数理解析研究所講究録
933 巻 1995 年 1-15

離散型非線形可積分系とその応用

同志社大学工学部 梶原 健司

1 はじめに

可積分系の離散化は主に数値計算との関連から興味を持たれ、すでに 1970 年代から研究されている [1]。ところが、最近、固有値計算アルゴリズムの LR 法や代数方程式を解く QD 法が離散型戸田分子方程式そのものであるという指摘 [2, 3]、また数列の収束加速法であるε–アルゴリズムが離散型（ポテンシャル）KdV 方程式と等価であるという指摘 [7] などを契機として、数理工学を含む数理科学への応用可能性が意識され、広く興味を集めている。

従来の可積分系の離散化は「解の離散化」といってよい。すなわち、直接法を用いて 1) 適当な従属変数変換で bilinear form を求め、2) ソリトン解を求め、3) 解に現れる指数函数を離散化し 4) 適当な従属変数変換を見出して非線形差分方程式を得る というステップを踏む。この方法の弱点は 4) のステップの「適当な従属変数変換」を組織的に見つけることが難しいこと、また、方程式を非線形のまま扱うことが難しいことである。従って、例えば「与えられた非線形差分方程式の可積分性を判定し、可積分ならば解を構成せよ」という問題を解くことは離散系では現在難しい。このギャップを埋める方法となり得るのが Grammaticos らによって提出された Singularity Confinement (SC) である [8]。これはいわゆるパンルベテストの離散版とみなすことができ、強力なテストになり得るが、その数学的な根拠は今なお薄弱である。

さて、この SC を用いて得られた方程式として離散型パンルベ方程式と呼ばれる一群の常差分方程式が知られている [4]。連続系のパンルベ方程式は最も基本的な非線形可積分系とされ、その解は特殊函数の非線形版ともいうべき重要な役割を持っている。従って、離散型パンルベ方程式も基本的な離散型可積分系となり得ると予想される。しかし、SC が数学的に根拠付けられた方法でない以上、その妥当性を確認する必要がある。筆者らはこのような動機からいくつかの離散型パンルベ方程式の「特殊函数解」の構成を試み、連続系における解の構造が保存されていることを示した [5, 6]。本稿ではもう一つの重要な解のクラスである代数函数解を取り上げて同様の議論を試みる。方程式としては第 2 種のパンルベ ($\mathrm{P_{II}}$) および離散型パンルベ方程式 ($\mathrm{dP_{II}}$) を取り上げ、その代数函数解（この場合は有理解）を議論する。

さて、[7] において、離散型 (potential)KdV 方程式が数列の収束加速アルゴリズムとして有名なε–アルゴリズムそのものであるという指摘がなされた。彼らはその結果を踏まえて離散型 modified KdV 方程式から別のアルゴリズムが構成できることを示した。後半ではこのアルゴリズムの性能を実際に評価し、ある種の数列に対してはε–アルゴリズムとほぼ同等のアルゴリズムとなることを報告する。また、このアルゴリズムは SC を通らないという意味で可積分ではない。本稿では離散型 modified KdV 方程式から可積分性を保存しながら加速法を構成することを試み、その結果から上のアルゴリズムとε–アルゴリズム

との関連を明らかにする。

2 第2種のパンルベ方程式のτ函数

2.1 τ函数の導入

第2種のパンルベ方程式 ($\mathrm{P_{II}}$)

$$\frac{d^2q}{dt^2} = 2q^3 + tq + \alpha \ , \tag{1}$$

は modified KdV 方程式の自己相似解を記述する方程式としても知られている [9]。この方程式はαが整数のときに有理解、半整数のときに Airy 函数で表される特殊函数型の解をもち、それ以外の解は「超越的」であることが知られている [10]。一般にパンルベ方程式は Hamilton 形式で表現され、その Hamiltonian を通じてτ函数が定義される [11]。例えば $\mathrm{P_{II}}$ の場合では Hamiltonian

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}p^2 - \left(q^2 + \frac{1}{2}t\right)p - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)q \ , \tag{2}$$

に対して正準方程式

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p - q^2 - \frac{1}{2}t \ , &(3)\\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 2pq + \alpha + \frac{1}{2} \ , &(4) \end{aligned}$$

が得られ、これから qに関して $\mathrm{P_{II}}(1)$ が得られる。また、τ函数は

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{d}{dt}\log\tau \tag{5}$$

で定義され、特殊函数解、有理解とも行列式で表現される。以後の節ではそれらの具体的な表式と bilinear form について簡単にまとめておく。

2.2 特殊函数解

$\mathrm{P_{II}}$は Airy 函数を用いて表される特殊函数解を持つ。対応するτ函数は Ai を

$$\frac{d^2}{dx^2}Ai = x\ Ai \ , \tag{6}$$

を満たす Airy 函数として、

$$\tau_N = \begin{vmatrix} Ai & \frac{d}{dx}Ai & \cdots & \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}Ai \\ \frac{d}{dx}Ai & \frac{d^2}{dx^2}Ai & \cdots & \frac{d^N}{dx^N}Ai \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}}Ai & \frac{d^N}{dx^N}Ai & \cdots & \frac{d^{2N-2}}{dx^{2N-2}}Ai \end{vmatrix} \ , \tag{7}$$

