数理解析研究所講究録
930 巻 1995 年 20-24

スペッカー現象と Hawaiian earring

江田勝哉
早稲田大学理工学部, 新宿区大久保 169
eda@logic.info.waseda.ac.jp

1995 年 10 月 24 日

(以下は集会のときにお渡ししたアブストラクトの手直しをしたものです.)

去年, 早稲田の集会で話したスペッカー現象について集会の後すぐに例の Shelah がスペッカー現象に関する基数 $\mathfrak{se}$ について集会の後すぐに主要な問題を解決しました。それでその報告およびその周辺の問題を述べること, また筆者が何故スペッカー現象に興味があるのかという動機づけについて話します.

「スペッカー現象」という命名は A. Blass [2] によるもので [8] で導入した概念です. E. Specker [17] が $\mathbf{Z}^\omega$ から $\mathbf{Z}$ への準同型写像が射影で生成される自由アーベル群となることを証明しこの話題はすべてここにルーツがあるのです. ついでに言いますと E. Specker は数学基礎論ではよく知られた人で ${}^\omega\omega$ の研究では Specker-type という名前がついているものもあります. Specker の学位論文は Cohomology 群に関する研究です. そのため $\mathbf{Z}^\omega$ および $\mathbf{Z}$ の直積の研究を [17] でしたようです. E. C. Zeeman [18] も Cohomogy 群の関係からの興味での研究だと思います. ついでのついでですが筆者自身は Sheaf cohomology 群に対する興味 [7] からブール巾 $\mathbf{Z}^{(B)}$ および $\mathbf{Z}$ の直積に興味をもちました. これもついでですが Shelah は現在でもアーベル群論のスーパースターです. アーベル群での構造定理は有限生成のアーベル群の基本定理, 可算 torsion 群に関する Ulm の定理およびその拡張 (totally projective groups) で大体つきていて, ここ15年位前から torsion-free 群有限 rank もある程度わかるといった程度です. Shelah の色々な結果 (1974 ~) の衝撃・影響が大きいというだけでなく今でも Shelah の得意分野のひとつであり, アーベル群の研究者の多くは Shelah を意識しているようです. (もちろんゼーンゼン気にしていない人もいます.) また, 4,5 年前に Patrick Keef [15] が Torsion 群に関して Kurepa Hypothesis が本質的に関係した結果を証明しました. Shelah のアーベル群に関する多くの結果は $\aleph_1$-free 群あるいは κ-free 群と呼ばれる群に関する結果ですが Shelah の観点はモデル理論的なところにあるのでその手法は Torsion 群および非可換群にも応用されていることがかなりあり, 本人の論文もあります. でも $\mathbf{Z}$ の直積の部分群に関する論文はあまりないようです [13][4]. 特に $\mathbf{Z}^\omega$ の部分群は集合論的な対象と思える対象で, 極めて自由アーベル群に近い感じがするので代数的な感覚では手がつかない対象ですが, アーベル群をまともに研究しようとすると気になる対象です. (代数関係に集合論的手法が応用さ

れている論文として [5], κ-free 群のある意味での究極的結果として [16] をあげておきます.)

脱線からもどりまして $\mathbf{Z}^\omega$ の部分群 G, $a_n \in G$ $(n < \omega)$ に対してスペッカー現象があるとは任意の準同型写像 $h : G \to \mathbf{Z}$ について $h(a_n) = 0$ がほとんどすべての n について成り立つことをいいます.

とくに $a_n = \mathbf{e}_n$ のときをあつかいます. $(\mathbf{e}_n(m) = \delta_{mn})$ このとき G がちょっとした条件を満たすと $Hom(G, \mathbf{Z})$ は射影で生成される自由アーベル群となります.

一方 $Hom(\mathbf{Z}^\omega, S) \simeq \oplus_\omega Hom(\mathbf{Z}, S)$ が成立するアーベル群はスレンダー群と呼ばれています. スレンダー群はきれいな特徴づけがあります. ずいぶん以前から Hawaiian earring $\mathbf{H} = \{(x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2 : 1 \leq n < \omega\}$ について興味をもっているのですがこれは $\mathbf{Z}^\omega$ と次のようにつながっています. まず Céch Homology 群 $\check{H}_1(\mathbf{H}, \mathbf{Z})$ は $\mathbf{Z}^\omega$ と同型です. Singular Homology 群 $H_1(\mathbf{H}, \mathbf{Z})$ は何度か話ているようになかなか複雑なのです. これは基本群 $\pi_1(\mathbf{H}, o)$ のアーベル化です. この $\pi_1(\mathbf{H}, o)$ を代数的に表したものを使い非可換群に対してスレンダー群という概念を拡張し, 非可換的スレンダー群と呼びます. [10] アーベル群が非可換的スレンダー群であることはスレンダー群であることと同値になります. 連続関数 $f : X \to Y$ は Homology 群や基本群のあいだの準同型写像 f_* を引き起こします. このような準同型写像を空間的と呼ことにします.

