数理解析研究所講究録
933 巻 1995 年 203-215

確率分布族と直交多項式の可積分変形

ーモーメント問題とタウ関数のかかわりー

同志社大学　　中村　佳正（Yoshimasa Nakamura）

1　はじめに

最近，可積分系のタウ関数は，応用数学の様々な局面で使われている基本的な概念と密接な関係にあることが認識されてきた．ある種の行列の固有値計算アルゴリズムや数列の収束加速法自身が離散時間可積分系であり，アルゴリズムはタウ関数についての漸化式とみなせることが好例である．また，任意の初期値に対して極めて数値安定性のよいソリトン方程式の差分化がタウ関数の観点から進められている．さらに，戸田分子はタウ関数を通じ正値対称行列の空間の双対平坦座標によって線形化されることもわかっている．

では，可積分系のタウ関数を基礎とした数学的方法論を確立できないであろうか．この可能性を追求する過程で，与えられたモーメントからもとの Stieltjes 測度を構成するモーメント問題とタウ関数との古くて新しいかかわりに気づく．

この小論では，まず，Moser hierarchy による Stieltjes 測度の可積分変形 [14] を解説し，さらに，種々の確率分布族とその平均と分散の変形，直交多項式とその零点の軌道を書き下す．戸田分子のタウ関数の正値性はモーメント問題が解をもつための Toeplitz 条件を保証している．

2　戸田分子とモーメント問題（準備）

1次元有限戸田分子（有限非周期戸田方程式）の Hamiltonian[7]

$$H=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2+\sum_{k=1}^{n-1}\exp(x_k-x_{k+1})$$

からスタートする．ただし，質点の位置 x_k は

$$x_0=-\infty,\qquad x_{n+1}=\infty$$

なる境界条件を満たすものとする．Flaschka の変数

$$a_k = \frac{1}{2}\exp(\frac{1}{2}(x_k - x_{k+1})), \qquad b_k = -\frac{1}{2}y_k$$

について Hamilton の運動方程式と境界条件は

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= a_k(b_{k+1} - b_k), \qquad \frac{db_k}{dt} = 2({a_k}^2 - {a_{k-1}}^2), \\ a_0 &= 0, \qquad a_n = 0 \end{aligned}$$

と表される．有限戸田分子の Lax 表示は 3 重対角行列 L と歪対称行列 Pを用いて

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= [P,\ L], \qquad [P, L] \equiv PL - LP, \\ L &= \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \text{\Large 0} \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ \text{\Large 0} & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & \text{\Large 0} \\ -a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ \text{\Large 0} & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により与えられる．L は対称で非対角成分にゼロがないことからその固有値λ_jは相異なる実数であることがわかる．また，L が Lax 表示を満たすこととλ_jが時間変数 t に依らないことの同値性が Lax 表示の一般的性質として知られている．ゆえに固有値λ_jは戸田分子の n 個の独立な第 1 積分である．Hamiltonian H はλ_jの 2 乗和により表される．

Moser [7] は有限戸田分子の作用角変数を見いだす過程で n 次有理関数

$$\begin{aligned} f_n(z;t) &= {e_n}^{\top}(zI - L(t))^{-1}e_n, \qquad e_n = (0, \cdots, 0, 1)^{\top} \\ &= \frac{z^{n-1} + q_{n-2}z^{n-2} + \cdots + q_0}{z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_0} \end{aligned}$$

を導入した．分母は L の固有多項式に一致する．係数 p_j，q_jは a_k，b_kの多項式であるがこの場合の特殊性として $z = \lambda_j$における $f_n(z;t)$ の留数はすべて正である．従って，

$$f_n(z;t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j^2(t)}{z - \lambda_j}$$

と部分分数展開される．Flaschka の変数 (a_k, b_k) に対して $({r_j}^2, \lambda_j)$ を **Moser の変数**と呼ぶことにする．両者の微分同相性も確かめられている．なお，${r_j}^2$は$\sum_{j=1}^{n} {r_j}^2 = 1$ を満たさねばならない．

