数理解析研究所講究録
933巻 1995年 105-112

非線形差分方程式の保存量

辻本 諭, 広田良吾
S.Tsujimoto, R.Hirota

早稲田大学理工学部
School of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

可積分系のもつ重要な性質として、無限個の保存量を持つという事が挙げられる。保存量を保存則として表すと、

保存則 (conservation law)

$$\frac{\partial D(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$D(x,t)$: 保存密度 (conserved density),
$F(x,t)$: 流束 (flux)

上記の保存則において適当な境界条件を付加することにより、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int D(x,t)dx=0$$

$\int D(x,t)dx$ が時間不変な量 (保存量) として得られる。

しかし、時間変数まで差分化された非線形発展方程式の保存則に関し、それを実際に計算する一般的な理論はほとんど議論されていないように思う。そこで、本稿においては、Lotak-Volterra 方程式, Lattice KdV 方程式 および、Toda 方程式を離散化した方程式について、あまり厳密な議論ではないがここで提案する手続きに基づき、実際に計算したい。また、得られた保存則から、差分方程式の行列方程式を求める。

- KdV 方程式の高次保存量
  時間・空間共に連続である KdV 方程式

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{2}$$

の保存則の場合は下記のような手続きが良く知られている。

1. 方程式を斉次形で表わす。
(KdV 方程式の場合)$u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}$ をそれぞれi, j, k次のランクとし、(2) 式に代入し、全ての次数が等しくなるよう $i:j:k$を決める。
$$u \to 2\text{ 次}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \to 1\text{ 次}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to 3\text{ 次}$$
とすれば、KdV 方程式は 5 次の斉次方程式である。

2. 求めたい次数の斉次多項式を保存密度 (流束) の候補として用意する。
(例) 6 次の斉次多項式 (a_iは未定係数)
$$a_1u^3 + a_2uu_{xx} + a_3u_x^2 + a_4u_{xxxx} \tag{3}$$

3. 保存則をなすよう未定係数を決める。
(例) (3) 式を保存則 (1) に代入し、両辺が等しくなるよう未定係数を決め下記のD_3を得る。

$$\begin{aligned}
D_1 &= u, & F_1 &= -3u^2 + u_{xx} \\
D_2 &= u^2, & F_2 &= -4u^3 + 2uu_{xx} - {u_x}^2 \\
D_3 &= u^3 + \tfrac{1}{2}u_x^2, & F_3 &= -\tfrac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} - 6u{u_x}^2 + u_{xxx}u_x - \tfrac{1}{2}{u_{xx}}^2
\end{aligned}$$

- Lotka-Volterra 方程式
時間は連続で空間を離散化した方程式である Lokta-Volterra 方程式の保存則を考える。
$$\frac{d}{dt}u_n = u_n(u_{n-1} - u_{n+1}) \tag{4}$$
この場合、ランクに相当するものとしてu_kの積の次数を考える。(4) 式の 3 項 u_{n-1}, u_n, u_{n+1}の関係を考慮することにより、保存密度の候補を有限個に絞ることができる。この場合においては,
$$D_k = \tilde{\sum_i} a_i u_n u_{n+l_1} \cdots u_{n+l_{k-1}}$$
(但し,$\tilde{\sum}$は、$0 \le l_1 \le \cdots \le l_{k-1} \le k-1$ の全ての組合せの和とする。) で十分であることが分かる。

ここで, 上の D_kが保存則
$$\frac{d}{dt}D_k = \Delta_n F_k \qquad (\Delta_n\text{は前進差分})$$
を満たすように未定係数 a_iは決めることができ、保存密度を得る。
$$\begin{aligned}
D_1 &= u_n \\
D_2 &= \frac{1}{2}u_n^2 + u_nu_{n+1} \\
D_3 &= \frac{1}{3}u_n^3 + u_n^2u_{n+1} + u_nu_{n+1}^2 + u_nu_{n+1}u_{n+2}
\end{aligned}$$

2 離散時間方程式の保存則

Discrete-time Lotka-Volterra (DLV) 方程式

$$u(s+1,n)-u(s,n)=\delta[u(s,n)u(s,n-1)-u(s+1,n)u(s+1,n+1)]$$

の保存則を考える。

独立変数が全て差分化されたこの方程式は、$u(s,n)$ の積の次数もそろっておらず、今までの手続きに沿った方法では効率的に保存則を見つけることは困難である。

ここでは、時間連続の Lotka-Volterra 方程式の時に用いた $u(s,t)$ の次数を単純に考えるのではなく、次のような $X(u_n^s,u_{n\pm1}^s)$ といった量を導入する。

保存則へ

1. 差分方程式を次の形式に書き直す.

$$X(u_n^{s+1},u_{n\pm1}^{s+1},u_{n\pm2}^{s+1},\dots)=Y(u_n^s,u_{n\pm1}^s,u_{n\pm2}^s,\dots) \tag{5}$$

ここで $X(\tilde{u}^s)$ は保存則の保存密度を与える.

