数理解析研究所講究録
926巻 1995年 59-72

シンプレクティック幾何における特異点論

石川 剛郎 （いしかわ ごうお、北大・理）

Dedicated to the Memory of Professor Etsuo Yoshinaga

1 イントロダクション

正則性の概念のあるところには必ず特異点論があります。

通常の多様体の微分トポロジーでは陰関数の定理が基本的な正則性定理です (§2)。それがなければ、可微分写像の特異点論は生まれませんでした。

シンプレクティック幾何にも正則性定理があります。比較的最近ギヴェンタリによって見つけられた相対ダルブーの定理がそれにあたります (§3)。相対ダルブーの定理によれば、シンプレクティック多様体の部分多様体は、そこへのシンプレクティック形式の引き戻しによって局所的には決まってしまうという柔らかな性質をもちます。この意味でシンプレクティック幾何は特異点論とよくなじみ、シンプレクティック幾何における特異点論が生育する余地があります。

実際、これからお話しようとしているのは、シンプレクティック幾何における一般化された局所部分多様体論です。ただし、話を非特異なものに限るというのは、特異点論的に見るともちろん不自然なので、特異点をもった部分多様体、あるいはそのパラメトリゼーションをあつかいます。

さて、シンプレクティック幾何における特異点論を作るとき、ひな型になるのは、やはりホイットニー・トム・マザーたちによる可微分写像の特異点論ということになります。その可微分写像の特異点論において基本的なテーマに構造安定性がありました。シンプレクティック幾何においても、相対ダルブーの定理にもとづいて、安定性すなわちシンプレクティック安定性が自然に定義できます (§4)。

マザーは、写像の安定性をヴェクトル場に関する線形条件、すなわち、無限小安定性に帰着しました。同じことをシンプレクティック安定性に対し試みてみます (§5)。このときまず問題になるのは、考えている写像空間が非特異かどうかです。非特異でないと問題を線形

化するのは無理筋です。調べてみると、それには、写像のコランクの条件が必要なことがわかってきました。

シンプレクティック多様体への写像がアイソトロピックとはシンプレクティック形式の引き戻しが零になるときにいいます。今回のはなしの主人公はアイソトロピック写像です。アイソトロピック写像はここでは2役を演じます。時には考察する対象として、そして時には証明の基本的道具として。アイソトロピック写像はラグランジュ部分多様体の拡張概念ですが、特異点論的にも無限小安定性と関連して自然な対象であることがわかってきました。そして、アイソトロピック写像のシンプレクティック安定性やラグランジュ安定性にたいしてマザー型の特徴づけを得ました (§6) 。

マザー理論では、マザーの代数機械が威力を発揮したわけですが、そのためには、写像空間の接空間に、ある種の代数構造、すなわち、関数空間上の加群構造が必要でした。それは、シンプレクティック安定性についてやラグランジュ安定性についてはクリアできました (§7) 。これには、分岐加群という概念 [11, 12] が必要だったのですが、実はこれは、筆者の修士論文 [10] で全く異なる文脈であつかっていたものでした。

ところで、特異点論とは何でしょうか。特異点論は、様々な対象の特異性の構造、および、対象全体の空間内の特異なもののなす部分空間すなわち分岐集合の構造を調べます。

分岐集合の例：(1) 1変数多項式の空間 $P_k = \{x^{k+1} + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k\}$ を考えます。P_k の中で、$F(x) = 0$ が少なくとも $\ell+1$ 重根を持つもの全体を Σ_ℓ と表します。すると、フィルトレーション $P_k \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \cdots$ が得られます。特異性にも深い浅いがあるわけです。とくに Σ_1 を k 次元スワローテイル（燕尾）と呼びます。また、P_{2k} 内の Σ_k つまり少なくとも $k+1$ 重根をもつもの全体を k 次元オープン・スワローテイル（開燕尾）とよびます。(2) 同じことを2変数多項式の空間で考えます。分岐集合は、対応する実代数曲線が特異点を持つもの全体になります。分岐集合は空間を分割し、実代数曲線のトポロジーは分岐集合を通過するときに変化します。したがって、分岐集合の構造と実代数曲線自身のトポロジーは密接に関係します。（この哲学は、生産的でもあり、いろいろな対象、たとえば、結び目や平面曲線などに対し、具体的成果をあげつつあります。）(3) 趣の異なる次のような例もあります。3次元アフィン空間内に曲線をとると空間が変容し、空間の点が、そこから曲線に接線を引けるか引けないかで差別化されます。このばあい分岐集合は、曲線の接線の織りなす曲面すなはちデベロッパブル（可展開面）ということになります。

