

## Resolution of Gorenstein Quotient singularities

東大数理科学 伊藤 由佳理 (Yukari Ito)

### §0. 目次

- §1. Introduction
- §2. Resolution
- §3. “McKay 対応”
- §4. 例

### §1. INTRODUCTION

#### 1.1 取り扱う特異点.

Gorenstein 商特異点  $(X, x)$  とは 局所的に  $(\mathbb{C}^n/G, 0)$  と同型な特異点である. ただし、ここで群  $G$  は  $SL(n, \mathbb{C})$  の有限部分群である.

(例)  $A_n$  型特異点

$A_n$  型特異点は  $\mathbb{C}^2$  を巡回群  $G$  で割ったときにできる特異点である. つまり群  $G$  は  $\text{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$  ( $\varepsilon$  は 1 の原始  $(n+1)$  乗根) で生成される. したがって  $(x, y)$  を  $\mathbb{C}^2$  の座標とすると、群  $G$  の作用は次のようになっている.

$$(x, y) \mapsto (\varepsilon x, \varepsilon^{-1} y).$$

このとき  $G$ -不変式として  $x^{n+1}, y^{n+1}, xy$  がとれる. よって群  $G$  による不変式環  $R$  は

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[x^{n+1}, y^{n+1}, xy] \\ &= \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^{n+1}) \end{aligned}$$

となる. つまり  $X := \mathbb{C}^2/G = \text{Spec}R$ は

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

なる方程式で特徴づけられる超曲面特異点である.

さらに特異点は原点  $(0, 0)$  のみの孤立特異点であることも方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = f = 0$$

を解くことによりわかる.

Gorenstein 商特異点には 2次元、3次元の場合 次のようなものがある.

(1) 2次元の場合

$A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ 型特異点のいずれかであり、すべて孤立超曲面特異点である.

(2) 3次元の場合

$SL(3, \mathbb{C})$  の有限部分群は全部で 12 種類ある. 特異点の様子は超曲面でないもの、孤立特異点でないものも多くある.

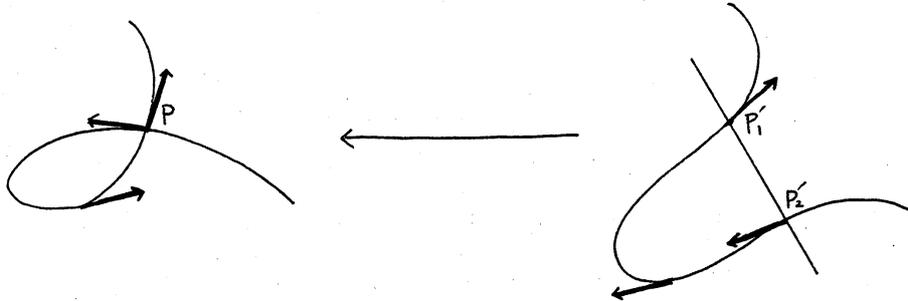
## 1.2 特異点の解消.

特異点は周りに比べて尖っていたりするところであるが、それを滑らかな点にする操作が特異点解消である.

$f: X' \rightarrow X$  が特異点解消であるとき  $X$  の特異点  $p$  以外のところは同型のままで  $X - \{p\} \cong X' - \{f^{-1}(p)\}$  となっている. また特異点解消によって新たに現れるところ  $f^{-1}(p)$  を例外集合という.

1次元の場合を考えてみると次図のようにもともと接線が2本引けるようなところが特異点である. そこで各点での接ベクトルが滑らかなようになるようにパラメトライズする操作が特異点解消にあたる. このとき新たに出てくるパラメータスペースにあたるところが例外集合である.

これはジェットコースターの影が一点に交わっていても実際にはぶつかっていないことに似ている！



### 1.3 分類理論に現れる特異点.

高次元代数多様体の分類理論には canonical singularity、terminal singularity という特異点が出てくる. ここではその定義と 2次元、3次元で知られている結果をまとめておく.

定義.  $X$ が *canonical singularity* (または *terminal singularity*) であるとき以下の性質が成り立つ.