で与えられる。そして、

$$u = \frac{d}{dx}\left(\log\frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}\right) , \tag{8}$$

は P_{II}

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2u^3 - 2xu + (2N+1) , \tag{9}$$

を満足する。

2.3 有理解の表現その1: Hankel 行列式による表現

有理解の行列式表現として現在二つのものがわかっている [12]。まずτ函数として次の Hankel 行列式

$$\sigma_N = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_N & \cdots & a_{2N-2} \end{vmatrix} , \tag{10}$$

を考える。ただし、 $a_n,\ n=0,1,2,\cdots$は

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & z\ ,\ a_1 = 1\ , \\ a_n & = & \dfrac{da_{n-1}}{dz} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-k-2} \quad (n \geq 2)\ , \end{array}\right. \tag{11}$$

で与えられる。これは従属変数変換

$$u = \frac{d}{dx}\log\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_N} , \tag{12}$$

によって P_{II}

$$\frac{d^2}{dx^2}u = 2u^3 - 4xu + 4(N+1) , \tag{13}$$

を満たすことが証明される。

2.4 有理解の表現その2

次に、もう一つの表現であるが、τ函数

$$\tau_N = \begin{vmatrix} q_N(x) & q_{N+1}(x) & \cdots & q_{2N-1}(x) \\ q_{N-2}(x) & q_{N-1}(x) & \cdots & q_{2N-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{-N+2}(x) & q_{-N+3}(x) & \cdots & q_1(x) \end{vmatrix} , \tag{14}$$

を考える。ここで、$q_k(x),\quad k \in \mathbf{Z}$ は

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x)\lambda^k = \exp\left(x\lambda + \frac{1}{3}\lambda^3\right), \quad q_k(x) = 0 \text{ for } k < 0 , \tag{15}$$

で定義される x の多項式である。これも従属変数変換

$$u = \frac{d}{dx}\log\frac{\tau_{N+1}}{\tau_N} \tag{16}$$

によって (13) を満足することが証明される [12]。ここで、KdV 方程式の有理解に対応する τ 函数との類似に注意しておく。実際、KdV 方程式の場合は

$$\tau_{N\mathrm{KdV}} = \begin{vmatrix} p_N(x) & p_{N+1}(x) & \cdots & p_{2N-1}(x) \\ p_{N-2}(x) & p_{N-1}(x) & \cdots & p_{2N-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-N+2}(x) & p_{-N+3}(x) & \cdots & p_1(x) \end{vmatrix}, \tag{17}$$

で与えられる。ここで、$p_k(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ は

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\lambda^k = \exp\sum_{n=0}^{\infty} x_n\lambda^n \quad p_k(x) = 0 \text{ for } k < 0\ , \tag{18}$$

で定義される多項式である。この表式で $x_1 = x$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_5 = x_7 = \cdots = 0$ とすれば $\mathrm{P_{II}}$の τ 函数 (14) に帰着することがわかる（$x_2, x_4, \cdots$は特に制限しなくても τ 函数自体はそれらに最初から依存していない)。

2.5 Bilinear Form

特殊函数解を与える τ 函数 (7) は

$$\left(D_x^2 - x\right)\tau_{N+1}\cdot\tau_N = 0\ , \tag{19}$$

$$\left(D_x^3 - 4xD_x + (2N+1)\right)\tau_{N+1}\cdot\tau_N = 0\ , \tag{20}$$

を満足する。また、有理解を与える τ 函数 (10), (14) は両者とも

$$D_x^2\tau_{N+1}\cdot\tau_N = 0\ , \tag{21}$$

$$\left(D_x^3 + 4xD_x - 4(N+1)\right)\tau_{N+1}\cdot\tau_N = 0\ , \tag{22}$$

を満足することが示される。さて、これらの bilinear form は一見異なるが、実は特殊函数解に対応する τ 函数の満たす bilinear form (19), (20) は

$$f_N = \mathrm{e}^{-x^3/12}\tau_N \tag{23}$$

という変換で

$$D_x^2 f_{N+1}\cdot f_N = 0\ , \tag{24}$$

$$\left(D_x^3 - xD_x - (2N+1)\right) f_{N+1}\cdot f_N = 0\ , \tag{25}$$

に帰着される。(24), (25) は適当なスケールを選べば、パラメータの値を除いてそれぞれ (21), (22) と同じである。従って、特殊函数解と有理解に対応する τ 函数の満たす bilinear equation の違いは「ゲージ因子」によって吸収され、τ 函数は共通の bilinear form を満たすとしてよいことになる。