さて、対象としてのアイソトロピック写像は具体的にはつぎのようなものです：k 次元オープン・スワローテイルのコノーマル・バンドルを $2k$ 次元オープン・ホイットニー・アンブレラあるいはオープン・ケーレー・ホイットニー・モラン・ギヴェンタリ・アンブレラあるいは単にオープン・アンブレラとよびます [6, 7]。これは余次元2の特異性をもったラグランジュ部分多様体です。いい日本語訳がありませんが、ここでは笠とよびましょう。さしがさの傘と違ってはじめから開いているので。私たちのあつかうものは、一般にはこの笠

と非特異ラグランジュ部分多様体の直積のパラメトリゼイションとしてのアイソトロピック写像です (§9)。これは、数あるアイソトロピック写像の中でシンプレクティック安定性により特徴づけられることがわかりました。

さらにこのホイットニーの笠のラグランジュ安定性を考察することにより、アーノルドによるラグランジュ部分多様体のラグランジュ安定性の特徴づけ (§8) を一般化することができました (§10)。

また、一方、アイソトロピック写像はシンプレクティック幾何における特異点論での基本的道具としては、アイソトロピック・ヴェクトル場、すなわち、シンプレクティック・ヴェクトル場の拡張概念として登場します (§5)。実は、これはアイソトロピック微分 1 形式とかんがえたほうがより自然で、この概念は、特異点論におけるシンプレクティック幾何というテーマ、あるいは、特異点論のシンプレクティック化という方向でも将来重要になると思われます。

私たちのラグランジュ特異点論のとりあつかいは、単なる一般化ではなく、アーノルド理論と違って、大域的定式化が可能であるという利点もあります。容易に想像できるように、大域的な無限小シンプレクティック安定性や無限小ラグランジュ安定性が定式化でき、それぞれ本当の安定性との同値性が期待できます。現在研究中ですが、もう証明になにも障害はないと思われます。

分類結果については §11 で少し触れました。

最後に相対ダルブーの定理の双対としてのワインシュタインの一意性定理にも言及しました (§12)。相対ダルブーの定理がシンプレクティック幾何のサブマニフォールドの話なら、ワインシュタインの一意性定理はスーパーマニフォールドの話です。

また、今回はふれませんが接触幾何においても相対ダルブーの定理はなりたちますから、接触幾何における特異点論も存在します。

それから、特異点論での言葉使いについて説明しておきます。

安定性は個々の対象の性質です。ジェネリシティーは個々の対象の性質ではありません。退化していないといった程度の意味です。だから厳密には、ジェネリックな対象というのは曖昧な表現です。通常は、近似定理と関連して語られているはずで、煩雑な定義を避けているだけです。また、ヴァーサリティーの概念がありますが、これは関数空間をその有限次元モデルを通して調べられるということです。これらは互いに関係しますが、注意して区別する必要があります。

写像の芽とは、写像の局所的なふるまいを捕らえる概念で、写像のある点、あるいはある部分空間の近傍への制限のインダクティブ・リミットです。

最後になりましたが、この原稿はいろいろな方からの助言にもとづいています。名前をいちいちあげませんが、この場を借りてあつく感謝いたします。

2 正則性定理—陰関数の定理

ふたつの写像（の芽）が同値とは、定義域と値域の微分同相（の芽）すなわち座標変換により互いに移りあうときに言います。この言葉を使うとよく知られた陰関数の定理はつぎのように表せます：

陰関数の定理： 写像芽 $f:(\mathbf{R}^n,0)\to(\mathbf{R}^p,0)$ をサブマーション (または イマーション) とすると、f は、スタンダードな $f_0=(x_1,\ldots,x_p)$ (または $(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$) と同値である。

証明： ステップ 1．適当な線形変換を使って、$f_t=tf+(1-t)f_0$ が、各 $t\in[0,1]$ でサブマーション (または イマーション) と仮定してよい。これは簡単な線形代数。

ステップ 2．f_t の同値類は $[0,1]$ で 開集合、つまり、各 t_0 について、t_0 に近い t をとれば、f_t は f_{t_0} に同値になることを示す。そのためには $f_t\circ\sigma_t=f_{t_0}$ (または$\tau\circ f_t=f_{t_0}$) となる微分同相の芽$\sigma_t,\sigma(0)=0$ (または $\tau_t,\tau(0)=0$) を構成すればよいが、それには、まず、パラメーター付きの線形代数により、その無限小版の変分方程式 $df_t/dt+(f_t)_*\xi_t=0,\xi_t(0)=0$ (または $df_t/dt+\eta_t\circ f_t=0,\eta_t(0)=0$) を満たすヴェクトル場 ξ_t (resp. η_t) を見つける。つぎにそれを積分して、微分同相を作る。ここで常微分方程式の解の存在と一意性を使っている。