戸田分子を Moser の変数についてみると

$$\frac{dr_j}{dt} = -\lambda_j r_j + r_j \sum_{k=1}^{n} \lambda_k {r_k}^2, \qquad \frac{d\lambda_j}{dt} = 0$$

なる力学系を得る．λ_jは戸田分子の第1積分であったから，λ_jを係数にもつ第1式は戸田分子の等エネルギー曲面上の力学系 (level dynamics) とみなせる．これを **Moser の力学系**と呼ぼう．この力学系は，戸田分子とは無関係に，数理生物学においては突然変異のないレプリケーター（複製）方程式，ニューロ平均化学習方程式などとして現れるもので，拘束条件のついた斥力の調和振動子系として完全積分可能性が証明されている (cf. [9]).

n 次有理関数の原点 $z=0$ 周りでの Laurent 係数を **Markov パラメータ**という [4]．ここでは $f_n(z;t)$ の Markov パラメータを h_kと書く，

$$f_n(z;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k}{z^{k+1}}.$$

Markov パラメータは線形制御システムの理論で重要な役割を演じている．h_kは Moser の変数と

$$h_0 = 1, \qquad h_k = \sum_{j=1}^{n} {\lambda_j}^k {r_j}^2$$

の関係にある．Moser の力学系は Markov パラメータについてみると無限連立系

$$\frac{dh_k}{dt} = 2h_1h_k - 2h_{k+1}, \qquad k=1,2,\cdots$$

と表される．この力学系は Kac と van Moerbeke [5] が提出した可積分系（**Kac-van Moerbeke 系**）を変形したものに一致する．

従来，多くのパラメータをもつ特殊解を構成するための作業仮設であったタウ関数の数学的意味を考察する過程で，最近 [10] において，有限戸田分子のタウ関数とその正定値性が確認された．この場合のタウ関数は Kac-van Moerbeke 系を線形化する変数のなす Hankel 行列式で表され，ソリトン解ではなく戸田方程式のいわゆる分子解を記述している．具体的には

$$\tau_k(t) = \begin{vmatrix} g & g_1 & \cdots & g_{k-1} \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k-1} & g_k & \cdots & g_{2k-2} \end{vmatrix} > 0, \qquad k=1,2,\cdots,n$$

で与えられる．ここに，g_jは Markov パラメータと $g^{-1}dg/dt = h_1$，$g_k = gh_k$の関係にある．

さて，戸田分子とモーメント問題のかかわりについて述べよう．ここで（Hamburger の）**モーメント問題**とは，与えられたモーメント列 $\{<\lambda^k>\}$ に対して

$$<\lambda^k> = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\alpha(\lambda), \qquad k=1,2,\cdots$$

なる非減少関数$\alpha(\lambda)$ を求める問題である．$\alpha(\lambda)$ が存在するための必要十分条件として $<\lambda^k>$のなす $n\times n$Hankel 行列式が $n=1,2,\cdots$のすべてについて非負であることが知られている（**Toeplitz** の条件 [1]）．

δをデルタ関数とし，

$$d\alpha_n(\lambda)=\sum_{j=1}^{n} {r_j}^2\delta(\lambda-\lambda_j)d\lambda$$

なる Stieltjes 測度$\alpha_n(\lambda)$ を考えよう．明らかに，

$$f_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha_n(\mu)}{z-\mu}.$$

ここで $d\alpha_n(\lambda)$ の定めるモーメント$<\lambda^k>_n$を導入すると

$$<\lambda^k>_n\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^k d\alpha_n(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}{\lambda_j}^k{r_j}^2$$