3　第 2 種の離散型パンルベ方程式のτ函数

3.1　有理解の表現その１：Hankel 行列式による表示

本節では dP_{II}

$$x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{(an+b)x_n+c}{1-x_n^2} \tag{26}$$

の有理解の行列式による表示を議論する。まず連続系の Hankel 行列式による表示 (10) に対応するものに関してであるが、次のような結果がある [13]。τ函数

$$\tau_N(n)=\begin{vmatrix} a_0(n) & a_1 & a_2(n+1) & a_3^-(n+2) & \cdots \\ a_1 & a_2(n) & a_3^+(n) & a_4(n+1) & \cdots \\ a_2(n-1) & a_3^-(n) & a_4(n) & a_5^+(n) & \cdots \\ a_3^+(n-2) & a_4(n-1) & a_5^-(n) & a_6(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \tag{27}$$

ただし、

$$a_k^{\pm}(n,\sigma)=a_k(n\pm\frac{1}{2},\pm\sigma) \tag{28}$$

$$a_0=n$$

$$a_1=2p$$

$$a_2=n^2-1$$

$$a_3=8p(n-\frac{3}{4}\sigma)$$

$$a_4=2n(n^2-4)+20p^2$$

$$a_5=32p\left((n+\frac{3}{4}\sigma)^2-\frac{19}{16}\right)$$

$$a_6=5(n^2-1)(n^2-9)+200p^2n$$

$$a_7=128p\left((n-\frac{3}{4}\sigma)^3-\frac{73}{16}(n-\frac{3}{4}\sigma)+\frac{15}{4}p^2-\frac{3}{64}\sigma\right)$$

$$a_8=14n(n^2-4)(n^2-16)+4p^2(350n^2-557)$$

を考える。このとき

$$x_n=\frac{\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n-1)}{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n)}-1$$

は $dP_{II}(26)$ のパラメータが

$$a=2,\ b=-\epsilon^3,\ c=\epsilon^3(N+1)\ ,\quad (\epsilon=p^{-2/3}) \tag{29}$$

の場合の解を与える。ただし、これは低次のものを数式処理で求めただけで証明はできていない。

3.2 有理解の表現その2

第2の表現については次のような結果がある [14]。τ函数

$$\kappa_N(n)=\begin{vmatrix} q_N(n) & q_{N+1}(n) & \cdots & q_{2N-1}(n) \\ q_{N-2}(n) & q_{N-1}(n) & \cdots & q_{2N-3}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{-N+2}(n) & q_{-N+3}(n) & \cdots & q_1(n) \end{vmatrix}, \tag{30}$$

を考える。ただし、$q_k(n)$ は母函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(n)\lambda^k=(1+\lambda)^{p^2}\ (1-\lambda)^{-n+3p^2}\ \exp\frac{2p^2\lambda}{1-\lambda},\quad q_k(n)=0\quad \text{for } k<0, \tag{31}$$

で定義される n の k次の多項式である。これはやはり従属変数変換

$$x_n=\frac{\kappa_{N+1}(n+1)\kappa_N(n-1)}{\kappa_{N+1}(n)\kappa_N(n)}-1\ , \tag{32}$$

によって前節と同じ場合の解を与えることが証明できる。証明の詳細に関しては文献 [14] を参照されたい。

3.3 特殊函数解と有理解

dP_{II}の離散型特殊函数解は次のように与えられる [5]。

$$\tau_N(n)=\begin{vmatrix} A_n & A_{n+2} & \cdots & A_{n+2N-2} \\ A_{n+1} & A_{n+3} & \cdots & A_{n+2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n+N-1} & A_{n+N+1} & \cdots & A_{n+3N-3} \end{vmatrix}, \tag{33}$$

ただし、各要素は次の漸化式を満たす。

$$A_{n+2}-2A_{n+1}=-(pn+q)A_n\ . \tag{34}$$

これは従属変数変換

$$x_n=\frac{\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n)}{\tau_{N+1}(n)\tau_N(n+1)}-1\ . \tag{35}$$

によって dP_{II}の

$$\alpha=2p,\quad \beta=(2N-1)p+2q,\quad \gamma=-(2N+1)p\ , \tag{36}$$

の場合の解を与える。ここで注意するべきであるのは特殊函数解の場合と有理解の場合でτ函数と dPII の従属変数 x_nの関係式 (32)、(35) が異なることである。P_{II}の場合はτ函数の比の対数微分という形でτ函数が導入されるが、離散系の場合は連続系の対数微分に帰着する量がいくらでもあり得る。もしこれら二つの表式が本質的に異なるならばτ函数の定