ステップ 3．区間 $[0,1]$ は連結だから、単一の同値類からなり、従って、$f=f_1$ と f_0 は同値。（証明おわり）

陰関数の定理の証明にはいろいろありますが、上の証明は、一般性があるという点ですぐれています。たとえば、モースの補題の証明、シンプレクティック幾何におけるモーザーやワインシュタインの方法、次にのべる相対ダルブーの定理の証明や、あるいは一方でこれから述べていくように特異点論におけるトム・マザーの構造安定性につながっていきます。

3 正則性定理—相対ダルブーの定理

多様体 M 上にシンプレクティック形式すなわち非退化閉微分 2 形式 $\omega:TM\times TM\to\mathbf{R}$ があたえられたとき、M をシンプレクティック多様体とよびます。典型的な例は、多様体 Y 上のコタンジェント・バンドル T^*Y です。T^*Y 上にはリュービル 1 形式 θ_Y があります。それは、Y 上の任意の微分 1 形式 $\alpha:Y\to T^*Y$ に対し$\alpha^*\theta_Y=\alpha$ がなりたつということで特徴づけられます。Y の局所座標 $q_1,\ldots,q_m$ と対応する T^*Y のカノニカル座標 (q,p) にかんし、$\theta_Y=\sum p_i dq_i$ です。T^*Y のシンプレクティック構造は $\omega=d\theta_Y$ であたえられます。

シンプレクティック多様体 (M,ω) では ω により TM と T^*M との同型が与えられているので、ヴェクトル場と微分 1 形式が自然に対応します。M 上の関数 a の外微分 da に対応するヴェクトル場を a をハミルトニアンとするハミルトニアン・ヴェクトル場といいます。

これは、M のシンプレクティック微分同相を生成します。

シンプレクティック多様体へのふたつの写像（の芽）がシンプレクティック同値とは定義域の微分同相（の芽）と行き先のシンプレクティック微分同相（の芽）により互いに移りあうときに言います。このとき、シンプレクティック幾何における陰関数定理の対応物に次の結果があります。

相対ダルブーの定理（ギヴェンタリ [3]）：(M,ω) をシンプレクティック多様体とし、$f_0, f_1 : (\mathbf{R}^n, 0) \to M$ をイマーションとする。もし $f_0^*\omega = f_1^*\omega$ ならば f_0 と f_1 はシンプレクティック同値。

ノート：　この定理はよく知られているダルブー・ワインシュタインの定理（たとえば [16] や [8, 4 章 定理 1.1]）より強い結果です。シンプレクティック幾何では内在幾何が外在幾何を決めるというわけで、リーマン幾何などとはまったく様相がちがいます。下の証明はギベンタリによるもの [3] と異なり、上の陰関数の定理の証明にそくした、より一般性のあるものです。また、サブマーションの場合の同様な命題は当たり前になりたちます。

証明：　$X = (\mathbf{R}^n, 0)$ とおく。シンプレクティック線形代数により f_0 と f_1 を $f_t : X \to M$ がイマーションで $f_t(0) = p$ コンスタント、$f^*\omega$ コンスタントなものでむすぶ。それに対し、各 t_0 の近くの t について $df_t/dt + \eta_t \circ f_t = 0, \eta_t(p) = 0$ となるハミルトン・ヴェクトル場η_t を見つける。この η_t を積分すればシンプレクティック微分同相 τ_t で、$\tau_t \circ f_t = f_{t_0}$ となるものが得られる。いま、f_t に沿ったヴェクトル場 $v_t = df_t/dt : X \to TM$ はシンプレクティック構造からきまる同型 $TM \cong T^*M$ により f_t に沿った 1 形式と思えるが、あとでのべるように、$f_t^*\omega$ がコンスタントということから v_t はアイソトロピックすなわち $v_t^* d\theta_M = 0$ となる。ここで、θ_M は先に述べた T^*M 上のリュービル形式。$v_t^*\theta_M$ はクローズドだからポアンカレの補題からエグザクト。よって $v^*\theta_M = d(a_t \circ f_t)$ となる M 上の関数 a_t がある。$v_t - da_t \circ f_t$ に相対ポアンカレの補題 [16] をあてはめると、$v_t - da_t \circ f_t = db_t \circ f_t, b_t \circ f_t = 0$ となる M 上の関数 b_t がある。η_t を $a_t + b_t$ をハミルトニアンとするハミルトン・ヴェクトル場ととればよい。（証明おわり）