であるから，$<\lambda^k>_n$は Markov パラメータ h_kに他ならないことがわかる．一方，${r_j}^2$は離散型（デルタ関数型）の Stieltjes 測度（非減少関数）$\alpha_n(\lambda)$ を定めるとみなせるから，結局，Moser の力学系は Stieltjes 測度の 1 ーパラメータ変形を，Kac-van Moerbeke 系は対応するモーメントの変形を記述することになる．Kac-van Moerbeke 系は線形化可能．これにより$<\lambda^k>_n=\sum_{j=1}^{n}{\lambda_j}^k{r_j}^2(0)$ を初期値とする解$<\lambda^k>_n(t)$ を用いて Moser の力学系の解 ${r_j}^2(t)$ を構成できれば，離散型に限定した意味で一種のモーメント問題を解いたことになる．同時に戸田分子のタウ関数が得られるが，

$$\begin{vmatrix} 1 & <\lambda> & \cdots & <\lambda^{k-1}> \\ <\lambda> & <\lambda^2> & \cdots & <\lambda^k> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <\lambda^{k-1}> & <\lambda^k> & \cdots & <\lambda^{2k-2}> \end{vmatrix}=g^{-k}\tau_k(t)$$

よりタウ関数の正値性は Toeplitz 条件に他ならない．以上が [14], [13] において提示した Hamburger のモーメント問題における有限戸田分子の役割の概要である．まとめるとつぎのようになる．

$$\begin{array}{ccc} \text{Stieltjes 測度}: \alpha_n(\lambda) & \xrightarrow{\text{Moser の力学系の時間発展}} & \alpha_n(\lambda;t) \\ \downarrow & & \uparrow \text{モーメント問題} \\ \text{モーメント}: <\lambda^k>_n & \xrightarrow{\text{Kac-van Moerbeke 系の時間発展}} & <\lambda^k>_n(t) \end{array}$$

Stieltjes 測度とモーメントは確率分布や直交多項式の理論を通じて広く応用数理の問題に顔を見せている．では，離散型に限らずもっと一般の Stieltjes 測度の適当な可積分系に

よる“可積分変形”を議論することはできないか？ 対応する平均・分散，多項式の零点の“可積分変形”を具体的に書き下せないか？ これがこの小論の主題である．

次節では離散確率分布の変形を記述する．登場する力学系は有限戸田分子の hierarchy [8] の level dynamics を特徴づける力学系，離散 Moser hierarchy とモーメントの高次の時間発展を記述する離散 Kac-van Moerbeke hierarchy である．4節ではこれらをさらに拡張して連続確率分布の可積分変形を論じる．無限戸田分子 hierarchy のタウ関数の正定値性はモーメント問題の解の存在を保証している．5節では種々の古典的直交多項式とその零点の可積分変形を記述する．なお，最近，直交多項式・level statistics・可積分系の密接な関係が特に量子重力などの数理物理で論じられているが，ここでの議論との相互関係を5節で簡単に述べる．

3 離散 Moser hierarchy と離散確率分布

まず，ソリトン方程式の佐藤理論にならって無限個の時間変数（変形パラメータ）を準備する，

$$t = (t_1, t_2, \cdots) \in \mathbf{R}^\infty.$$

ここで離散 Moser hierarchy と名づけるのは非線形力学系

$$\begin{aligned} \frac{\partial {r_j}^2}{\partial t_m} &= \left({\lambda_j}^m - \sum_{k=1}^n {\lambda_k}^m {r_k}^2 \right) {r_j}^2, \\ &= ({\lambda_j}^m - < \lambda^m >_n) {r_j}^2, \qquad m = 1, 2, \cdots, \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

である．λ_jは定数．$m = 1$ のときが本来の Moser の力学系である．Lax 表示はつぎの通り．

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t_m} &= [[C^m, L], L], \\ L &= \begin{pmatrix} {r_1}^2 & r_1 r_2 & \dots & r_1 r_n \\ r_2 r_1 & {r_2}^2 & \dots & r_1 r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_n r_1 & r_n r_2 & \dots & {r_n}^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

なお，離散 Moser hierarchy は [14] において導入された他 [3] にも顔をのぞかせている．$\sum_{j=1}^n {r_j}^2(0) = 1$ であれば，$\sum_{j=1}^n {r_j}^2(t) = 1$ は明らか．

離散 Moser hierarchy にλ^kを乗じ，期待値をとって離散 Kac-van Moerbeke hierarchy

$$\frac{\partial < \lambda^k >_n}{\partial t_m} = < \lambda^{k+m} >_n - < \lambda^k >_n < \lambda^m >_n, \qquad k, m = 1, 2, \cdots$$