義が解によって異なってしまい、本質的な量ではなくなってしまうわけであるが、幸いこれらの違いは連続極限に影響を与えない独立変数のずらしと適当なゲージ因子をかけることで吸収でき、本質的に等価であることがわかる。もちろん任意のパラメータに関してτ函数が導入できるかどうかは一般論を待たねばならない。

また、bilinear equation について注意しておく。特殊函数解に関しては [5]

$$\tau_N(n+3)\tau_N(n)-\tau_N(n+2)\tau_N(n+1)=\tau_{N+1}(n)\tau_{N-1}(n+3)\ , \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{N+1}(n+2)\tau_N(n+1)-2\tau_{N+1}(n+1)\tau_N(n+2)\\ =\ &-(pn+q)\tau_{N+1}(n)\tau_N(n+3)\ ,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}&(pn+q)\tau_N(n+3)\tau_N(n)-(p(n+2N)+q)\tau_N(n+2)\tau_N(n+1)\\ =\ &\tau_{N+1}(n+1)\tau_{N-1}(n+2)\ ,\end{aligned} \tag{39}$$

有理解に関しては [13, 14]

$$\kappa_{N+1}(n+1)\kappa_N(n)+\kappa_{N+1}(n-1)\kappa_N(n+1)-2\kappa_{N+1}(n)\kappa_N(n)=0, \tag{40}$$

$$2p^2\kappa_N(n+2)\kappa_N(n-1)+(n-2p^2-N)\kappa_N(n+1)\kappa_N(n)-(2N+1)\kappa_{N+1}(n)\kappa_{N-1}(n+1)=0 \tag{41}$$

$$2p^2\kappa_N(n+2)\kappa_N(n-1)+(n-2p^2+N+1)\kappa_N(n+1)\kappa_N(n)-(2N+1)\kappa_{N+1}(n+1)\kappa_{N-1}(n)=0 \tag{42}$$

が成立する。bilinear form (37)-(39), (40) -(42) は全く異なっているように見えるが、添字$_{N-1}$の変数を消去し、特殊函数解に関しては独立変数のずらしとゲージ因子をかけてやると、τ, κ両者とも同じ形の bilinear form

$$(\cosh D_n-2)\,f_{N+1}(n)\cdot f_N(n)=0\ , \tag{43}$$

$$(\sinh 2D_n+(bn+c)\sinh D_n-a)\,f_{N+1}(n)\cdot f_N(n)=0 \tag{44}$$

を満たすことが示される [13]。連続系の bilinear form と比較されたい。最後に、次のことを指摘しておきたい。dP$_{\rm II}$の解を調べるに当たっては連続系と比べて離散系特有の連続極限で影響しないようなずれを考慮しなければならない分複雑な計算が要求され、従って解の証明などはかなりテクニカルである。しかし、最終結果は上の bilinear form を見てもわかるようにきれいな形になるようである。このことは少なくとも dP$_{\rm II}$の背後にはきれいな数理構造があることを暗示しているように見える。

4 離散型 modified KdV 方程式と収束加速法

4.1 Papageorgiou–Grammaticos–Ramani のアルゴリズム

本節では Papageorgiou らに提出された加速法のアルゴリズム (PGR アルゴリズム)[7]

$$x_n^{2k+1}=x_n^{2k-1}\frac{-3x_{n-1}^{2k-1}x_{n+1}^{2k-1}+x_n^{2k-1}\left(x_{n-1}^{2k-1}+x_{n+1}^{2k-1}+x_n^{2k-1}\right)}{x_n^{2k-1}\left(3x_n^{2k-1}-x_{n+1}^{2k-1}-x_{n-1}^{2k-1}\right)-x_{n-1}^{2k-1}x_{n+1}^{2k-1}}, \tag{45}$$

$$x_n^1 = a_n: \text{ 与えられた数列}$$

について議論する。もともとこのアルゴリズムは次のようにして得られた。Papageorgiouらは discrete (potential) modified KdV 方程式

$$x_n^{k+1} = x_n^{k-1}\frac{x_{n+1}^k - \mu x_{n-1}^k}{\mu x_{n+1}^k - x_{n-1}^k} \tag{46}$$