4　自明性と安定性

さきに見た正則性定理の証明での重要なステップは写像芽の変形の自明性です。これは安定性の概念と密接に関係します。

定義：(1) シンプレクティック多様体 (M,ω) への（かならずしもサブマーションやイマーションとは限らない）写像芽 $f : X \to M$ がシンプレクティック安定とは、条件 $f_t^*\omega = f^*\omega$ をみたす f の任意の変形 $f_t : X \to M, f_0 = f,$ がシンプレクティック同値で自明なときに言います。つまり $\tau_t \circ f_t \circ \sigma_t = f$ をみたす微分同相芽の族 σ_t とシンプレクティック微分同相

芽 τ_t の族が 0 にちかい任意の t について見つかるときです。ただしσ_t や τ_t は t が動くとき基点を動かしてもいいとします。

(2) M が特にコタンジェント・バンドル T^*Y のとき $f: X \to T^*Y$ がラグランジュ安定とは、(1) で、τ_t をラグランジュ微分同相にとれる、つまり、ファイブレーション $T^*Y \to Y$ について Y の微分同相をカバーするようにとれるときに言います。

あきらかに、ラグランジュ安定ならばシンプレクティック安定です。

注意： 通常の写像芽の（C^∞）安定性は上の (1) の定義で条件 $f_t^*\omega = f^*\omega$ と、τ_t がシンプレクティックということを除けば同様に定義できます。

相対ダルブー定理の証明から、イマーションやサブマーションはあきらかにシンプレクティック安定ですが、特異点をもつ場合はどうでしょうか。

例： 写像芽 f がフォールドとは、モース関数と微分同相の直積と同値のときに言います。

系： $f: X \to M$ がフォールドならばシンプレクティック安定である。

証明は C^∞-ノーマリゼイションの理論 [5] に相対ダルブーの定理をあてはめれば容易にできます。一般に、C^∞ 安定ならばシンプレクティック安定か、という問題提起ができますが、これは未解決です。

5 無限小安定性

ここでは主にアイソトロピック写像にたいしてシンプレクティック安定性やラグランジュ安定性を考えます。シンプレクティック多様体への写像がアイソトロピックとはシンプレクティック形式の引き戻しがゼロのときに言います。どうしてアイソトロピック写像をあつかうのかということも説明します。が、とりあえず、一般にシンプレクティック安定性の無限小版を考えてみることにしましょう。

X を n 次元多様体、(M,ω) を $2m$ 次元シンプレクティック多様体とし、簡単のため $n \leq m$ とします。写像 $f: X \to M$ にたいし、一階非線形偏微分方程式 $f^*\omega = \rho$ を考えます。ただし ρ は X 上のあたえられた閉微分 2 形式です。その解空間を Sol_ρ と書きます。$\rho = 0$ のときは、アイソトロピック写像全体になります：

オブザヴェーション：Sol_ρ の特異性は $\{f \in \mathrm{Sol}_\rho \mid \mathrm{corank} f \geq 2\}$ 上にある。つまり $\mathrm{Sol}_\rho \cap \{\mathrm{corank} f \leq 1\}$ は特異性を持たない。

コランクはこの場合、微分写像のカーネルの次元を意味します。実際, 関数空間 $C^\infty(X, M)$ から X 上の閉 2 形式全体の空間への写像 Φ が$\Phi(f) = f^*\omega$ で定義できますが、Φ は $\mathrm{corank} f \leq$

1 の範囲でサブマーション、すなわち、$f^*\omega$ の任意の 1 パラメーター変形$\rho_t, \rho_0 = f^*\omega$ が必ず $f_t, f_0 = f, \Phi(f_t) = f_t^*\omega = \rho_t$ とリフトできます。そして、このことは一般にコランクが 2 以上のときは成立しません。

では、コランクが 1 以下の範囲内で $\mathrm{Sol}_\rho = \Phi^{-1}(\rho)$ のタンジェント・スペースはどう記述されるでしょうか。

いま f_t を f の 1 パラメーター変形で $f_t^*\omega = f^*\omega = \rho$ であるものを取ります。一般に、写像の族 $f_t : X \to M$ に対し、f_t に沿ったヴェクトル場 $df_t/dt : X \to TM$ を X の各点 x と M 上の関数 a について

$$\frac{df_t}{dt}(x)(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a(f_{t+h}(x)) - a(f_t(x))}{h}$$

で定義します。今の場合 M にシンプレクティック構造がありますから、$v_t = df_t/dt : X \to TM \cong T^*M$ と思えます。そして、T^*M には M の構造とは関係なく、リュービル形式の外微分 $d\theta_M$ により、シンプレクティック構造を持ちます。

オブザヴェーション： $f_t^*\omega$ がコンスタントのとき $v_t = df_t/dt : X \to T^*M$ は各 t についてアイソトロピック、すなわち、$v_t^* d\theta_M = 0$ となる。