を定める．$m=1$ とすればKac-van Moerbeke系に帰着する．以上の設定で離散型Stieltjes測度$\alpha_n(\lambda)$ の離散 Moser hierarchy による可積分変形を考察しよう．

離散 Kac-van Moerbeke hierarchy より$\partial < \lambda^k >_n / \partial t_m = \partial < \lambda^m >_n / \partial t_k$であるから

$$< \lambda^k >_n (t) = \frac{\partial \log g(t)}{\partial t_k}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

なる正値関数 $g(t)$ が存在する．これを離散 Kac-van Moerbeke hierarchy に代入すると線形系

$$\frac{\partial g}{\partial t_m} = \frac{\partial^m g}{\partial {t_1}^m}, \qquad m = 1, 2, \cdots$$

を得る．従って，離散 Kac-van Moerbeke hierarchy の解は

$$g(t) = \sum_{j=1}^{n} {r_j}^2(0) \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} {\lambda_j}^m t_m\right)$$

により与えられる．同時に離散Moser hierarchy の係数も定まり，Moser hierarchy の解は線形系

$$\frac{\partial {r_j}^2}{\partial t_m} = \left({\lambda_j}^m - \frac{\partial \log g(t)}{\partial t_m}\right) {r_j}^2$$

の求積により書き下すことができる．実際，

$${r_j}^2(t) = \frac{{r_j}^2(0) \exp(\sum_{m=1}^{\infty} {\lambda_j}^m t_m)}{\sum_{\ell=1}^{n} {r_\ell}^2(0) \exp(\sum_{m=1}^{\infty} {\lambda_\ell}^m t_m)}$$

が離散型 Stieltjes 測度$\alpha_n(\lambda)$ の変形を与えている．$g_k = \partial g / \partial t_k$を用いて導入される有限戸田分子 hierarchy のタウ関数とその正定値性については [14], [13] を参照されたい．

さて，$\sum_{j=1}^{n} {r_j}^2(t) = 1$ に注意して ${r_j}^2$を事象 $\{\lambda = \lambda_j\}$ の生起確率とみなすと，離散 Moser hierarchy の解 ${r_j}^2(t)$ は多項分布の確率密度関数の変形を引き起こすと考えることができる．特に，$g(t_1) = \sum r_j^2(0) \exp(\lambda_j t_1)$ はモーメント母関数に他ならない．もし$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots < \lambda_n$かつ m が奇数であれば $t_m \to \infty$ において ${r_j}^2(t_m) \to \delta_{j,n}$となり，分布の平均と分散はそれぞれ$\mu \to n$，$\sigma^2 \to 0$ となる．レプリケーター方程式でいえば単独の種が生き残ることと対応している．m が偶数で$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots < \lambda_n$かつ $|\lambda_1| = |\lambda_n|$ のときには

$${r_j}^2(t_m) \to \frac{\delta_{j,1} {r_1}^2(0) + \delta_{j,n} {r_n}^2(0)}{{r_1}^2(0) + {r_n}^2(0)}$$

となり，σ^2は正の一定値に近づく．これは種の共存状態への収束を表している．

つぎに離散 Stieltjes 測度 $d\alpha_n(\lambda)$ において $n \to \infty$ の場合を考察しよう．対応する離散 Moser hierarchy

$$\frac{\partial {r_j}^2}{\partial t_m} = ({\lambda_j}^m - < \lambda^m >_n) {r_j}^2, \qquad m = 1, 2, \cdots, \quad j = 1, 2, \cdots$$

は無限戸田分子（半無限戸田方程式）hierarchy の level dynamics を記述しているとみなせる．次節で述べる手順と同様にして離散 Moser hierarchy の求積とタウ関数$\tau_k(t)$ の任意の kについての正値性を示すことができる．

ここでは特に離散 Stieltjes 測度 $d\alpha_\infty(\lambda)$ を

$$d\alpha_\infty(\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu_0}{\mu_0}^j}{j!}\delta(\lambda-j)d\lambda, \qquad 0<\mu_0$$

