数理解析研究所講究録
925巻 1995年 66-76

楕円曲線・保型形式の岩澤理論

東京工業大学　加藤和也

Mazur と Wiles によって 1980 年すぎに解決された岩澤 main conjecture は、円分体のイデアル類群とリーマン・ゼータ関数のふしぎな関係を考察するものであった。1990 年頃に至って、円単数の性質を大いに用いた、岩澤 main conjecture の別証が、Kolyvagin の方法にもとずいて Rubin によって与えられた。

この Kolyvagin と Rubin の方法において、「円単数」の代わりに、「モジュラー曲線の K_2 群の中に Beilinson が定義した元」を用いると、楕円曲線や保型形式の岩澤理論が解明される。つまり、

	円分体の岩澤理論	楕円曲線や保型形式の岩澤理論
テーマ	リーマンゼータ関数と円分体の ideal 類群の関係	楕円曲線や保型形式の zeta 関数と Tate-Shafarevich 群や Selmer 群の関係
活躍するゼータの化身	円単数	モジュラー曲線の K_2 の中の Beilinson elements

§1. 結果と方法.

1° 楕円曲線

E を $\mathbb{Q}$ 上のモジュラーな楕円曲線とし、$L(E,s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ をそのゼータ関数とし，Dirichlet 指標 χ に対し、$L(E,\chi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi(n) n^{-s}$ とおく. $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 K に対し

$$E(K),\quad Sel(E,K),\quad Ш(E,K)$$

をそれぞれ，E の K 有理点の群，E の K 上の Selmer 群，E の K 上の Tate-Shafarevich 群とおく. 完全列

$$0 \to E(K)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to Sel(E,K) \to Ш(E,K) \to 0$$

が存在する. $Ш(E,K)$ は有限と予想されている.

可換群 G，G 加群 M，G の指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ に対し

$$M_\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathrm{Image}\,(\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\chi} \mathbb{C})$$

とおく.

次の定理 1 は Birch Swinnerton-Dyer 予想の、定理 2 (1) は p 進 Birch Swinnerton-Dyer 予想の、定理 2 (2) は楕円曲線の岩澤 main conjecture の、部分的解決である.

<u>定理 1</u>　ζ_N を 1 の原始 N 乗根とし，$\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を Dirichlet 指標とする. $L(E,\chi,1) \neq 0$ とする. この時，$E(\mathbb{Q}(\zeta_N))_\chi$，$Sel(E,\mathbb{Q}(\zeta_N))_\chi$，$Ш(E,\mathbb{Q}(\zeta_N))_\chi$ は

有限群である

ここで $(\ )_\chi$ は，$(\ )$ のなかみを $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ 加群と見て定めたものである．

<u>定理２</u>　p を素数とし，E は p で good ordinary reduction であるとする．

$$L_{p\text{-adic}}(E,s) \in \Lambda = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q})]$$

を E の p 進ゼータ関数とする．

(1)　$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(E(\mathbb{Q})) \leqq \mathrm{ord}_{s=1} L_{p\text{-adic}}(E,s)$

(2)　$\mathfrak{X} = \mathrm{Hom}\left(\varinjlim_n \mathrm{Sel}(E, \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\right)$ とするとき，

$\mathfrak{X}$ はねじれ Λ 加群であり，Λ の高さ１の素イデアル $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{p} \neq (p)$ なるものに対し

$$\Lambda_{\mathfrak{p}} \text{ 加群 } \mathfrak{X}_{\mathfrak{p}} \text{ の長さ } \leqq \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\left(L_{p\text{-adic}}(E,s)\right).$$

ここで $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(L_{p\text{-adic}}(E,s))$ とは，$L_{p\text{-adic}}(E,s)$ の，離散付値環 $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ における order（付値）のことである．また $\mathrm{ord}_{s=1} L_{p\text{-adic}}(E,s)$ とは，$\mathfrak{p}$ として

