減少 filtration をもち、 $\mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{B}_\infty = \mathbf{B}_{\text{crys}} \cap \mathbf{B}_{\text{dR}}^0$  を満たす。

定理 II.  $T$  は充満忠実である。さらに、 $V(D) = \mathbf{Q}_p \otimes T(D)$  は crystalline 表現であり、filtration もこめて  $\text{DR}(V(D)) (\cong \text{Crys}(V(D))) \cong K \otimes D$  となる。

一般の長さが  $p - 2$  以下の DMF から表現を構成するには、filtration を shift することにより type が  $[2 - p, 0]$  になるようにして  $T$  を施し、Tate-twist でもどせばよい。この構成は、filtration の shift の仕方によらない。

例 (ア)  $D = O_K\{r\}$  ( $D^r = O_K, D^{r+1} = 0, f_r = \varphi$ ) とすると、 $T(D) \cong \mathbf{Z}_p(r)$  となる。

例 (イ)  $\mathcal{A}$  を  $O_K$  上の abelian scheme とする。

$$D = H_{\text{crys}}^1(\mathcal{A} \otimes (O_K/p)/O_K), \quad D^i \text{ は Hodge filtration}$$

とすると、標準的に  $T(D) \cong H_{\text{ét}}^1(\mathcal{A}_{\bar{K}}, \mathbf{Z}_p)$  となる。一般に、type が  $[-1, 0]$  の DMF の圏は  $O_K$  上の height が  $p$  べきの finite flat group scheme の圏に圏同値になる。

## §3. NON-ARCHIMEDEAN LOCAL FIELD 上の MOTIVIC な有理点

(3.1.)  $H_*^1 (* = e, f, g)$  の定義 $V$  を  $l$  進表現とする。  $l = p$  のとき、

$$H_e^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{crys}}^{f=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))$$

$$H_f^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))$$

$$H_g^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))$$

とおく。また、  $l \neq p$  のとき、

$$H_e^1(K, V) = 0, \quad H_g^1(K, V) = H^1(K, V)$$

$$H_f^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K^{nr}, V))$$

と定める。  $\mathbf{B}_{\text{crys}}^{f=1} \subset \mathbf{B}_{\text{crys}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$  より、

$$H_e^1 \subset H_f^1 \subset H_g^1 \subset H^1$$

である。  $H^1(K, V) \cong \text{Ext}_{G_K}^1(\mathbf{Q}_p, V)$  とみると、  $V$  が de Rham (crystalline) 表現ならば、

$$x \in H_g^1 (x \in H_f^1) \Leftrightarrow x \text{ に対応する extension は de Rham (crystalline) 表現}$$

となる。

 $T_l$  を  $l$  進表現  $V_l$  の lattice、  $\iota : T_l \rightarrow V_l$ 、  $pr : V_l \rightarrow V_l/T_l$  とする。  $* \in \{e, f, g\}$  に対して、

$$H_*^1(K, T_l) = \iota^{-1} H_*^1(K, V_l)$$

$$H_*^1(K, V_l/T_l) = pr_* H_*^1(K, V_l)$$

と定める。また、  $\widehat{\mathbf{Z}}$ -表現  $T$  に対して、

$$H_*^1(K, T) = \prod H_*^1(K, T_l)$$

と定義する。

 $p$  進表現  $V$  に対して、  $V$  の  $K$  上の tangent space を

$$t_V(K) = \text{DR}(V)/\text{DR}(V)^0$$

で表す。(2.1. エ) の完全系列に  $\otimes V$  して連続 cohomology をとることにより、命題 . de Rham 表現  $V$  に対して、

$$(ア) H^1(K, \mathbf{B}_{\text{dR}}^0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \text{ は単射;}$$

$$(イ) \dim_{\mathbf{Q}_p} H_f^1(K, V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} t_V(K) + \dim_{\mathbf{Q}_p} H^0(K, V);$$