と選ぼう．これは Poisson 分布の分布関数である．離散 Moser hierarchy の $t_1$flow，すなわち，本来と戸田分子の時間変数による $d\alpha_\infty(\lambda)$ の変形を考える．モーメント母関数は $g(t_1)=\exp(\mu_0(e^{t_1}-1))$ であるから，離散 Stieltjes 測度の 1 ーパラメータ変形は

$$d\alpha_\infty(\lambda;t_1)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu(t_1)}\mu^j(t_1)}{j!}\delta(\lambda-j)d\lambda$$

と表される，ただし，$\mu(t_1)=\mu_0\exp(t_1)$ である．$\mu(t_1)$ は平均および分散の変形を与えている．

幾何分布の $t_1$flow による可積分変形を扱うには

$$d\alpha_\infty(\lambda;0)=\sum_{j=1}^{\infty}(1-p_0){p_0}^j\delta(\lambda-j)d\lambda, \qquad 0<p_0<1$$

を初期値にとればよい．結果は

$$d\alpha_\infty(\lambda;t_1)=\sum_{j=1}^{\infty}(1-p(t_1))p^j(t_1)\delta(\lambda-j)d\lambda$$

となる．ここに，$p(t_1)=p_0\exp(t_1)$．Poisson 分布と異なるのはモーメント母関数 $g(t_1)=(1-p_0)/(1-p_0\exp(t_1))$ が有限時刻で爆発することである．

4 連続 Moser hierarchy と連続確率分布

区間 $(-\infty,\infty)$ 上で定義された非減少連続関数$\alpha(\lambda)$ の積分

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha(\lambda)}{z-\lambda}$$

を Moser の有理関数 $f_n(z)$ の連続極限として考察する．逆に，$f_n(z)$ は $f(z)$ の Padé 近似となっている．$\alpha(\lambda)$ の定めるモーメント列を

$$<\lambda^m>=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^m d\alpha(\lambda)$$

とかく．離散 Stieltjes 測度の可積分変形を記述する離散 Moser hierarchy の類似として連続 Moser hierarchy

$$\frac{\partial d\alpha(\lambda;t)}{\partial t_m} = (\lambda^m - < \lambda^m >) d\alpha(\lambda;t)$$

を導入しよう．もし $\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha(\lambda;0) = 1$ であれば $\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha(\lambda;t) = 1$ が成り立つ．

前節と同様に連続 Kac-van Moerbeke 系

$$\frac{\partial < \lambda^k >}{\partial t_m} =< \lambda^{k+m} > - < \lambda^k >< \lambda^m >, \qquad k, m = 1, 2, \cdots$$

が導入される．連続 Kac-van Moerbeke 系は

$$< \lambda^k > (t) = \frac{\partial \log g(t)}{\partial t_k}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

なる変数の導入によって線形化される．解の表示は

$$g(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} t_m \lambda^m\right) d\alpha(\lambda;0)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha(\mu;0)}$$

で与えられる．この結果，連続 Moser hierarchy は

$$\frac{\partial d\alpha(\lambda)}{\partial t_m} = \left(\lambda^m - \frac{\partial \log g(t)}{\partial t_m}\right) d\alpha(\lambda)$$

と表され求積によって解けるものとなる．

本節ではいくつかの連続確率分布の可積分変形を書き下す．まず，1 次元の Gauss 分布族の空間上の $t_1$flow を考える．Stieltjes 測度

$$d\alpha(\lambda;0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(\lambda-\mu_0)^2}{2{\sigma_0}^2}\right) d\lambda, \qquad 0 < \sigma_0$$

を初期値とする．モーメント母関数 $g(t_1)$ は

$$g(t_1) = \exp\left(\mu_0 t_1 + {\sigma_0}^2 {t_1}^2/2\right)$$

となることから，連続 Moser hierarchy の求積によりパラメータ t_1 を含む密度関数

$$w(\lambda, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_1)} \exp\left(-\frac{(\lambda-\mu(t_1))^2}{2\sigma(t_1)^2}\right)$$