が

$$x_n^0 = 1, \quad x_n^1 = a_n: \quad \text{与えられた数列}$$

という境界条件をおいたとき、

$$\mu = 1$$

のときにのみ加速法として機能することを見出した。ところが、(46) においてそのまま $\mu = 1$ とおくと方程式がトリビアルになってしまうため、次のような操作を行なう。(46) において、kが偶数である場合の x_n^kを消去する。つまり、$k = 2\kappa,\ 2\kappa+1$ とした方程式

$$x_n^{2\kappa+1} = x_n^{2\kappa-1}\frac{x_{n+1}^{2\kappa} - \mu x_{n-1}^{2\kappa}}{\mu x_{n+1}^{2\kappa} - x_{n-1}^{2\kappa}}, \tag{47}$$

$$x_n^{2\kappa} = x_n^{2\kappa-2}\frac{x_{n+1}^{2\kappa-1} - \mu x_{n-1}^{2\kappa-1}}{\mu x_{n+1}^{2\kappa-1} - x_{n-1}^{2\kappa-1}}, \tag{48}$$

を考え、$\kappa = 1$ とする。ここで彼らはなぜか $x_n^0 = 1$ とおき、x^2を消去する。すると、

$$x_n^3 = x_n^1 \frac{-(1+\mu+\mu^2)x_{n-2}^1 x_{n+2}^1 + \mu(x_n^1 x_{n-2}^1 + x_n^1 x_{n+2}^2 + x_n^1 \cdot x_n^1)}{(1+\mu+\mu^2)x_n^1 \cdot x_n^1 - \mu(x_n^1 x_{n-2}^1 + x_n^1 x_{n+2}^1 + x_{n-2}^1 x_{n+2}^1)}, \tag{49}$$

が得られ、ここで$\mu = 1$ とすると、

$$x_n^3 = x_n^1 \frac{-3x_{n-2}^1 x_{n+2}^1 + x_n^1(x_{n-2}^1 + x_{n+2}^2 + x_n^1)}{3x_n^1 \cdot x_n^1 - (x_n^1 x_{n-2}^1 + x_n^1 x_{n+2}^1 + x_{n-2}^1 x_{n+2}^1)}, \tag{50}$$

となる。これを n をスケールしなおし、逐次的に繰り返すようにさせたのが (45) である。これはちょうど離散型 potential KdV 方程式 (ε-アルゴリズム) から Aitken アルゴリズムを得る手続きに対応している。まず我々はこのアルゴリズムの有効性を見るためいくつかの数列について数値実験を行なった。以下にε–アルゴリズム

$$x_n^{k+1} = x_{n-1}^{k-1} + \frac{1}{x_n^k - x_{n-1}^k} \tag{51}$$

$$x_n^0 = 0, x_n^1 = a_n: \quad \text{与えられた数列}$$

と比較した結果を示す。表１、２を比べるとむしろ PGR アルゴリズムの方が加速が速いことがわかる。また、表３、４はε–アルゴリズムの方が速い例である。一般的な傾向として、二つのアルゴリズムを比較すると、与えられた数列が単調に収束していくような数列に関しては PGR アルゴリズムはε– アルゴリズムと同等の加速性を示し、振動しながら収束していくような数列に関してはε–アルゴリズムのほうが有効なようである。

表 1: ε–アルゴリズム：$x_n = \prod_{i=2}^{n} \frac{i^3-1}{i^3+1}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.6666666....$

n	x_n(既知の数列)	x_n^3	x_n^5	x_n^7	...
1	1.000000				
2	0.777778				
3	0.722222	0.703704			
4	0.700000	0.685185			
5	0.688889	0.677778	0.675926		
6	0.682540	0.674074	0.672222		
7	0.678571	0.671958	0.670370	0.670000	
8	0.675926	0.670635	0.669312	0.668889	
9	0.674074	0.669753	0.668651	0.668254	...
10	0.672727	0.669136	0.668210	0.667857	...

表 2: PGR–アルゴリズム：$x_n = \prod_{i=2}^{n} \frac{i^3-1}{i^3+1}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.6666666....$

n	x_n(既知の数列)	x_n^3	x_n^5	x_n^7	...
1	1.000000				
2	0.777778				
3	0.722222	0.700000			
4	0.700000	0.684211			
5	0.688889	0.677419	0.672189		
6	0.682540	0.673913	0.670131		
7	0.678571	0.671875	0.669028	0.667750	
8	0.675926	0.670588	0.668375	0.667424	
9	0.674074	0.669725	0.667958	0.667222	...
10	0.672727	0.669118	0.667677	0.667089	...