$$(ウ) H_f^1(K, V)/H_e^1(K, V) \cong \text{Crys}(V)/(1-f)\text{Crys}(V)$$

が成り立つ。

(3.2.) Tate duality

定理 III .V を  $l$  進表現 ( $l = p$  のときは de Rham 表現)、 $T$  をその lattice とする。Tate duality

$$\begin{aligned} H^1(K, V) \times H^1(K, V^*(1)) &\rightarrow H^2(K, \mathbf{Q}_l(1)) \cong \mathbf{Q}_l \\ H^1(K, T) \times H^1(K, V^*/T^*(1)) &\rightarrow H^2(K, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(1)) \cong \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \end{aligned}$$

のもとで

$$\begin{aligned} H_f^1(K, V)^\perp &= H_f^1(K, V^*(1)), & H_g^1(K, V)^\perp &= H_e^1(K, V^*(1)) \\ H_f^1(K, T)^\perp &= H_f^1(K, V^*/T^*(1)), & H_g^1(K, T)^\perp &= H_e^1(K, V^*/T^*(1)) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $(\cdot)^\perp$  は直交補空間をあらわす。

(3.3.) Motivic points over non-archimedean local field and "exp" map

$V$  を de Rham 表現とする。写像  $\exp = \exp_V$  を (2.1. エ) の上の完全列に  $\otimes V$  して連続 cohomology をとったとき得られる連結準同型

$$t_V(K) = \mathrm{DR}(V)/\mathrm{DR}(V)^0 \xrightarrow{\exp} H_e^1(K, V)$$

とする。exp は全射で、その核は  $\mathrm{Crys}(V)^{f=1}/H^0(K, V)$  となる。特に、 $P(V, 1) \neq 0$  のとき、(3.1.) の命題より、exp は同型

$$t_V(K) \cong H_f^1(K, V)$$

を与える。

$\widehat{\mathbf{Z}}$ -表現  $T$  に対して、 $K$  上の motivic points の群  $A(K) = A(T, K)$  を

$$A(K) = H_f^1(K, T)$$

と定める。 $V_p = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p$  が de Rham 表現かつ  $P(V_p, 1) \neq 1$  の仮定の下で、exp は同型  $t_V(K) \cong \mathbf{Q}_p \otimes A(K)$  を導く。 $T$  が  $K$  上の Abel 多様体から来るときには、exp は古典的な exponential 写像と一致する。( (3.4. 例 2) を見よ。 )  $A(K)$  の torsion については以下の命題が成り立つ。

命題 . $T$  を  $\widehat{\mathbf{Z}}$ -表現で、 $V_p$  が de Rham 表現かつ任意の  $l$  に関して、 $P(V_l, 1) \neq 0$  とする。このとき、次の同型が成り立つ。

$$A(K)_{\mathrm{tor}} \cong H^0(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \otimes T)$$

(3.4.) 例 (ア)  $T = \widehat{\mathbf{Z}}(r)$  のとき。  $l \neq p$  ならば、 $T_l = \mathbf{Z}_l(p)$  は不分岐より、

$$H_f^1(K, T_l) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_l & (r = 0) \\ H^0(K, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(r)) & (r \neq 0) \end{cases}$$

となる。 $l = p$  のときは (3.1.) の命題から、

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} H_f^1(K, V_p) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ 1 & (r = 0) \\ [K : \mathbf{Q}_p] & (r \geq 1) \end{cases}$$

$$H_f^1(K, T_p) \cong \begin{cases} 0 & (r = 0) \\ H^0(K, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(r)) & (r \neq 0) \end{cases}$$

となる。また、 $H_f^1(K, \mathbf{Q}_p(1))$  と  $H_g^1(K, \mathbf{Q}_p(1))$  とは 1 次元ずれているが、これは split multiplicative reduction をもつ Elliptic curve に実現される  $p$ -進表現で生成されていて、これらの表現は stable 表現といわれるものになる。