を得る．ここに，平均，分散はそれぞれ $\mu(t_1) = \mu_0 + {\sigma_0}^2 t_1$，$\sigma(t_1) = \sigma_0$ である．この結果，戸田分子の時間変数 t_1 は Gauss 分布の平均の平行移動を記述し，分散は不変とすることが示された．

つぎに，Gauss 分布族の空間上の $t_2$flow を調べよう．連続 Kac-van Moerbeke 系の解は

$$g(t_2) = \frac{1}{\sqrt{1-2{\sigma_0}^2 t_2}} \exp\left(\frac{\mu_0 t_2}{1-2{\sigma_0}^2 t_2}\right)$$

により与えられるから，パラメータ t_2をもつ密度関数は連続 Moser 系を積分して

$$\begin{aligned} w(\lambda, t_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2)} \exp\left(-\frac{(\lambda-\mu(t_2))^2}{2\sigma(t_2)^2}\right), \qquad t_2 < \frac{1}{2}{\sigma_0}^{-1} \\ \mu(t_2) &= \frac{\mu_0}{1-2{\sigma_0}^2 t_2}, \qquad \sigma^2(t_2) = \frac{{\sigma_0}^2}{1-2{\sigma_0}^2 t_2} \end{aligned}$$

と書き下される．ゆえに，高次の戸田 flow t_2は Gauss 分布の平均と分散のパラメータ空間である上半面 $\{\mu, \sigma^2\}$ の原点を通る半直線を記述する．

興味深いのは，変形パラメータを $s = (1-2{\sigma_0}^2 t_2)^{-1}$ に変換すれば，この軌跡が Ornstein-Uhlenbeck の拡散過程における平均と分散の変形 [15] と一致することである．ここで，s は時間変数，μ_0はドリフト係数，${\sigma_0}^2/2$ は拡散係数を表している．一方で，Ornstein-Uhlenbeck の拡散過程は双対平坦座標により線形化可能な測地線方程式とみなされており [15]，本節の結果は可積分系と情報空間の幾何学の新たなかかわりを意味している．この方面については [10], [12] を参照されたい．

続いてガンマ分布の $t_1$flow を簡単に述べる．パラメータ t_1をもつ密度関数は

$$\frac{\lambda^{p(t_1)-1}}{\Gamma(p_0)\sigma^{p(t_1)}(t_1)} \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma(t_1)}\right)$$

ただし，

$$p(t_1) = p_0, \qquad \sigma(t_1) = \frac{\sigma_0}{1-\sigma_0 t_1}$$

と表される．従って，平均と標準偏差のなす上半面においてスケール変換に対応した半直線を描く．また，指数分布については密度関数は

$$\frac{1}{\sigma(t_1)} \exp\left(-\frac{\lambda-\mu_0}{\sigma(t_1)}\right), \qquad \sigma(t_1) = \frac{\sigma_0}{1-\sigma_0 t_1}$$

となり，戸田分子の時間変数 t_1はやはりスケール変換を引き起こすことがわかる．Gauss 分布の場合 $t_1$flow は平行移動であったことと対比すべき性質である．

5 直交多項式とその零点の可積分変形

直交多項式の一般論 [17] によれば，$\alpha(\lambda)$ を区間 (a, b) 上の非減少関数とし，$\{p_n(\lambda)\}$ を $\alpha(\lambda)$ の定める

$$\int_a^b p_n(\lambda) p_m(\lambda) d\alpha(\lambda) = \delta_{n,m}, \qquad n = \deg(p_n)$$

なる直交多項式とするとき，各 $p_n(\lambda)$ は (a,b) において相異なる n 個の零点をもつ．$p_n(\lambda)$ と $p_{n+1}(\lambda)$ の零点はλ-軸上互いに入れ子になっている．また，Stieltjes 測度の 1 ーパラメータ変形が引き起こす零点の移動は応用上重要とされている（Markov の定理, [17], p.115）.