とくに、$v = df_t/dt|_{t=0}$ は $f = f_0$ に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場となります。逆に f に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場 v に対し、Sol_ρ 内での f の 1 パラメーター変形 f_t で $v = df_t/dt|_{t=0}$ となるものを見つけることができます。すなわち、コランク 1 以下の範囲で $T_f\mathrm{Sol}_\rho = VI_f, (\rho = f^*\omega)$ と記述されます。ただし、VI_f は f に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場全体をあらわします。

さて、f がたとえばシンプレクティック安定であるためには、$\tau_t \circ f_t \circ \sigma_t = f$ をみたす微分同相芽 σ_t とシンプレクティック微分同相芽 τ_t を持たなければなりません。したがって、必要条件として、任意にあたえられた $v \in VI_f$ にたいして、マザー型方程式 $v = f_*\xi + \eta \circ f$, をみたす、$X$ 上のヴェクトル場の芽ξ と M 上のハミルトン・ヴェクトル場の芽η が存在するはずです。

(1) この必要条件をみたす写像芽 f は無限小シンプレクティック安定であるといいます。

(2) $M = T^*Y$ のとき、f が無限小ラグランジュ安定とは、上の条件で、η がラグランジュ・ヴェクトル場にとれるとき、すなわち、ラグランジュ微分同相を生成するとき、すなわち、ハミルトニアンが、ファイバー座標に関して、非斉次リニアであるときに言います。

ところで、f 自身がアイソトロピックというのは、この文脈でどう捕らえられるでしょうか。

オブザヴェーション：X 上の任意のヴェクトル場 ξ に対し 押し出し $f_*\xi$ がアイソトロピック・ヴェクトル場である必要十分条件は f がアイソトロピック写像なことである。

このことが、アイソトロピック写像をあつかう理論的な動機になります。

6 マザー型定理

定理 ([14])： コランク1以下のアイソトロピック写像芽 $f: X^n \to M^{2m}$, $n \leq m$, に対し f がシンプレクティック安定（またはラグランジュ安定）であるための必要十分条件は、無限小シンプレクティック安定（または、無限小ラグランジュ安定）なことである。

マザー [15] は写像芽 $f: X = (\mathbf{R}^n, 0) \to Y = (\mathbf{R}^p, 0)$ の安定性と無限小安定性すなわち条件 $V_f = tf(V_X) + wf(V_Y)$ が同値なことを示しました。ここで、V_f は f に沿ったヴェクトル場全体、V_X と V_Y をそれぞれ X と Y 上のヴェクトル場全体とし、$tf: V_X \to V_f$ を $tf(\xi) = f_*\xi$ で $wf: V_Y \to V_f$ を $wf(\eta) = \eta \circ f$ で定義します。

このとき重要だったのは、これらのある種の代数構造でした。いま、E_X で X 上の関数の X の基点での芽全体をあらわしましょう。E_X は自然に可換環の構造をもちます。V_f と V_X はポイント・ワイズの積により E_X 加群になります。また V_Y は E_Y 加群になります。さらに、$tf: V_X \to V_f$ は E_X 準同型になるし、$wf: V_Y \to V_f$ は f^* を経由して E_Y 加群になります。ここで、$f^*: E_Y \to E_X$ は f の引き戻しによる準同型です。このような代数的データを、いわゆるマルグランジュ・マザーの準備定理をもとにした組織的な処理方法、すなはち代数機械によって無限小安定性から安定性を示したわけです。

さて、無限小シンプレクティック安定性（または、無限小ラグランジュ安定性）からシンプレクティック安定性（または、ラグランジュ安定性）を導きたいわけですが、マザーの理論 [15] や、さらにはデーモンの理論 [4] と比較したとき、最大のネックとなるのは、$VI_f \subset V_f$ が E_X 部分加群ではない、f^* を通して E_M 部分加群でさえないということです。部分ヴェクトル空間ではありますが。そこで、マザーの代数機械を作動させるには、アイソトロピック・ヴェクトル場全体の空間 VI_f になにか自然な加群構造を入れる必要が生じます。

7 分岐加群

さて $v: X \to TM$ をアイソトロピック・ヴェクトル場とします。この意味は、M のシンプレクティック構造により TM を T^*M を同一視したとき、$v: X \to T^*M$ がシンプレクティック多様体への写像としてアイソトロピック、すなわち、$v^*d\theta_M = 0$ ということでした。すると、$v^*\theta_M$ は X 上の閉微分1形式ですから、ローカルには完全です。つまり、X 上の関数芽 $e \in E_X$ があって、$v^*\theta_M = de$ となります。この場合、関数 e を v の母関数とよびますが、母関数は定数をのぞいて一意的にきまります。X の基点を x_0 としたとき、$e(x_0) = 0$ とできます。ある写像芽に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場の母関数全体は特別な関