表 3: ε–アルゴリズム：

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0.6048986\ldots$$

n	x_n(既知の数列)	x_n^3	x_n^5	x_n^7	$\ldots$
0	1.000000				
1	0.292893				
2	0.870243	0.610730			
3	0.370243	0.602294			
4	0.817457	0.606311	0.605044		
5	0.409209	0.604035	0.604850		
6	0.787173	0.605470	0.604919	0.604903	
7	0.433620	0.604497	0.604889	0.604897	
8	0.766953	0.605193	0.604904	0.604899	$\ldots$
9	0.450725	0.604676	0.604896	0.604898	$\ldots$

表 4: PGR–アルゴリズム：

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0.6048986...$$

n	x_n(既知の数列)	x_n^3	x_n^5	x_n^7	$\ldots$
0	1.000000				
1	0.292893				
2	0.870243	0.498936			
3	0.370243	0.553537			
4	0.817457	0.549245	0.549544		
5	0.409209	0.571992	0.552844		
6	0.787173	0.567509	0.568235	0.548627	
7	0.433620	0.580519	0.570834	0.571353	
8	0.766953	0.576855	0.577653	0.566619	$\ldots$
9	0.450725	0.585476	0.579421	0.580034	$\ldots$

4.2 離散型 Modified KdV 方程式から生成される可積分スキーム

PGR アルゴリズムはその構成法から見ても明らかなように、可積分性を失っている。実際、SC を通らないことが報告されている。そこで、我々は可積分性を失わないようなスキームの構成を試みた。まず、奇妙なことは方程式のパラメータが$\mu = 1$の場合しか加速し

ないということがある。ε-アルゴリズムにおいてはいわゆる分子型の解からその加速性が示されるため、discrete modified KdV 方程式に対しても分子型の解を調べることでその理由がわかるのではないかと考えられる。しかし、調べた結果、分子型の解は discrete KdV 方程式の「格子型」のτ函数$\tau_N^n(k)$

$$\tau_N^n(m) = \begin{vmatrix} \phi_1^{(n)}(m) & \phi_1^{(n+1)}(m) & \cdots & \phi_1^{(n+N-1)}(m) \\ \phi_2^{(n)}(m) & \phi_2^{(n+1)}(m) & \cdots & \phi_2^{(n+N-1)}(m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_N^{(n)}(m) & \phi_N^{(n+1)}(m) & \cdots & \phi_N^{(n+N-1)}(m) \end{vmatrix}, \tag{52}$$

$$\phi_i^{(n)}(m) = p_i^n \alpha_i (1 - p_i \mu)^{-m} + (-p_i)^n \beta_i (1 + p_i \mu)^{-m}. \tag{53}$$

を用いて次のように表される。

$$u_N^m = \frac{\tau_N^1(m)}{\tau_N^0(m)}. \tag{54}$$

これは

$$\frac{u_N^{m+1}}{u_{N+1}^m} = \frac{u_N^m - \mu u_{N+1}^{m+1}}{u_{N+1}^{m+1} - \mu u_N^m}. \tag{55}$$

を満足することが示される [15]。この方程式は

$$x_n^k = u_{N+m-1}^{m-N} \tag{56}$$

とおけば離散型 modified KdV 方程式 (46) となる。τ函数として例えば (52) を取ったが、実際は discrete KdV 方程式のτ函数、例えば有理解を与えるτ函数でもよい。しかし、どちらにしてもこの解は境界条件が加速法とマッチせず、残念ながら加速法に関する情報を与えない。

次に、PGR アルゴリズムが可積分性を失う理由は discrete modified KdV 方程式 (47), (48) においてkが偶数の変数を消去する際に $x_n^{2\kappa-2}$ を常に 1 においてしまっているところにある。そこで、我々はその条件をおかずにkが偶数の変数を消去する。すると、

$$x_n^{2\kappa+1} = x_n^{2\kappa-1} \frac{-\left\{(\mu^2+1)x_{n+2}^{2\kappa-1} - \mu x_n^{2\kappa-1}\right\} x_{n-2}^{2\kappa-1} x_n^{2\kappa-1} + \mu \left\{x_{n-2}^{2\kappa-1} x_{n+2}^{2\kappa-1} - \left(x_n^{2\kappa-1}\right)^2\right\} x_n^{2\kappa-3} + \mu x_{n+2}^{2\kappa-1} \left(x_n^{2\kappa-1}\right)^2}{\left\{\mu\left(x_{n-2}^{2\kappa-1} + x_{n+2}^{2\kappa-1}\right) - (\mu^2+1) x_n^{2\kappa-1}\right\} x_n^{2\kappa-3} - \mu x_{n-2}^{2\kappa-1} x_{n+2}^{2\kappa-1} + \mu \left(x_n^{2k-1}\right)^2}, \tag{57}$$

が得られ、ここで$\mu = 1$とすると

$$x_n^{2\kappa+1} = x_n^{2\kappa-1} + \frac{(x_n^{2\kappa-1} - x_n^{2\kappa-3})(x_{n+2}^{2\kappa-1} - x_n^{2\kappa-1})(x_n^{2\kappa-1} - x_{n-2}^{2\kappa-1})}{(x_n^{2\kappa-1})^2 - x_{n-2}^{2\kappa-1} x_{n+2}^{2\kappa-1} + x_n^{2\kappa-3}\left(x_{n+2}^{2\kappa-1} - 2x_n^{2\kappa-1} + x_{n-2}^{2\kappa-1}\right)}, \tag{58}$$