(*)　$\mathrm{Ker}(\Lambda \to \mathbb{Z}_p\ ,\ \sigma \mapsto 1 \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\bigcup_n \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}))$

をとるときの $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(L_{p\text{-adic}}(E,s))$ のことである．

定理２(1)は定理２(2)からしたがう．というのは，$\mathfrak{p}$ として(*)をとるとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ord}_{s=1} L_{p\text{-adic}}(E, s) &\underset{\text{定理2(2)より}}{\geqq} \Lambda_{\mathfrak{p}}\text{加群 } \mathfrak{X}_{\mathfrak{p}} \text{ の長さ} \\
&\geqq \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}) \\
&= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}(E, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\
&\geqq \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})
\end{aligned}
$$

となるからである.

2° 保型形式

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ を重み $k \geqq 2$ の尖点形式とし ($q = e^{2\pi i z}$, $z \in$ 上半平面)、Hecke 作用素の同時固有関数であるものとする. ある技術的な理由 (下記の結果を得るためのもの) により、$a_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n \geqq 1$ と仮定する. $a_1 = 1$ とする. ゼータ関数

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad L(f, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}$$

が定義される. $k = 2$ の時、f は $\mathbb{Q}$ 上のモジュラーな楕円曲線 E に対応し, $L(f, \chi, s) = L(E, \chi, s)$ である.

$k \geqq 2$ が一般の場合も、$\mathrm{Sel}(E, K)$ に類似した $\mathrm{Sel}(f, K)$ が定義される. どんなふうに定義されるかというと, Deligne により, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が連続に作用する階数 2 の $\hat{\mathbb{Z}}$ 加群 T_f (ここに $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) が定まる (たとえば $k = 2$ なら T_f は f に対応する楕円曲線の Tate 加群 TE の Tate twist $TE(-1)$ である)

が、$\mathrm{Sel}(f, K)$ は $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), T_f \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(k-1))$ のある部分群として定義される。($k=2$ で f が E に対応すれば $\mathrm{Sel}(f, K) = \mathrm{Sel}(E, K)$ となる。)

定理1′：$k \geq 3$ なら $\mathrm{Sel}(f, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ は有限群である。

(定理1と様子が違って、こちらは常に有限となるのは、$k \geq 3$ であれば $L(f, \chi, k-1) \neq 0$ が必ず成立する($s=k-1$ は絶対収束域の中にあること、$L(f, \chi, s)$ がオイラー積表示をもつことによる)ためである。)

定理2 (2) の類似も、p 進ゼータ関数 $L_{p\text{-adic}}(f, s)$ について成立する。

3° 方法

方法は、Kolyvagin の Euler system の方法を用いるものである。この方法で、ちょうど Rubin が円単数の性質を大いに用いて円分体の ideal 類群の大きさをおさえることができたように、モジュラー曲線の K_2 群の中の Beilinson elements の性質を大いに用いて、$S(f, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ の大きさをおさえることができる。

ただしそのおさえられかたが $L(f, \chi, k-1)$ に関係したおさえられかたであることを示すのに、「Beilinson elements が p-adic に $L(f, \chi, k-1)$ と関係すること」を p 進 Hodge 理論を用いて示すことが必要で、そこの所を次の §2 (とくに §2 の 3°) に述べる。

§2. ゼータの化身とゼータの値

1° ゼータの化身円単数

モジュラー曲線の K_2 の中の Beilinson elements というのは、ゼータの化身である。それについて述べるのに、もっとわかりやすいゼータの化身である、円単数のことをまず考えたい。

円単数とは

$$1-\zeta_N \qquad (\zeta_N \text{は1の原始}N\text{乗根},\ N \geqq 2)$$

のことで、ゼータ関数と $\mathbb{C}$ 内で次のように関係する。

$\zeta_N = e^{\frac{2\pi i a}{N}}$ とおくと

$$(*) \qquad \log|1-\zeta_N| = -\lim_{s\to 0} s^{-1}(\zeta_{\equiv a(N)}(s) + \zeta_{\equiv -a(N)})(s).$$