一方，level statistics に関連して戸田分子による直交多項式の変形が [16] で論じられたが，その際の Stieltjes 測度の変形は

$$\frac{\partial d\alpha(\lambda)}{\partial t} = \lambda d\alpha(\lambda)$$

と表され，連続 Moser hierarchy の $t_1$flow でモーメント$<\lambda>$をゼロとしたものに相当している． また，[6] において，

$$\frac{\partial d\alpha(\lambda)}{\partial t} = f(\lambda)d\alpha(\lambda)$$

なる Stieltjes 測度の変形が Lax 方程式$\partial L/\partial t = [L, f(L)_+]$ を誘導することが示されている．これらは Stieltjes 測度の線形な変形方程式である点で Moser hierarchy と異なっている．なお，直交多項式をめぐる Markov, Szegö 等の研究から戸田分子のタウ関数までの解説が [2] にある．

そこで本節では連続 Moser hierarchy による重み関数 $w(\lambda) = d\alpha(\lambda)/d\lambda$ の可積分変形による Hermite 多項式と Laguerre 多項式の零点の移動を調べよう．まず，Hermite 多項式に対する $t_1$flow を扱う．重み関数

$$w(\lambda;0) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right), \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

の変形は，前節と同様な手順により Moser hierarchy を積分することで

$$w(\lambda;t_1) = \exp\left(-\frac{(\lambda-t_1)^2}{2}\right)$$

と書かれる．$t_1$flow は零点のλ-軸上の平行移動を生成する．ちなみに，パラメータ t_1をもつ Hermite 多項式のいくつかはつぎの通り．

$$\begin{aligned} H_0(\lambda) &= 1, \quad H_1(\lambda) = \lambda - t_1, \\ H_2(\lambda) &= (\lambda-t_1)^2 - 1, \quad H_3(\lambda) = (\lambda-t_1)^3 - 3(\lambda-t_1). \end{aligned}$$

Hermite 多項式の $t_2$flow は重み関数の変形

$$w(\lambda;t_2) = \sqrt{1-2t_2}\exp\left(-\frac{(1-2t_2)\lambda^2}{2}\right), \quad t_2 < \frac{1}{2}$$

と対応している．具体的にはつぎの通り，

$$\begin{aligned} H_0(\lambda) &= 1, \quad H_1(\lambda;t_2)=\sqrt{1-2t_2}\lambda, \\ H_2(\lambda) &= (1-2t_2)\lambda^2-1, \quad H_3(\lambda)=(1-2t_2)^{3/2}\lambda^3-3\sqrt{1-2t_2}\lambda. \end{aligned}$$

$t_1$flow と異なり，高次の戸田分子の時間変数 t_2 は Hermite 多項式の零点の λ-軸におけるスケール変換を記述している．

最後に Laguerre 多項式について述べる．重み関数の変形は

$$w(\lambda;t_1)=(1-t_1)^{c+1}\lambda^c\exp(-(1-t_1)\lambda))$$

となり，パラメータ t_1 について零点は λ-軸上のスケール変換を受けることがわかる．実際，

$$\begin{aligned} L_0(\lambda) &= 1, \quad L_1(\lambda)=-(1-t_1)\lambda+(c+1), \\ L_2(\lambda) &= \frac{1}{2}(1-t_1)^2\lambda^2-(c+2)(1-t_1)\lambda+\frac{1}{2}(c+2)(c+1). \end{aligned}$$

6 おわりに

本稿での議論を振り返ると，まず，Stieltjes 測度の高次の戸田分子による可積分変形 $t_2$flow により，Gauss 分布は Ornstein-Uhlenbeck の拡散過程と同じ 1 ーパラメータ変形を受けることがあげられる．これはたいへん奇妙にみえるかもしれないが，可積分系の手法で扱うことのできる非線形力学系を離散時間系・確率力学系・近可積分系を含む散逸系にまで広げようという「可積分系の応用解析」の試み (cf. [11]) の最前線の話題に位置づけられよう．