例 (イ)  $X$  を  $K$  上の Abel 多様体とし、 $T = \prod T_l$  を Tate 加群とする。このとき、 $V_p$  は de Rham 表現である。([Fo1]) Kummer 系列

$$0 \rightarrow T \rightarrow \varprojlim_n X(\bar{K}) \rightarrow X(\bar{K}) \rightarrow 0$$

から導かれる連結準同型

$$\partial : X(K) \rightarrow H^1(K, T)$$

の像は  $H_e^1$  の中に含まれ、

$$\begin{array}{ccc} \tan X & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{Q}_p \otimes X(K) \\ \parallel & & \downarrow \partial \\ t_{V_p}(K) & \xrightarrow[\exp]{} & H_e^1(K, T) \end{array}$$

は可換になる。ここで、 $\tan X$  は  $X$  の原点での tangent space、上の  $\exp$  は classical な exponential map をあらわす。よって、 $\partial$  は同型になる。この例から、motivic points と  $\exp$  は、代数群における有理点および exponential 写像の motif への一般化になっていることがわかる。

例 (ウ)  $K$  上の Elliptic curve  $E$  に対して、 $T_p(E)$  を  $p$ -進 Tate 加群とし、

$$T = \text{Sym}_{\mathbf{Z}_p}^r T_p(E) \quad (r \geq 1)$$

とする。 $V_p(E) = \mathbf{Q}_p \otimes T_p(E)$  は de Rham 表現より、対称積  $V = \mathbf{Q}_p \otimes T$  も de Rham 表現であり、

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} H_f^1(K, V) = r[K : \mathbf{Q}_p]$$

となる。なぜならば、 $K$  を高々有限次拡大で置き換えることにより  $E$  の Neron model は semi-stable reduction をもつとしてよく、 $H^0(K, V) = 0$  である。Weil 予想から  $P(V, 1) \neq 0$  となるから、(3.1.) の命題から

$$H_e^1(K, V) = H_f^1(K, V)$$

となる。(Eが multiplicative reduction で potential good でないときは  $\dim_{K_0} \text{Crys}(V) = 1$ , additive reduction のときは、 $\dim_{K_0} \text{Crys}(V) = 0$  になっている。) また、 $r \neq 2$  のとき、 $\dim_{\mathbf{Q}_p} H_f^1(K, V^*(1)) = r[K : \mathbf{Q}_p]$  かつ  $\text{Crys}(V^*(1))^{f=1} = (0)$  となり、

$$H_f^1(K, V) = H_g^1(K, V)$$

である。 $r = 2$  のときは、 $\dim_{\mathbf{Q}_p} \text{End}_{G_K}(V_p) = 1$  または 2 の場合があり、それぞれ  $\dim_{\mathbf{Q}_p} H_f^1(K, V^*(1)) = r[K : \mathbf{Q}_p]$  または  $r[K : \mathbf{Q}_p] + 1$  となる。(Eが ordinary good reduction ならばいつも  $\dim_{\mathbf{Q}_p} \text{End}_{G_K}(V_p) = 1$  である。) さらに、Eが good reduction をもつときは、 $\text{ord}_{u=1} P(V, u) = 1$  から  $\dim_{\mathbf{Q}_p} \text{Crys}(V^*(1))^{f=1} = 1$  で、

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} H_g^1(K, V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} H_f^1(K, V) + 1$$

となり、bad reduction をもつときは、 $H_f^1(K, V) = H_g^1(K, V)$  となる。

#### §4. LOCAL L の値

(4.1.)  $V$  を  $P(V, 1) \neq 0$  なる  $l$  進表現とする。

定理 IV (ア)  $l \neq p$  とすると、 $H_f^1(K, V) = 0$  となる。さらに、 $V$  が不分岐ならば、 $V$  の  $\mathbf{Z}_l$ -lattice  $T$  に対して、