定理 1 *[12][10]* アーベル群 A がスレンダー群であることは $H_1(X, \mathbf{Z}) \simeq A$ なる任意の空間 X について任意の準同型写像 $h : H_1(\mathbf{H}, \mathbf{Z}) \to H_1(X, \mathbf{Z})$ が空間的であることと同値である. $\check{H}_1(*, \mathbf{Z}), H_1^T(*, \mathbf{Z})$ についても同じことが成立する. 群 G が非可換的スレンダー群であることは $\pi_1(X, x) \simeq G$ なる任意の空間 X について任意の準同型写像 $h : \pi_1(\mathbf{H}, o) \to H_1(X, x)$ が空間的であることと同値である.

つまり準同型写像が「自然な」ものという性質は Hawaiian earring をとおして「連続関数でひきおこされる」という性質と同値である. これはスレンダー群に関することだけでなく Chase の補題についてもいえます. (Blass [2] の中でスペッカー現象のほか明言されてはいませんが Chase の補題に関する結果があります.) これが Hawaiian earring とスペッカー現象とのつながりです. Hawaiian earring より複雑な対象への利用は [6] で行っています.

次にスペッカー現象に関する Brendle-Shelah の結果について述べ残された問題にふれたいと思います. Brendle-Shelah の結果は次の Blass [2] で定義された cardinal invariants に関する結果です.

$$\mathfrak{se} = \min\{|G| : G \leq \mathbf{Z}^\omega, G \text{ が } Specker \text{ 現象を起こす }\}$$

これは有り難いことに Specker-Eda の略なのだそうですが Shelah が次にのべるように Combinatrics として自然な特徴づけをしたので集合論の立場から考えても面白い基数となりました. (Brendle が [3] を書いたのち Shelah にきいたら次々とまあ例によって解い

てしまったということらしいのです．）逆にいうともうアーベル群とは直接関係ないともいえるので $\mathfrak{se}$ のもとの定義はいらないということになり，せっかくの Specker-Eda number もようなくなったともいえます．次の $\mathfrak{e}$ は evading number の略です．

$$\mathfrak{e} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \le \mathbf{Z}^\omega \ \&\ \textit{no predictor predicts all members of } \mathcal{F}\}$$

定理 2 *[4]*

$$\mathfrak{se} = \min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}\}$$

実数にからんだ Cardinal Invariant は T. Bartoszyński [1] の導入した slalom によって大変きれいに表現されそれによって色々詳しいことがわかりました．この $\mathfrak{se} = \min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{e}\}$ も次の slalom の変形を使った形で表現されます．

無限部分集合 $D \subset \omega$ と $\overline{a} = \langle a_n \in \omega^{<n} : n \in D\rangle$ に対して slalom $S_D^{\overline{a}} = \{f \in {}^\omega\omega : f(n) \in a_n \textit{ for almost all } n \in D\}$ と定義します．

定理 3 *[4]*

$$\mathfrak{se} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \le \mathbf{Z}^\omega \ \&\ \forall D, \overline{a} \exists f \in \mathcal{F}(f \notin S_D^{\overline{a}})\}$$

基数の大小の問題という観点からは $\mathfrak{b}, \mathfrak{e}$ と他の基数の関係を解明することが問題となり，[3] [4] である程度論じられていますがいろいろ新しい問題も発生し，Shelah が非常に難しいというお墨つきをつけた問題もあります．ここのところには prediction, evasion, extended slalom などが絡み色々な組み合わせ論的問題が発生していますがそれは [3] [4] を参照していただくことにします．

ここでは [9] の流れの問題にふれることにします．スペッカー現象をおこす群 G が ground model の $\mathbf{Z}^\omega$ のときを考えます．これは $\mathbf{Z}^\omega$ からブール巾 $\mathbf{Z}^{(B)}$ への準同型写像が自然な写像しかないか？という問題と同値です [9][11]．この問題は B が可算完備ブール代数であれば問題となります．