また，応用上も重要な確率分布族や直交多項式の 1 ーパラメータ変形を具体的に書き下している．講演では，続いて，有限体上のタウ関数による BCH-Goppa 符号の復号化アルゴリズムを提案した（この着想に関する詳細は稿をあらためて論じたい）．これらは力学系とは無関係な非線形問題に「可積分系」を導入するという「可積分系の応用解析」のもう一方の典型である．前回の講究録 [12] でも述べたように，今後は，本来可積分系とは無縁な局面においても「可積分系」は exact かつ explicit な取り扱いを行う際の極めて「あたりまえの方法」にまで発展していかねばならないと考えている．可積分系といえばカオス系との対比で特殊な現象の物理学という印象が定着しているのが残念である．ここでは，与えられた方程式や考えている現象が可積分かどうかを問題にしているのではなく，可積分系の手法の適用によって本来の問題のより満足のいく解決をはかろうという立場をとるのである．

この路線はいずれ「可積分系数学の固有性の解体」を迎えることになるとの予測がある([13] 巻頭参照). 固有性にとらわれて重箱の隅をつつくより，新しい領域に踏み込んで常にアクティブでありたい. 願わくば，解体後の「可積分系の応用解析」の眺望は，線形問題のフーリエ解析に対比すべき

「可積分系解析」

のようなものであってほしい. タウ関数と Lax 表示が「可積分系解析」の key words の要素となろう.「あれも可積分系，これも可積分系」という数理現象としての普遍性に驚く段階はもはや過去のものである. 誰が「可積分系解析」のつぎの鉱脈を掘り当てるのだろうか. 様々な分野の研究者との交流を大切にしたい.

参考文献

[1] N.I. Ahiezer and M. Kreĭn, Some Questions in the Theory of Moments, Transl. Math. Monographs Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, 1962.

[2] 青本和彦述・伊藤雅彦記，Padé 近似・直交多項式・Selberg 積分,「無限自由度の可積分系とその周辺」INFINITE ANALYSIS Lec. Note No. 9, 1994, pp. 100–111.

[3] A.M. Bloch, H. Flaschka and T. Ratiu, A convexity theorem for isospectral manifolds of Jacobi matrices in a compact Lie algebra, Duke Math. J. **61**(1990), 41–65.

[4] F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices Vol. 2, Chelsea, New York, 1959.

[5] M. Kac and P. van Moerbeke, On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattice, Adv. in Math. **16** (1975), 160–169.

[6] Y. Kato and K. Aomoto, Jacobi-Perron algorithms, bi-orthogonal polynomials and inverse scattering problems, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **20** (1984), 635–658.

[7] J. Moser, Finitely many points on the line under the influence of an exponential potential -An integrable system, Lec. Notes in Phys., Springer **38**, (1975), 467–497.

[8] Y. Nakamura, The level manifolds of a generalized Toda equation hierarchy, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 83–94.

[9] Y. Nakamura, Neurodynamics and nonlinear integrable systems of Lax type, Japan J. Indust. Appl. Math. **11** (1994), 11–20.

[10] Y. Nakamura, A tau-function for the finite Toda molecule, and information spaces, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., **179** (1994), 205–211.

[11] 中村佳正，非線形可積分系の応用解析の新展開,「非線形可積分系研究の現状と展望」数理解析研究所講究録 Vol. 868, 1994, pp. 223-242.

[12] 中村佳正，アルゴリズム・情報幾何・非線形可積分系,「非線形可積分系による応用解析」数理解析研究所講究録 Vol. 889, 1994, pp. 1-18.

[13] 中村佳正，モーメント問題と非線形可積分系,「非線形可積分系の数理」早稲田大学理工学総合研究センター招聘研究（数理科学）研究報告集 III, 1995, pp. 125-135.

[14] Y. Nakamura and Y. Kodama, Moment problem of Hamburger, hierarchies of integrable systems, and the positivity of tau-functions, Acta Appl. Math. **39** (1995), 435–443.

[15] T. Obata, H. Hara and K. Endo, Differential geometry of nonequilibrium processes, Phys. Rev. A **45**(1992), 6997–7001.

[16] K. Sogo, Time-dependent orthogonal polynomials and theory of soliton –Applications to matrix model, vertex model and level statistics, J. Phys. Soc. Japan **62** (1993), 1887–1894.

[17] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, 4th ed., Colloq. Publ., Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.