数族を形成します。

一般に写像芽 $f : X \to M$ にたいし

$$R_f = \{eE_X \mid a_i \in E_X \text{ があって } de = \sum_i a_i df_i\}$$

とおきます。ここで、f_i たちは f の成分です。R_f は座標系のとりかたによらず f のみにより定まります。これを f の分岐加群とよぶことにしましょう。

分岐加群の性質：(1) 居場所は $f^*E_M \subset R_f \subset E_X$ である。(2) $R_f = E_X$ であるのは f がイマーションの時にかぎる。(3) R_f は E_X の f^*E_M-部分加群であると同時に、$\mathbf{R}$-部分代数である。より強く、R_f は C^∞ 演算に関し閉じている。つまり $h_1, \ldots, h_r \in R_f$ と $\mathbf{R}^r$ 上の C^∞ 関数 a にたいし $a \circ h \in R_f$ となる。ただし、$h = (h_1, \ldots, h_r) : X \to \mathbf{R}^r$ とおいた。(4) とくに R_f は極大イデアル $m(R_f) = \{e \in R_f \mid e(x_0) = 0\}$ をもつローカル代数となる。

さて母関数をとる写像はヴェクトル空間としてのリニア写像 $e : VI_f \to m(R_f)$ を導きます。これは全射です。このカーネルは $VI'_f = \{v \in VI_f \mid v^*\theta_M = 0\}$ で、これはある種の関係式の全体なのであきらかに V_f の E_X 部分加群、したがって、f^* を通して E_M 加群の構造をもちます。

目標の VI_f の加群構造ですが、ヴェクトル空間の完全列

$$0 \longrightarrow VI'_f \longrightarrow VI_f \xrightarrow{e} m(R_f) \longrightarrow 0$$

が E_M エグザクトになるように E_M 加群の構造を入れることができます。すなはち、$v \in VI_f$ と $a \in E_M$ に対し、

$$a * v = a \circ f \cdot v + e(v) \cdot (da) \circ f$$

と定義するわけです。ここで、$\cdot$ は通常のポイント・ワイズの積です。また、da は M 上の1形式ですが、ハミルトン・ヴェクトル場と思っています。

これが論文 [14] の最大のアイディアです。また、これからのべるアーノルド型特徴づけにも本質的役割をはたします。

8　ラグランジュ部分多様体とラグランジュ特異点論

ラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何において重要な対象です。

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし、L を M の部分多様体としたとき、L が M のラグランジュ部分多様体であるとは、L が 微分方程式 $\omega = 0$ の最大次元積分多様体になっているときにいいます。このとき、L の次元は M の次元の半分になっていることがわかります。

ラグランジュ部分多様体の典型的な例は、$M = T^*Y$ のときの、Y 上の微分閉 1 形式のグラフと Y の部分多様体のコノーマル・バンドルです。

ラグランジュ部分多様体をパラメーターづけるイマーションをラグランジュ・イマーションといいます。いいかえれば、アイソトロピック・イマーション $f : X \to M$ で $\dim X = (1/2)\dim M$ のときです。

ヘルマンダーはラグランジュ・イマーションが局所的には関数族から構成できることを最初に指摘しました [9]。アーノルドは、その関数族すなわち母関数族によって、ラグランジュ・イマーションのラグランジュ安定性を特徴づけました [2]。それを復習してみましょう。

$Y = \mathbf{R}^n$ とし、$\mathbf{R}^k \times Y$ 上の $(0,0)$ における関数の芽 $F(u,y), (u,x) \in \mathbf{R}^k \times Y$ を考えます。F の 各 u 偏微分が消えるところ $X \subset \mathbf{R}^k \times Y$ が強い意味で非特異とします。すると、ラグランジュ・イマーション $f : X \to T^*Y$ が $f(u,y) = (\partial F/\partial y, y), (u,x) \in X$ で定義できます。いま、F を $\phi = F|_{y=0}$ の変形と思ったとき、f がラグランジュ安定であるための必要十分条件は、$1, \partial F/\partial y_1|_{y=0}, \ldots, \partial F/\partial y_n|_{y=0}$ が実ヴェクトル空間 $E_k/\langle \partial\phi/\partial u_1, \ldots, \partial\phi/\partial u_k \rangle E_k$ を生成することです。これがアーノルドの特徴づけです。

9　ホイットニーの笠

正の整数 n と非負整数 k で $0 \le k \le [n/2]$ をみたすものに対し、写像芽 $f = f_{n,k} : (\mathbf{R}^n, 0) \to (T^*\mathbf{R}^n, 0)$ を $q_1 \circ f = x_1, \ldots, q_{n-1} \circ f = x_{n-1}$ かつ

$$q_n \circ f = u = \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!} + x_1 \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + x_{k-1} x_n,$$

$$p_n \circ f = v = x_k \frac{x_n^k}{k!} + \cdots + x_{2k-1} x_n,$$

$$p_i \circ f = \int_0^t \partial(v,u)/\partial(x_i, x_n) dx_n, \qquad 1 \le i \le n-1,$$