が得られる。(58) は可積分性を失っていない。では境界条件をどのようにおけば加速するだろうか。ここで、$x_n^{2\kappa-3} \to \infty$ とおくと、まさに Aitken 加速法と同じ形をしていることから、

$$x_n^{-1} = \infty, \quad x_n^1 = a_n: \quad \text{与えられた数列} \tag{59}$$

という境界条件をおいてみる。すると、確かに加速が数値的に確かめられる。実際、この境界条件の下で (58) の分子型の解を求めることができ、その結果、(59) の下での (58) の解は

$$x_n^{2\kappa+1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{n+2\kappa} & \Delta^1 a_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^\kappa a_{n+2\kappa} \\ \Delta^1 a_{n+2\kappa} & \Delta^2 a_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{\kappa+1} a_{n+2\kappa} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^\kappa a_{n+2\kappa} & \Delta^{\kappa+1} a_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{2\kappa} a_{n+2\kappa} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 a_{n+2\kappa} & \Delta^3 a_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{\kappa+1} a_{n+2\kappa} \\ \Delta^3 a_{n+2\kappa} & \Delta^4 a_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{\kappa+2} a_{n+2\kappa} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{\kappa+1} a_{n+2\kappa} & \Delta^{\kappa+2} a_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{2\kappa} a_{n+2\kappa} \end{vmatrix}} \tag{60}$$

で与えられることが証明できる。ただし、Δは後退差分演算子

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-2} \tag{61}$$

である。これはε–アルゴリズム (discrete KdV 方程式) の解に酷似している。実際、

$$\tau_n^\kappa(m) = \begin{vmatrix} \Delta^m x_{n+2\kappa} & \Delta^{m+1} x_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{m+\kappa-1} x_{n+2\kappa} \\ \Delta^{m+1} x_{n+2\kappa} & \Delta^{m+2} x_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{m+\kappa} x_{n+2\kappa} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{m+\kappa-1} x_{n+2\kappa} & \Delta^{m+\kappa} x_{n+2\kappa} & \cdots & \Delta^{m+2\kappa-2} x_{n+2\kappa} \end{vmatrix}, \tag{62}$$

とおき、

$$u_n^\kappa = x_n^{2\kappa+1} = \frac{\tau_{n-2}^{\kappa+1}(m)}{\tau_n^\kappa(m+2)}\ , \tag{63}$$

$$v_n^\kappa = \frac{\tau_n^\kappa(m+3)}{\tau_{n-2}^{\kappa+1}(m+1)}, \tag{64}$$

という変数を導入すると、

$$u_n^\kappa = u_n^{\kappa-1} + \frac{1}{v_{n+2}^{\kappa-1} - v_n^{\kappa-1}}, \tag{65}$$

$$v_n^\kappa = v_n^{\kappa-1} + \frac{1}{u_n^\kappa - u_{n-2}^\kappa}, \tag{66}$$

という方程式が得られる。これは本質的にε–アルゴリズムと同じものである。従って、離散型 modified KdV 方程式で$\mu = 1$ としたものは本質的に離散型 KdV 方程式で$\mu = 1$ としたものになるということがわかった。

4.3 PGR アルゴリズムとε–アルゴリズム

前節で離散型 modified KdV 方程式の可積分性を壊さないように加速スキームを構成したところそれはε–アルゴリズムと等価なスキームとなった。すると、PGR アルゴリズムの加速性も本質的にε–アルゴリズムの加速性に由来するのではないだろうか。そこで (65),

(66) に適当な境界条件を課して PGR アルゴリズム (45) を得ることを考える。今、解のことはとりあえず忘れて$\kappa = 0$ とおくと、

$$u_n^0 = u_n^{-1} + \frac{1}{v_{n+2}^{-1} - v_n^{-1}}, \tag{67}$$

$$v_n^0 = v_n^{-1} + \frac{1}{u_n^0 - u_{n-2}^0}, \tag{68}$$

これから vを消去すると、

$$\frac{1}{u_n^1 - u_n^0} = \frac{1}{u_n^0 - u_n^{-1}} - \frac{1}{u_n^0 - u_{n-2}^0} + \frac{1}{u_{n+2}^0 - u_n^0} \tag{69}$$

ここで、境界条件として

$$u_n^{-1} = -a_n, \quad u_n^0 = a_n : \quad a_n : \text{ 与えられた数列}, \tag{70}$$

とおくと数列は一意的に定まり、

$$\frac{1}{u_n^1 - u_n^0} = \frac{1}{2u_n^0} - \frac{1}{u_n^0 - u_{n-2}^0} + \frac{1}{u_{n+2}^0 - u_n^0} \tag{71}$$