2. $X(\tilde{u}^s)$ の積の組合せから, 高次の保存密度 を与えるよう未定係数を決める.

以下ではこの仮定を基に実際の例に対して適用してみたいと思う。

1. Discrete Lotka-Volterra Equation の場合

DLV 方程式は (5) での形式は次式で与えることができる。

$$u(s+1,n)[1+\delta u(s+1,n+1)]=u(s,n)[1+\delta u(s,n-1)]$$

ここで得られた $X_n^s(=u_n^s(1+\delta u_{n+1}^s))$ に関して保存密度の候補を時間連続の Lokta-Volterra 方程式の時と同様に構成し、保存則

$$\Delta_s D_i=\Delta_n F_i$$

が成り立つよう未定係数を決めることにより、次に挙げる高次の保存密度 (流束) を得る。

$$\begin{aligned}
D(1)&=u_n^s(1+\delta u_{n+1}^s)\equiv X_n,\\
F(1)&=-u_{n-1}^s u_n^s,\\
D(2)&=\frac{1}{2}X_n^2+X_nX_{n+1},\\
F(2)&=-u_{n-1}u_n(u_n+u_{n+1}+\delta u_{n+1}u_{n+2}+\frac{1}{2}\delta u_{n-1}u_n),\\
D(3)&=\frac{1}{3}X_n^3+X_nX_{n+1}^2+X_n^2X_{n+1}+X_nX_{n+1}X_{n+2},\\
F(3)&=\dots.
\end{aligned}$$

ここで挙げた高次の保存密度 $D(k)$ は X_nを (4) 式の u_nと読み替えると、時間連続の保存密度 D_kと一致している。

2. Discrete Lattice-KdV Equation の場合

$$\frac{1}{v_n^{s+1}} - \frac{1}{v_n^s} = \delta(v_{n+1}^{s+1} - v_{n-1}^s)$$

まず、(5) の形式で上式を書き直す。

$$\frac{1}{v_n^{s+1}} - \delta v_{n+1}^{s+1} = \frac{1}{v_n^s} - \delta v_{n-1}^s$$

より $(X(v_n^s, v_{n+1}^s) = \frac{1}{v_n^s} - \delta v_{n+1}^s)$,

$$\Delta_s X(v_n^s, v_{n+1}^s) = \Delta_n(v_n^s + v_{n-1}^s)$$

と表せており、X_n^sが保存則を満たしていることが分かる。

以上から、X_n^sを元に次のような保存密度が得られる。ここで、X_n^sの組合せとして単なる積だけではなく、その逆数も考慮していることに注意して欲しい。

$$\begin{aligned}
D(1) &= \frac{1}{v_n^s} - \delta v_{n+1}^s \equiv X_n, \\
F(1) &= v_n^s + v_{n-1}^s, \\
D(2) &= \frac{1}{X_n X_{n+1}}, \\
F(2) &= \frac{v_{n-1}^s v_n^s v_{n+1}^s}{(1 - \delta v_{n+1}^s v_{n+2}^s)}, \\
D(3) &= \frac{1}{2}\frac{1}{(X_n X_{n+1})^2} + \frac{1}{X_n X_{n+1}}\frac{1}{X_{n+1} X_{n+2}}, \\
F(3) &= \ldots .
\end{aligned}$$

3. Discrete KdV and Volterra Equation の場合
   (Discrete Modified KdV Equation)

$$w_n^{s+1} - w_n^s = \delta[(\, w_n^s w_{n-1}^s - w_{n+1}^{s+1} w_n^{s+1}\,) + a w_n^s w_n^{s+1}\,(\, w_{n-1}^s - w_{n+1}^{s+1}\,)]$$

上式を 2 通りに変形する.

$$(*). \qquad \frac{w_n^{s+1}(1 + \delta w_{n+1}^{s+1})}{1 + a w_n^{s+1}} = \frac{w_n^s(1 + \delta w_{n-1}^s)}{1 + a w_n^s}$$

$$(**). \qquad \frac{1 + a w_n^{s+1}}{1 - a\delta w_n^{s+1} w_{n+1}^{s+1}} = \frac{1 + a w_n^s}{1 - a\delta w_n^s w_{n-1}^s}$$