‘$\mathbf{Z}^\omega$ からブール巾 $\mathbf{Z}^{(B)}$ への準同型写像が自然な写像しかない’

ことを B がスペッカーの性質をもつということにします．（[9] では $\mathbf{Z}$ が slender 群であるという性質に付随するという意味で slender property といっていましたが，specker property と呼んだ方が適切だと思いこのように呼びます．）大ざっぱな問題として‘どんな可算完備ブール代数がスペッカーの性質をもつか？’という問題を設定します．

Cohen algebra [14], Random algebra [9], Hechler algebra [3] などがスペッカーの性質をもつことがわかっています．また完備でないブール代数についての結果は [11] にあります．Blass [2] にもいくつかの結果が載っています．具体的問題として

‘Mathias algebra はスペッカーの性質をもつか？’

をあげておきます．スペッカーの性質の関連したものとして

‘$\mathbf{Z}^{\omega_1}$ からブール巾 $\mathbf{Z}^{(B)}$ への準同型写像が自然な写像しかない B が存在するか？’

というものがあり，とくに $B = P\omega_1/P_{\omega_1}\omega_1$ のときの問題は $\mathbf{Z}^{(B)}$ の直和因子の問題と関係があり興味のある問題です．Blass が Specker 現象と名づけた現象は 10 年く

らい前に論文をかいた後，集合論的側面からの考察をもう少したってからやってもよいなと思っていたものです．何年か前にBlassにあったときちょっとこのことにふれたのですが，お話したようにずいぶん話が進みました．Blass, Brendle, Shelahにより今までに気づかれていなかったテクニック（つまり新しい見方）が現れていますので，以前僕がわからなかったいくつかの問題も解かれてしまってはいるのですが以前よりむしろ発展性がある状態になったともいえます．まだよく考えていない問題も色々ありますので早く時間をつくって考えたいと思っています．

参考文献

[1] T. Bartoszyński, *Combinatorial aspects of measure and category*, Fund. Math. **127** (1987), 225-239.

[2] A. Blass, *Cardinal characteristics and the product of countably many infinite cyclic groups*, 1994, 512-540.

[3] J. Brendle, *Evasion and prediction: the specker phenomenon and gross spaces*, preprint.

[4] J. Brendle and S. Shelah, *Evasion and prediction II*, preprint.

[5] M. Dugas and R. Göbel, *All infinite groups are galois groups over any field*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 355-384.

[6] K. Eda, *Free σ-products and fundamental groups of subspaces of the plane*, preprint.

[7] ———, *A minimal flabby sheaf and an abelian group*, Tsukuba J. Math. **7** (1983), 157-168.

[8] ———, *A note on subgroups of $\mathbf{Z}^N$*, Abelian group theory (R. Göbel and E. Walker, eds.), LMN, vol. 1006, Springer-Verlage, 1983, 171-174.

[9] ———, *On a Boolean power of a torsion free abelian group*, J. Algebra **82** (1983), 83-93.

[10] ———, *Free σ-products and noncommutatively slender groups*, J. Algebra **148** (1992), 243-263.

[11] K. Eda and K. Hibino, *On Boolean powers of the group $\mathbf{Z}$ and (ω, ω)-weak distributivity*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 619-628.

[12] K. Eda and K. Sakai, *A factor of singular homology*, Tsukuba J. Math. **15** (1991), 351-387.

[13] P. Eklof and S. Shelah, *On groups a such that* $a \oplus bfZ^n \simeq a$, Abelian group theory (R. Göbel and E. Walker, eds.), Gordon and Breach, 1987, 149-163.

[14] S. Kamo, *On the slender property of certain boolean algebras*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 493-500.

[15] P. Keef, *On set theory and the balanced-projective dimension of* c_ω*-groups*, Abelian group theory, Cont. Math., vol. 87, 1989, 31-42.

[16] M. Magidor and S. Shelah, *When does almost free imply free? (for groups, transversals, etc.)*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 769–830.

[17] E. Specker, *Additive gruppen von folgen ganzer zahlen*, Portugal. Math. **9** (1950), 131-140.

[18] E. C. Zeeman, *On direct sums of free cycles*, J. London Math. Soc. **30** (1955), 195-212.