ここに $\zeta_{\equiv a(N)}(s)$ は部分リーマン・ゼータ関数で、

$$\zeta_{\equiv a(N)}(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv a \bmod N}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

として $\mathrm{Re}(s)>1$ で定義され、複素平面全体に解析接続されたものである。

$$1-\zeta_N \in \mathbb{Z}[\zeta_N, \tfrac{1}{N}]^{\times} = K_1(\mathbb{Z}[\zeta_N, \tfrac{1}{N}])$$

であって、$1-\zeta_N$ は K 群の元と見られる。このようにゼータの化身は K 群に宿るのである。3° に述べるように、円単数は p-adic にもゼータの値と、p 進 Hodge 理論を通じて関係する。円単数は、ゼータの心のこもった元なのである。

ゼータの心

ゼータの化身　　　　　　　　　　ゼータ関数

（あまり見つかっていない）　　　（たくさん見つかっている）

次の古典的結果は、$r=0$ の場合、上の$(*)$に一致するもので、$r=2$ の場合は $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ などをもたらす、重要なものだが、あとで保型形式の話との対比上、重要になる.

古典的定理. $r \geqq 0$ とし

$$\omega_N^{(r)} = \frac{1}{2}\left(t\frac{d}{dt}\right)^r \log\{(1-t)(1-t^{-1})\}\Big|_{t=\zeta_N}$$

とおく，$\zeta_N = e^{\frac{2\pi i a}{N}}$ とおくとき.

$$\omega_N^{(0)} = -\lim_{s\to 0} s^{-1}\left(\zeta_{\equiv a(N)} + \zeta_{\equiv -a(N)}\right)(s).$$

$r \geqq 1$ のとき

$$\omega_N^{(r)} = (-1)^{r-1}\times(r-1)!\times\left(\frac{N}{2\pi i}\right)^r\times\left(\zeta_{\equiv a(N)}+(-1)^r\zeta_{\equiv -a(N)}\right)(r).$$

2°　保型形式のゼータの化身

$Y(N)$ を level N の modular 曲線とする. $Y(N)$ は，$\mathbb{Q}(\zeta_N)$ を定数体とする代数曲線で、

$$Y(N)\otimes_{\mathbb{Q}(\zeta_N)}\mathbb{C} = \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}$$

$\mathfrak{H}$ = 上半平面，$\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(SL_2(\mathbb{Z})\longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ となるものである. $M_k(Y(N))$ を $Y(N)$ 上の重み k の modular form 全体とする.

次のような対比を考えていく

	古典的理論	モジュラー曲線の場合
もとになる関数	$(1-t)(1-t^{-1})$	${}_c\theta$
等分点での値	円単数 $\in \mathbb{Q}(\zeta_N)^\times$	Siegel unit $\in \mathcal{O}(Y(N))^\times$
それを使ってできるゼータの化身	同上	Beilinson element $\in K_2(Y(N))$
「もとになる関数」の log を何度も微分してから等分点での値をとったもの	$\omega_N^{(r)} \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$ $(r \geq 1)$	Eisenstein series $\in M_k(Y(N))$
それを使ってできるゼータの化身	同上	志村 element $\in M_k(Y(N))$

右端の欄のものを順に述べていく.