で定義します。ただし、$\partial(v,u)/\partial(x_i, x_n)$ はヤコビアンです。

定義：$f : X \to M$ が次元 n タイプ k のホイットニーの笠、$0 \le k \le [n/2]$、とは、$f_{n,k}$ とシンプレクティック同値のときに言います。

$k = 0$、すなわち、コランク 0 のときがラグランジュ・イマーションのローカル・モデルです。コランク 1 のときは、ローカル・モデルの種類が次元の半分ぐらいあります。ちなみに、k が異なると $f_{n,k}$ たちは同値でないので、シンプレクティック同値でもありません。次の性質はエッセンシャルです：

基本的性質：ホイットニーの笠 $f : X \to M$ は、たかだか余次元 2 の特異性をもち、また分岐加群について $R_f = f^* E_M$ をみたす。

イントロダクションでのべた k 次元オープン・スワローテイルのコノーマル・バンドルは、次元 $2k$ タイプ k のホイットニーの笠に相当します。

さらに次の結果は、ホイットニーの笠のシンプレクティック安定性による特徴づけであると同時に、シンプレクティック安定なものの具体的な標準形をあたえます。

命題： $f: X^n \to M^{2n}$ をコランク 1 以下のアイソトロピック写像芽とする。このとき、f がシンプレクティック安定であるための必要十分条件は f がホイットニーの笠であることである。

したがって、つぎはホイットニーの笠のラグランジュ同値による分類が問題となります。

10 アーノルド型定理

定理 ([14])： コランク 1 以下のアイソトロピック写像芽 $f: X^n \to M^{2n} = T^*Y$ に対し、次は同値：

(1) f はラグランジュ安定。

(2) f は ホイットニーの笠で、かつ、1 とファイバー成分 $p_1 \circ f, \ldots, p_n \circ f$ が $Q(f) = f^*E_{T^*Y}/\langle q_1 \circ f, \ldots, q_n \circ f\rangle f^*E_{T^*Y}$ を実ヴェクトル空間として生成。

(3) f は無限小ラグランジュ安定、すなわち、$VI_f = tf(V_X) + wf(VL_{T^*Y})$ が成立。

ここで、VL_{T^*Y} は T^*Y 上のラグランジュ・ヴェクトル場全体です。§5 を参照ください。

この定理は、アーノルドによるラグランジュ安定なラグランジュ・イマーション、すなわち、コランク 0 のケースの特徴づけの一般化をあたえています。

実際、§8 にのべた構成において、プロジェクション $X \subset \mathbf{R}^k \times Y \to \mathbf{R}^k$ はヴェクトル空間 $E_k/\langle \partial\phi/\partial u_1, \ldots, \partial\phi/\partial u_k\rangle E_k$ と $E_X/\langle q_1 \circ f, \ldots, q_n \circ f\rangle E_X$ を誘導します。そして、f がイマーションなら $f^*E_{T^*Y} = E_X$ です。生成元たちはそれぞれ対応するので、定理の条件 (2) は、アーノルドの条件に一致します。

証明にはホイットニーの笠の基本的性質と、VI_f の代数構造、分岐加群 R_f、をからめて行います。

11 横断性とジェネリシティー

先にみたように、シンプレクティック安定なものは具体的な標準形（ホイットニーの笠）をもっていました。ではラグランジュ安定なものの分類はできるでしょうか。ラグランジュ部

分多様体のときには、まさにヘルマンダー・アーノルド理論により、関数の変形（母関数族）の話に帰着され、すでに膨大な分類表が得られています。しかし、一般のアイソトロピック写像は、マスロフ指数の存在から、母関数族を持ちません。また、通常のC^∞安定写像はマザー理論により代数的にあざやかに分類できますが、しかし、このとき重要なK同値（コンタクト同値）に対応する概念は、シンプレクティック特異点論ではまだ発見されていません。これが現状です。現在のところ、ジェネリシティーと関連した分類結果を若干得ています。

まず、ジェネリシティーの議論でキーポイントになるのが横断性定理です。

定理 ([13])： コランク1以下のアイソトロピック写像に対し横断性定理がなりたつ。

さらに、一般に写像空間 Sol_ρ に対しても同様の横断性定理がなりたちます。

具体的な分類結果をのべるために、写像芽 $f: X \to T^*Y$ の L-コランクを$\pi \circ f$ のランクとして定義します。ただし、π はコタンジェント・バンドルの自然なプロジェクションです。X と Y をともに n 次元とします。