$$\#H_f^1(K, T) = |P(V, 1)|_l^{-1}$$

となる。ここで、 $|\cdot|_l$  は、 $|\cdot|_l = l^{-1}$  と正規化された絶対値とする。

(イ)  $l = p$ 、 $K = K_0$ 、 $V$  は crystalline 表現とし、ある長さが  $p-2$  以下の DMF  $D$  が存在して、

$$V = \mathbf{Q}_p \otimes T(D)$$

とする。 $\mu$  を  $\exp$  による像を通して  $D/D^0$  の total measure が 1 になる  $H_f^1(K, V)$  の Haar measure とすると、

$$\mu(H_f^1(K, T)) = |P(V, 1)|_p^{-1}$$

となる。

定理 IV.(イ) の仮定は、 $\dim_X \leq (p-2)/2$  となる good reduction をもつ proper smooth variety に対して成り立つ。([Fa][K2])

(4.2.)  $\widehat{\mathbf{Z}}(r)$  ( $r \geq 2$ ) の場合には explicit reciprocity law の exponential 写像を用いた解釈により次が成り立つ。(この場合は、 $H_e^1 = H_f^1 = H_g^1 = H^1$  となることに注意せよ。((3.4.) 例 (ア)))

定理 V . $p$  を奇素数、 $K$  を  $\mathbf{Q}_p$  の有限次不分岐拡大、 $r \geq 2$  とする。 $H^1(K, \widehat{\mathbf{Z}}(r))$  上の Haar measure  $\mu_p$  を exponential 写像

$$\exp : K \rightarrow H^1(K, \widehat{\mathbf{Z}}(r)) \otimes \mathbf{Q}_p$$

から導かれたものとする。このとき、

$$\mu_p(H^1(K, \widehat{\mathbf{Z}}(r))) = (1 - q^{-r})|(r-1)!|_K \#H^0(K, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-r))$$

となる。ただし、 $q$  は  $K$  の剰余体の位数、 $|\cdot|_K$  は  $K$  の正規化された絶対値 ( $|p|_K = q^{-1}$ ) とする。



## 参考文献

- [B] Bloch, S., *A note on height pairings, Tamagawa numbers and Birch and Swinerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.
- [BK] Bloch, S. and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, Grothendieck Festschrift I, Progress in Math. **86** (1990), Birkhäuser, 333–400.
- [D] Deligne, P., *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 273–307.
- [Fa] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic étale cohomology*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (1989), The Johns Hopkins University Press, 25–80.
- [Fo1] Fontaine, J.-M., *Sur certain types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps locaux ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.
- [Fo2] Fontaine, J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–101.
- [Fo3] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223** (1994), 113–184.
- [FI] Fontaine, J.-M. and Illusie, L., *p-adic periods*, Indo-French conf. on geom. Bombay (1989).
- [FL] Fontaine, J.-M. and Laffaille, G., *Construction de représentation p-adiques*, Ann. Sc. ENS **15** (1982), 547–608.
- [FM] Fontaine, J.-M. and Messing, W., *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Cont. Math. **67** (1987), 179–207.
- [FP] Fontaine, J.-M. and Perrin-Riou, B., *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, Motives (1994), AMS.
- [I] Illusie, L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie de étale p-adique (d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.)*, Sem. Bourbaki **726** (1990).
- [K1] Kato, K., *Explicit reciprocity law and cohomology of Fontaine-Messing*, Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 397–441.
- [K2] Kato, K., *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, Astérisque **223** (1994), 269–293.
- [K3] Kato, K., *Explicit reciprocity law と zeta の値*, 数理研講究録 **810** (1992), 264–279.
- [K4] Kato, K., *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-function via  $B_{dR}$* , Lecture Notes in Math. **1553** (1993), Springer-Verlag, 50–163.
- [KM] Katz, N. and Messing, W., *Some consequences of Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.
- [P] Perrin-Riou, B., *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local*, Invent. Math. **115** (1994), 81–149.
- [W] Weil, A., *Adeles and algebraic groups*, Progress in Math. **23** (1982), Birkhäuser.