となり、これを逐次的に続けていくと

$$\frac{1}{u_n^{k+1} - u_n^k} = \frac{1}{2u_n^k} - \frac{1}{u_n^k - u_{n-2}^k} + \frac{1}{u_{n+2}^\kappa - u_n^\kappa} \tag{72}$$

が得られる。これを整理すると本質的に PGR アルゴリズムと同じ漸化式が得られる。従って、PGR アルゴリズムはε–アルゴリズムからも得られることがわかった。ただし、(65), (66) に対して境界条件 (70) をおくことと、$\kappa = 0$ として境界条件 (70) をおき、それを逐次的に続けることとは本質的に異なる。前者は可積分性を保つが、後者は一般に可積分性を損なうことになるであろう。離散型 modified KdV 方程式そのものの分子解は加速法とマッチしないことと考え合わせて、PGR アルゴリズムの加速性の起源はε–アルゴリズムに求めるのが自然であると考えられる。

5 おわりに

本稿では前半で第 2 種の離散型パンルベ方程式の特殊函数解と有理解を扱い、両者とも連続系と同様に行列式で表されることを示した。見かけ上両者に対応するτ函数の満たす bilinear form、およびもとの従属変数との関係式が異なるが、それらの違いは、連続極限で影響を与えないような独立変数の変換と「ゲージ因子」の不定性を考慮することで吸収されることを指摘した。後半では Papageourgiou–Grammaticos–Ramani によって離散型 modified KdV 方程式から得られた加速アルゴリズムについて考察し、ε–アルゴリズム（離散型 KdV 方程式）との関連を示した。

離散型可積分系はその応用可能性から注目されているが、それを扱う基本的な手法や認識がまだ不足しているように思われる。特に応用を考慮する際に必要とされているものは非線形のレベルの性質であることが多い。離散化にはいくつかの手法が知られているが、直接法をベースとした方法からでは非線形のレベルでの性質はまだ十分議論されておらず、また非線形のレベルからの離散化では解に関する議論がほとんどなされていないように思われる。また、異なる手法でなされた離散化が等価であるかどうかについても、いくつかの例外を除いて議論がなされていないようである。このように離散型可積分系の理論では基本的な部分に関する認識が十分でない。離散型パンルベ方程式の場合でも解によって bilinear form, 従属変数変換が異なり、その違いは結局吸収できるけれど、決して自明な違いではない。離散系では連続極限で消えてしまうような自明でない「ずれ」があり得るのである。従って、離散型可積分系のソリトン解、有理解、また分子解それぞれに関する十分な数のデータが必要であり、またその結果と consistent となるような非線形のレベルの理論が構築されねばならない。

非線形のレベルでの性質のうち、特に興味深いのは「離散型の Hamilton 構造」がいったいどのようになるか、という問題である。パンルベ方程式はその Hamiltonian とτ函数が direct に関連するという顕著な性質を持つ。従って、離散系でも逆にτ函数から Hamilton 構造を議論することが可能であろう。いったいどのような形式が得られるであろうか。また、一般の離散型可積分系の場合に果たして Hamiltonian に対応する量は本質的な意味を持ち得るであろうか？

最後に、第 4 章の考察は沢井信樹氏（同志社大学大学院工学研究科 M1）との共同研究によるものであることを付記しておく。

参考文献

[1] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn.**43**(1977) 1424, 2074, 2079, **45**(1978) 321, **46**(1979), 312, **50**(1981) 3785.

[2] R.Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, in *Future Direction of Dynamical Systems in Physics and Biological Systems*, ed. by P.L. Christiansen, J.C. Elibeck and D. Parmentier (Plenum, New York, 1993).

[3] K. Sogo,J. Phys. Soc. Jpn. **62**(1993) 1081.

[4] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829.

[5] K. Kajiwara Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos and A. Ramani, J.Phys. **A27**(1994) 915.

[6] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma, J. Math. Phys. **36**(1995) 4162

[7] V.Papageorgiou, B. Grammaticos and A. Ramani, Phys. Lett. **A179**(1993) 111.

[8] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825.

[9] M. J. Ablowitz and H. Segur, 薩摩・及川訳, ソリトンと逆散乱変換、日本評論社 (1991)

[10] 梅村 浩, 数学 **47**(1995) 341.

[11] 岡本 和夫, パンルベ方程式序説, 上智大学数学講究録 (1987).

[12] K. Kajiwara and Y. Ohta, in preparation.

[13] J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, J. Hietarinta and A. Ramani, J.Phys. **A28**(1995) 3541.

[14] K. Kajiwara and Y. Ohta, in preparation.

[15] Y. Ohta, private communication