${}_c\theta$ について: c を 6 と互いに素な整数とする. $\mathcal{E}$ を $Y(N)$ 上の universal elliptic curve とするとき, $\mathcal{E}$ 上の有理関数 ${}_c\theta$ が定義される. $\mathbb{C}$ 上へゆくと, $\mathcal{E} \to Y(N)$ は

$$(\mathbb{C} \times \mathfrak{H})/\sim \quad \xrightarrow[\text{第2射影}]{} \quad \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H} \qquad \text{ここに}$$

$\sim$ は $(z, \tau) \sim (z + m\tau + n, \tau) \quad (m, n \in \mathbb{Z})$

$$(z, \tau) \sim \left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$$

で生成される同値関係. そして ${}_c\theta$ は

$${}_c\theta(z, \tau) = q^{\frac{c^2-1}{12}} (-t)^{\frac{c-c^2}{2}} \cdot f_q(t)^{c^2} f_q(t^c)^{-1}$$

$$q = e^{2\pi i\tau}, \quad t = e^{2\pi i z}, \quad f_q(t) = \prod_{n \geq 0}(1-q^n t) \times \prod_{n>0}(1-q^n t^{-1})$$

と定義されるものである.

<u>Siegel unit</u> $(\alpha,\beta)\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\times\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}-\{(0,0)\}$ と，6と互いに素な整数 c に対し，Siegel unit ${}_c g_{\alpha,\beta}\in\mathcal{O}(Y(N))^\times$ が

$$ {}_c g_{\alpha,\beta}(\tau) = {}_c\theta\left(\frac{a}{N}\tau+\frac{b}{N},\ \tau\right) \qquad ここに\ \alpha=\frac{a}{N},\ \beta=\frac{b}{N} $$

と定義される．つまり ${}_c g_{\alpha,\beta}$ は，${}_c\theta$ の $\mathcal{E}$ の等分点

$\tau\mapsto(\frac{a}{N}\tau+\frac{b}{N},\tau)$: $Y(N)\longrightarrow\mathcal{E}$ における値．

<u>Beilinson elements</u> 6と互いに素な整数 c,d に対し

$$ {}_{c,d}\kappa_N = \{{}_c g_{\frac{1}{N},0},\ {}_d g_{0,\frac{1}{N}}\}\in K_2(Y(N)) $$

が Beilinson element と呼ばれる zeta の化身である．

c や d という補助の数を除くためには，$c\equiv1 \bmod N$, $(c,6)=1$, $c\neq\pm1$ なる c をとって

$$ g_{\alpha,\beta} = {}_c g_{\alpha,\beta}\otimes\frac{1}{c^2-1}\in\mathcal{O}(Y(N))^\times\otimes\mathbb{Q} $$

とおくと，これは c のとり方によらない．

$$ \kappa_N = \{g_{\frac{1}{N},0},\ g_{0,\frac{1}{N}}\}\in K_2(Y(N))\otimes\mathbb{Q} $$

とおく．

<u>Eisenstein series</u> $(\alpha,\beta)\in\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\times\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}-\{(0,0)\}$ と，6と互いに素な整数 c，$r\geq1$ に対し

$$ {}_cE^{(r)}_{\alpha,\beta}(\tau) = \left(\frac{d}{2\pi i\,dz}\right)^r \log({}_c\theta(z,\tau)) $$

とおく．$r\neq2$ なら $E^{(r)}_{\alpha,\beta}=\dfrac{1}{c^2-c^r}\,{}_cE^{(r)}_{\alpha,\beta}$ $((c,6)=1,\ c\equiv1 \bmod N,\ c\neq\pm1)$

とおくとこれは c のとり方によらない．そして $r\geq3$ なら

$$ E^{(r)}_{\alpha,\beta}(\tau) = (-1)^{r-1}\times\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^r}\times\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\frac{a}{N}\tau+\frac{b}{N}+m\tau+n)^r}. $$

志村 element　6と互いに素な整数 c, d と, $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ なる整数 a, b に対し

$${}_{c,d}\omega_N^{(a,b)} = {}_cE^{(a)}_{\frac{1}{N},0} \cdot {}_dE^{(b)}_{0,\frac{1}{N}} \in M_{a+b}(Y(N))$$

とおく. $a \neq 2$, $b \neq 2$ のとき

$$\omega_N^{(a,b)} = E^{(a)}_{\frac{1}{N},0} \cdot E^{(b)}_{0,\frac{1}{N}} \in M_{a+b}(Y(N))$$

とおく.