(1) canonical bundle  $K_X$ が  $\mathbb{Q}$ -Cartier である. つまり 整数数 ( $q$ ) 倍して Cartier divisor になる. この  $q$ を *index* と呼ぶ.

(2) 任意の特異点解消  $f: X' \rightarrow X$  に対しての関係式

$$K_{X'} = f^*K_X + \sum a_i E_i$$

においてすべての例外因子  $E_i$ の係数  $a_i$ が 0以上 (または 0より大) である.

定義. 特異点解消  $f: X' \rightarrow X$ が  $K_{X'} = f^*K_X$ をみたすとき *crepant resolution* である、という.

注意.

1. Crepant resolution は minimal resolution である.
2.  $X$ が terminal singularity のとき crepant resolution は存在しないが、 $X$ が terminal singularity でないとき crepant resolution があるとは限らない.

事実. 任意次元で Gorenstein 商特異点は index 1 の canonical singularity と同じである.

2次元では次のように完全に分類されている.

canonical  $\Leftrightarrow A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ , 非特異点

terminal  $\Leftrightarrow$  非特異点

しかも Crepant resolution = minimal resolution であることもわかっている.

3次元では完全に分類されているのは terminal singularity のみである.[Mo] しかしその分類により Gorenstein 商特異点はすべて terminal でない canonical singularity であることがわかる. したがって crepant resolution が存在する可能性がある.

その可能性が物理の事実から明らかになってきた. 超弦理論で Vafa の公式と呼ばれるものである:

物理的事実. [DHVW]  $M$  を複素多様体とし,  $G$  がそこに作用する群とする. 商空間  $M/G$  の canonical bundle が自明なとき  $M/G$  の crepant resolution  $\widetilde{M}/G$  が存在する. さらに  $\widetilde{M}/G$  の位相的オイラー数は次の orbifold Euler 数  $\chi(M, G)$  と一致する.

$$\chi(M, G) := \frac{1}{|G|} \sum_{gh=hg} \chi(M^g \cap M^h),$$

ただし, 和は群  $G$  中の可換な組すべてに対してとる.

この事実をもとに数学として次の予想がたてられた.[HH]

予想. 群  $G$  を  $SL(3, \mathbb{C})$  の有限部分群とする.  $X = \mathbb{C}^3/G$  とするとき,  $X$  の crepant resolution  $\tilde{X}$  が存在する. さらに  $\tilde{X}$  のオイラー数は  $G$  の共役類の数と一致する.

注意. 代数多様体の分類理論では与えられた多様体に対して極小モデルを構成し分類する. 2次元の場合は極小モデルは一意的に決まるが, 3次元以上は複数個存在することがわかっている. しかし, 上の予想が正しいとすると  $X$  の極小モデルはすべて非特異であることがわかる. また crepant resolution もひとつの  $X$  に対して複数個存在するが, オイラー数が不変量となるのは3次元以下の特殊性である.

## §2. RESOLUTION

定理 2.1. §1 の予想は正しい!

この定理の証明の基本となった特異点解消は トーリック幾何学を用いたものであった。そこでまず、toric resolution について述べる。

## 2.1 Toric resolution.

アフィントーリック多様体  $X_\sigma$  は

$$N : \text{格子}, M := \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) : \text{双対格子}$$

に対して

$$N_{\mathbb{R}} \supset \sigma : \text{cone}, \dim_{\mathbb{R}} N_{\mathbb{R}} = n$$

$$M_{\mathbb{R}} \supset \check{\sigma} : \text{dual cone} = \{\xi \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle \xi, x \rangle \leq 0, \forall x \in \sigma\}$$

から決まる有限生成環  $A_\sigma = \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$  により、 $X_\sigma := \text{Spec} A_\sigma$  で与えられる。

定義.  $\Sigma$  が扇 (fan) であるとは  $N_{\mathbb{R}}$  中の cone の集まりであって、次の 3 つの条件をみたすものをいう。