定理 ([12])：ジェネリックな L-コランク1以下のアイソトロピック写像芽 $X \to T^*Y$ は $f = f_{n,k,\ell} : (\mathbf{R}^n, 0) \to (T^*\mathbf{R}^n, 0), 0 \le \ell \le k \le n, k+\ell \le n,$ のいづれかとラグランジュ同値。ただし、$f = f_{n,k,\ell}$ は、次で定義されるアイソトロピック写像芽である：$q_1 \circ f = x_1, \ldots, q_{n-1} \circ f = x_{n-1}$ かつ

$$q_n \circ f = u = \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!} + x_1 \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + x_{k-1}x_n,$$

$$p_n \circ f = v = \pm \frac{x_n^{\ell+1}}{(\ell+1)!} + x_k \frac{x_n^{\ell}}{\ell!} + \cdots + x_{k+\ell-1}x_n,$$

$$p_i \circ f = \int_0^t \partial(v,u)/\partial(x_i, x_n) dx_n, \qquad 1 \le i \le n-1,$$

さらに、これらがラグランジュ安定であることが、マザー型定理からわかります。ただし、$n \ge 4$ のときは、コランク1で、L-コランク2のジェネリックなアイソトロピック写像芽が存在することもわかっています [13]。

12　相対ダルブーの定理の双対

相対ダルブーの定理の双対はいったい何でしょう。それは、ワインシュタインによるシンプレクティック実現の一意性定理です [17]。いまシンプレクティック多様体からの写像芽 $f: (M, \omega) \to Y$ を考えてみましょう。このとき、これらにはシンプレクティック同値の概念

が自然に定義できます。一方、シンプレクティック構造にはポワッソン構造が付随し、それをも ω と書くと、Y 上にポワッソン構造 $f_*\omega$ が誘導されます：$\{a,b\}_{f_*\omega}=\{a\circ f, b\circ f\}_\omega$、ただし a,b は Y 上の関数。

定理（ワインシュタイン）: ふたつの写像芽 $f:M\to Y$ をそれぞれサブマーションとする。もし誘導されたポワッソン構造 $(Y,f_*\omega)$ と $(Y,f'_*\omega)$ が同型ならば、f と f' はシンプレクティック同値である。

特異点をもつ f にたいする安定性や標準形の議論は、たとえば、f がコアイソトロピックの時、特異な積分可能力学系の研究と結びつきますが、この方向からの一般的研究は残念ながらまだないようです。

References

1. R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics,* 2nd. ed., Benjamin, 1978.

2. V.I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k, and Lagrangian singularities,* Funktsional Anal. i Prilozhen., **6** (1972), 3–25.

3. V.I. Arnol'd, A.B. Givental', *Symplectic geometry* in Dynamical Systems IV, ed. by V.I. Arnol'd, S.P. Novikov, Encyclopaedia of Math., Springer-Verlag, 1990, pp. 1–136.

4. J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of A and K*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. **50**, No. **306**, Amer. Math. Soc., 1984.

5. T. Gaffney, L. Wilson, *Equivalence of generic mappings and C^∞ normalization*, Comp. Math. **49** (1983), 291–308.

6. A.B. Givental', *Lagrangian imbeddings of surfaces and unfolded Whitney umbrella,* Funksional Anal. i Prilozhen., **20–3** (1986), 35–41.

7. A.B. Givental', *Singular Lagrangian varieties and their Lagrangian mappings*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Prob. Mat. (Contemporary Problems of Mathematics) 33, VITINI, 1988, pp. 55–112.

8. V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Math. Surveys, no. 14, AMS, 1977.

9. L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta Math., **127** (1971), 71–183.

10. G. Ishikawa, *Families of functions dominated by distributions of C-classes of mappings*, Ann. Inst. Fourier **33–2** (1983), 199–217.

11. G. Ishikawa, *The local model of an isotropic map-germ arising from one-dimensional symplectic reduction*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 103–112.

12. G. Ishikawa, *Parametrized Legendre and Lagrange varieties*, Kodai Math. J., **17–3** (1994), 442–451.

13. G. Ishikawa, *Transversalities for Lagrange singularities of isotropic mapping of corank one*, Proc. Banach Center Symp. on Singularities and Differential Equations, 1995, to appear.

14. G. Ishikawa, *Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas*, Preprint.

15. J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings II, Infinitesimal stability implies stability*, Ann. of Math., **89** (1969), 254–291.

16. A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Adv. in Math. **6** (1971), 329–346.

17. A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifold*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 523–557.

e-mail: ishikawa@math.hokudai.ac.jp