(5) の形式は $(*) \times (**) \times (**)_{n+1}$ より得られる．これからの手続きは、今までの例と同様であるので結果のみ挙げる。

$$D(2) = \frac{w_n^s(1+aw_{n+1}^s)(1+\delta w_{n+1}^s)}{(1-a\delta w_{n+2}^s w_{n+1}^s)(1-a\delta w_{n+1}^s w_n^s)} \equiv X_n,$$
$$F(2) = -\frac{\delta w_n^s w_{n-1}^s(1+aw_{n+1}^s)(1+aw_n^s)}{(1-a\delta w_{n+1}^s w_n^s)(1-a\delta w_n^s w_{n-1}^s)},$$

$$D(3) = \frac{1}{2}X_n^2 + X_n X_{n+1},$$
$$D(4) = \frac{1}{3}X_n^3 + X_n X_{n+1}^2 + X_n^2 X_{n+1} + X_n X_{n+1} X_{n+2}.$$

4. Discrete Toda Equation の場合 (2 階の差分方程式)

$$\begin{cases} I_n(s+1)V_n(s+1) = I_{n+1}(s)V_n(s), \\ I_n(s) - I_n(s+1) = \delta^2[V_{n-1}(s+1) - V_n(s)] \end{cases}$$

(5) の形式には,

$$I_n(s+1) + \delta^2 V_{n-1}(s+1) = I_n(s) + \delta^2 V_n(s)$$

から、X_nとして、$I_n(s) + \delta^2 V_{n-1}(s)$ を選べばいいことが分かるが, 2 階の差分方程式のため X_nだけではなく、

$$Z_n \equiv I_n(s)V_n(s)$$

で定義される Z_nという量を導入することにより、高次の保存密度を表現することが可能になる。

$$D(1) = I_n(s) + \delta^2 V_{n-1}(s) \equiv X_n$$
$$F(1) = \delta^2 V_{n-1}(s)$$
$$D(2) = \frac{1}{2}X_n^2 + Z_n$$
$$F(2) = \delta^2[\frac{1}{2}\delta^2 V_{n-1}^2 + I_n(s)V_{n-1}(s)]$$
$$D(3) = \frac{1}{3}X_n^3 + (X_n + X_{n+1})Z_n$$
$$D(4) = \frac{1}{4}X_n^4 + (X_n^2 + X_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 + Z_{n+1})Z_n + \frac{1}{2}Z_n^2$$

ここで挙げた高次の保存密度 $D(k)$ は X_nと Z_nを連続の戸田方程式の I_nと V_nに読み替えると、時間連続の保存密度 D_kと一致している。

以上の通り、2 階の差分方程式に対しても若干の修正で、保存則を効率的に見つけ出すことが可能である。

3 Miura 変換

最低次の保存密度を X_n で表し、前節で求めた各々の差分方程式の保存密度の一覧を戸田方程式の場合を除いて、下に示す。

保存密度のまとめ

Discrete Lotka-Volterra Equation
$D(1) = X_n$
$D(2) = \frac{1}{2}X_n^2 + X_nX_{n+1}$
$D(3) = \frac{1}{3}X_n^3 + X_nX_{n+1}^2 + X_n^2X_{n+1} + X_nX_{n+1}X_{n+2}$
Discrete Lattice-KdV Equation
$D(1) = X_n$
$D(2) = \frac{1}{X_nX_{n+1}}$
$D(3) = \frac{1}{2}\frac{1}{(X_nX_{n+1})^2} + \frac{1}{X_nX_{n+1}}\frac{1}{X_{n+1}X_{n+2}}$
Discrete Modified KdV Equation
$D(1) = X_n$
$D(2) = \frac{1}{2}X_n^2 + X_nX_{n+1}$
$D(3) = \frac{1}{3}X_n^3 + X_nX_{n+1}^2 + X_n^2X_{n+1} + X_nX_{n+1}X_{n+2}$

まず、Volterra 方程式と Modified KdV 方程式を比較すると、X_kの多項式としてみれば一致していることが分かる. 次に Lattice KdV 方程式であるが、D_1を除いて、D_2の $1/(X_nX_{n+1})$ を新たに X_nと選べば, 他の方程式の D_1, D_2と同じ多項式になる。

つまり、これらの多項式は下に示される X_kの多項式を共通に保存密度として持つ。

$$X_n$$

$$\frac{1}{2}X_n^2 + X_nX_{n+1}$$

$$\frac{1}{3}X_n^3 + X_nX_{n+1}^2 + X_n^2X_{n+1} + X_nX_{n+1}X_{n+2}$$

このことは、なんらかの関係を方程式が持つことを示唆している。実際に, 各々の X_nを調べると、次の Miura 変換をこれらの方程式が持っていいることがわかる。