- (a)  $\Sigma$  のすべての cone は 頂点を持つ。
- (b)  $\tau$  が  $\Sigma$  の cone  $\sigma$  の面 (face) であるとき、 $\tau$  もまた  $\Sigma$  の cone である。
- (c)  $\sigma$  及び  $\sigma'$  が  $\Sigma$  中の cone であるとき、 $\sigma \cap \sigma'$  は  $\sigma$  及び  $\sigma'$  の面である。

定義. このような扇  $\Sigma$  によって定まる トーリック多様体  $X_\Sigma$  を  $\Sigma$  に付随したトーリック多様体という。

以下 トーリック多様体の特異点解消について知られていることをまとめておく。

- (1) 特異点解消  $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$  は (射影性を仮定しない場合)  $N_{\mathbb{R}}$  中の cone  $\sigma$  の単体分割で与えられる。  $n = 2, 3$  の場合、crepant resolution になる。
- (2) 上の単体分割で新たに生じる頂点は 例外因子にあたる。
- (3)  $X_\Sigma$  のオイラー数は  $\Sigma$  中にある  $n$  次元 cone の個数と一致する。

## 2.2 定理 2.1 の証明の概略.

証明はすべて群  $G$  の分類によるものであり、分類を使わないものはまだない.

(1) Abelian (対角行列のみで生成される群) '87 [M1]、'89 [R1]

トーリック幾何学を用いると、crepant resolution は 三角形の中の格子点を頂点とする三角形分割に対応している.

つまり  $g \in G$  に対して  $g^r = 1$  とすると 1 の原始  $r$  乗根  $\varepsilon$  を用いて  $g = \text{diag}(\varepsilon^a, \varepsilon^b, \varepsilon^c)$  と書ける. この元を  $\frac{1}{r}(a.b.c)$  と表すとき、集合

$$\left\{ \frac{1}{r}(a.b.c) \in G, a+b+c=r, 0 \leq a, b, c \leq r \right\}$$

を  $\Phi$  とおく.

Toric resolution を用いるため、 $N := \mathbb{Z}^3 + \sum_{v \in \Phi} \mathbb{Z}v$  とすると  $N_{\mathbb{R}}$  の中の cone は

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i e^i \in \mathbb{R}^3, x_i \geq 0, \forall i \right\}$$

と書け、 $X_{\sigma} = \text{Spec} \mathbb{C}[\sigma \cap M]$  は  $X = \mathbb{C}^3/G$  と一致する.

またこの場合、crepant resolution は

$$\Delta := \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i e^i \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \right\}$$

の単体分割として与えられる.

(2) 超曲面特異点 '92 [BM]、'93 [M2]、'93 [R2]

'92 年 Bertin、Markushevich が具体的に定義方程式を使って blow up をすることにより、特異点解消を構成した. 同様の方法で '93 年に Markushevich が位数 168 の群、続いて Roan が位数 60 の群に対して構成した. これにより  $SL(3, \mathbb{C})$  の中の単純群すべての場合が解決された.

(3) Monomial (生成元が monomial matrix のみ) '94 [I1],[I2],[I3]

'94 年 trihedral 群に対して構成した方法が monomial 群すべてに有効であることがわかった. この特異点はトーリック特異点でもなく超曲面特異点とも限らない. 特異点解消では群  $G$  の可解性を用いた.

ちなみに trihedral 群とは 対角行列と

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

で生成される群のことで [I1] にて命名された. この群  $G$  中の対角行列すべては  $G$  の正規部分群  $G'$  をなし、特異点解消は次のように構成される.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \tilde{X} \\ & & & & \downarrow \tau \\ & & & & \tilde{Y}/\mathfrak{A}_3 \\ & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & & \downarrow \tilde{\pi} \\ & \downarrow \pi & & & \\ \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3/G' = Y & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{C}^3/G = X \end{array}$$

(4) 残りの群に対して '94 [R3]

monomial 群の場合と ほぼ同様に特異点解消が構成できることがわかった.

以上により  $SL(3, \mathbb{C})$  のすべての有限部分群に対して crepant resolution が存在することがわかった.