Beilinson element, 志村 element の, $\mathbb{C}$ 上での zeta 関数との関係は次のとおり.

定理 (Beilinson). Beilinson の regulator map

$$K_2(Y(N)) \longrightarrow H^1(Y(N) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \ \mathbb{Z}\cdot 2\pi i)^+ \otimes \mathbb{R}$$

による κ_N の像は

$$\Big(\lim_{s \to 0} s^{-1} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,N)=1}}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \Big) \cdot (\delta + \bar{\delta})$$

ここに $T(n)$ は Hecke 作用素, δ は「0から $i\infty$ への虚軸」$\in H_1(X(N)\otimes\mathbb{C}, \mathrm{cusps}, \mathbb{Z})$
$\cong H^1(Y(N)\otimes\mathbb{C}, \mathbb{Z}\cdot 2\pi i)$

定理 (志村). Eichler–Shimura 同型

$$M_k(Y(N)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H^1(Y(N)\otimes\mathbb{C}, \ \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z})^+ \otimes \mathbb{R}$$

による $\omega_N^{(a,b)}$ $(a \geqq 1, b \geqq 1, a+b=k, a \neq 2, b \neq 2)$ の像は

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,N)=1}}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \Big|_{s=k-1} \cdot \Big\{ \frac{\delta_N^{(a,b)}}{(2\pi i)^{k-1}} + \Big(\frac{\overline{\delta_N^{(a,b)}}}{(2\pi i)^{k-1}} \Big) \Big\}.$$

ここに, f は universal elliptic curve $\mathcal{E} \to Y(N)$, $\delta_N^{(a,b)}$ は

$H^1(Y(N)\otimes\mathbb{C}, \ \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z})^+$ の重要な元で,

「τが0から i∞まで虚軸を走るときの

$\mathrm{Sym}^{k-2} H_1(f^{-1}(\tau), \mathbb{Z})$ の元　(道「0からτへ」$)^a \cdot$ (道「0から1へ」$)^e$

の総体」$\in H_1(X(N)\otimes\mathbb{C},$ cusps, local system $\tau \mapsto H_1(f^{-1}(\tau), \mathbb{Z}))$

$$\cong H^1(Y(N)\otimes\mathbb{C}, \quad \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z}).$$

3° ゼータの化身のp進性質

1° に登場した円単数と $\omega_N^{(r)}$ $(r\geqq 1)$, Beilinson element と志村 element は, p進世界の中で次のように関係する. 志村 element は, 上の定理(志村)により $L(f, \chi, k-1)$ に関係するので, Beilinson element は $L(f, \chi, k-1)$ に p-adic に関係するのである.

<u>定理</u>

$$\varprojlim_n \mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})^\times \longrightarrow \varprojlim_n H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1))$$
$$\cong \varprojlim_n H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1-r))$$
$$\longrightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Z}_p(1-r)) \xrightarrow[(*)]{} \mathbb{Q}(\zeta_N)\otimes\mathbb{Q}_p$$

$(r \geqq 1)$ による $((1-\zeta_{Np^n})(1-\zeta_{Np^n}^{-1}))_{n\geqq 1}$ の像は $2\omega_N^{(r)}$.

<u>定理</u>.

$$\varprojlim_n K_2(Y(Np^n)) \longrightarrow \varprojlim_n H^2(Y(Np^n), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(2))$$
$$\xrightarrow[\delta^{a,b}]{} \varprojlim_n H^2(Y(Np^n), \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(1))$$
$$\longrightarrow H^2(Y(N), (\mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z}_p)(1))$$
$$\dashrightarrow_{(*)} M_k(Y(N))\otimes\mathbb{Q}_p$$

による $({}_{c,d}\kappa_{Np^n})_{n\geqq 1}$ の像は ${}_{c,d}\,\omega_N^{(a,e)}$.

((*) は p進 Hodge 理論から定まるもの)