`D-Volterra` `Lattice KdV`

$$u(s,n) = \frac{v(s,n)v(s,n+1)}{1-\delta v(s,n)v(s,n+1)}$$

`D-Volterra` `D KdV & Volterra`

$$u(s,n) = \frac{1+aw(s,n+1)}{1-a\delta w(s,n+1)w(s,n)}w(s,n)$$

4 行列方程式

前節では低次の保存則に関して、計算機を用いて発見的に求めたものである。ここでは、一般の n 次の保存則の導出方法を与える。

まず、$\alpha_n^s+\beta_n^s$が保存密度であるならば, $\alpha_n^s+\beta_{n+1}^s$も保存密度となることより、前節の多項式を次のように書き直す。

$$
\begin{aligned}
D_1 &= X_0\\
D_2 &= X_0(X_{-1}+X_0+X_1)\\
D_3 &= X_{-2}X_{-1}X_0 + X_{-1}^2X_0 + 2X_{-1}X_0^2 + X_{-1}X_0X_1 + X_0^3\\
&\qquad + 2X_0^2X_1 + X_0X_1^2 + X_0X_1X_2
\end{aligned}
$$

このように表すと、次に定義される行列 L を用いて、$D_1 = L_{3,3}, D_2 = L_{3,3}^2, D_3 = L_{3,3}^3$ と表現できる。

$$
L = \begin{bmatrix}
X_{-2} & X_{-1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
X_{-2} & X_{-1} & X_0 & 0 & 0 & 0\\
X_{-2} & X_{-1} & X_0 & X_1 & 0 & 0\\
X_{-2} & X_{-1} & X_0 & X_1 & X_2 & 0\\
X_{-2} & X_{-1} & X_0 & X_1 & X_2 & v_3\\
X_{-2} & X_{-1} & X_0 & X_1 & X_2 & v_3
\end{bmatrix}
$$

つまり、この行列 L を用いることにより、一般の n 次の保存密度の予想を与えることができる。以下で, この予想の正しいことを見ていこう。

4.1 Discrete Lotka-Volterra Eq. の Matrix 表示

$$
u_n^{s+1}(1+\delta u_{n+1}^{s+1}) = u_n^s(1+\delta u_{n-1}^s)
$$

境界条件 (Moleculer type)

$$
\begin{aligned}
u_n = 0 \qquad \text{for} \qquad & n = 0, -1\\
& n = N+1
\end{aligned}
$$

ここで, 天下り的に次に定義する行列

$$
\begin{aligned}
L_{j,k}^s &= \epsilon(j+1-k)u_k^s(1+\delta u_{k+1}^s),\\
A_{j,k}^s &= \epsilon(k-j)\epsilon(j+1-k)[1+(\delta_{j,k}-1)(1-C_k^s)]\prod_{i=1}^{j+1-k}(1-C_{k+i}^s),\\
C_k^s &= \frac{\delta u_k^s}{1+\delta u_k^s}, \qquad \epsilon(j) = 1, \qquad \text{for } j \geq 0 \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

を導入する.

例えば、$N=5$ の時行列 A は

$$
A^t = \begin{bmatrix}
1-C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1-C_3 & C_3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1-C_4 & C_4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1-C_5 & C_5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

と表記される。

以上で導入された行列 $A(s), L(s)$ を用いると、DLV 方程式は

$$A(s)L(s+1) = L(s)A(s)$$

といった、行列方程式で表すことができる。

5 まとめ

ここで述べた手法は数学的な根拠を頼りにするのではなく、"保存則を効率的に計算機などを用いて計算したい" といった動機から得られたものである。最終的には, その結果から差分方程式を適切な行列方程式で表現することができ、Bäcklund 変換などの理論から, ここで得られた保存則に対する保証もなされている。ここでの手続きが,DLV 方程式等にのみ適用可能な手法なのか, あるいはその他の差分方程式にも用いることができるのかなど, その理論的裏付けも含め検討課題である。

また、時間連続の時と時間不連続の時の保存密度は、ここで導入した X_n(及び Z_n) といった単位でみれば、一致している。この事実に関しても双線形化法を用いて調べていきたい。

参考文献

[1] R.Hirota and S.Tsujimoto:"Conserved Quantities of Nonlinear Difference-Difference Equations":J.Phys.Soc.Jpn.,vol64,September 1995.

[2] R.Hirota, S.Tsujimoto and T.Imai:"Difference Scheme of Soliton equations": in *Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems*, ed. P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck and R. D. Parmentier (Plenum, New York, 1993) p.7.

[3] R.Hirota, Tatsuya Imai, Satoshi Tsujimoto and Yasuhiro Ohta "Discrete 2N-wave interaction" Mathematics and Computers in Simulation 37(1994)371-383.