疑問?. なぜ crepant resolution の オイラー数  $\chi(\tilde{X})$  は 群  $G$  の 共役類の数と一致するのだろうか?

### §3. “McKAY 対応”

#### 3.1 2次元の McKay 対応.

McKay 対応というのは ひとことで言うと 群  $G$  の表現と  $\mathbb{C}^2/G$  の特異点解消の間にある対応のことである. (ここで 群  $G$  は  $SL(2, \mathbb{C})$  の有限部分群)

(1) 有限群の表現

$G \subset SL(2, \mathbb{C})$  の 自明でない既約表現を  $\rho_1, \dots, \rho_k$  とする. また  $G$  の  $SU(2, \mathbb{C})$  への表現を  $\rho$  とする. このとき、

$$\rho_i \otimes \rho = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} \rho_j$$

をみたす  $\alpha_{ij}$  が存在する.

ここで  $C = [a_{ij}] = 2I_k - [\alpha_{ij}]$  とおくと  $C$  はカルタン行列と呼ばれる行列になっている。この行列は単純リー環の分類のときに出てきたもので次の法則にしたがってディンキン図形を構成することができる。

$$(1) a_{ij} = -1 \Leftrightarrow \textcircled{i} \text{---} \textcircled{j}$$

$$(2) a_{ij} = 0 \Leftrightarrow \textcircled{i} \quad \textcircled{j}$$

### (2) 特異点の解消

$\mathbb{C}^2/G$  の極小特異点解消によって出てくる例外因子の双対グラフはディンキン図形になる。またさらにカルタン行列の  $(-1)$  倍  $-C$  は例外因子 (例外曲線) の交点行列に等しい。

以上のことより 2次元の Gorenstein 商特異点の場合も crepant resolution のオイラー数が共役類の数と一致していることがわかる。

### 3.2 “McKay 対応”。

以下簡単のため、1の  $r$ 乗根を  $\varepsilon = \exp(\frac{2\pi i}{r})$  とする。

定義. 群  $G$  が  $SL(n, \mathbb{C})$  の有限部分群のとき任意の元  $g$  は  $SL(n, \mathbb{C})$  の中で対角化可能で  $g \sim \text{diag}(\varepsilon^{a_1}, \dots, \varepsilon^{a_n})$  となる。これを

$$\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$$

と書くことにする。このとき

$$\alpha = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n a_i$$

を  $g$  の age と呼ぶ。

注意.  $\text{age}(\text{id})=0$  とする。このとき  $0 \leq \text{age}(g) < n$  かつ  $\text{age}(g)$  は整数。また元  $g$  と  $h$  が群  $G$  の中で共役なら age は等しくなる。

定理 3.1. [IR]  $X = \mathbb{C}^n/G$  とする。  $X$  の任意の特異点解消  $X'$  に対して  $\text{age}(g) = 1$  の共役類と  $X'$  の中の crepant divisor は 1対1対応する。

証明は (1) トーリック幾何学を用いて巡回群の場合を示し、(2) 一般の場合には discrete valuation の分岐理論を用いて巡回群の場合に帰着させることによって示される。

この定理は群の分類によらず、任意の特異点解消に対して成り立つことがポイント!

系 3.2. Crepant resolution  $\tilde{X}$  が存在するとき、 $\text{age}(g) = 1$  の共役類と例外因子は 1 対 1 対応する。

さらに 3 次元の場合、crepant resolution  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  が存在することより次が成り立つ。

定理 3.3. (3次元 “McKay 対応”)

$$\text{age} = 0 \leftrightarrow H^0(\tilde{X}, \mathbb{Q}),$$

$$\text{age} = 1 \leftrightarrow H^2(\tilde{X}, \mathbb{Q}) \leftrightarrow \tilde{X} \text{ 中の例外因子},$$

$$\text{age} = 2 \leftrightarrow H^4(\tilde{X}, \mathbb{Q}) \leftrightarrow f^{-1}(0) \text{ 中の例外因子}.$$

#### §4. 例

例 1.

ここでは定理 3.1 の応用として得られる 2 次元の新しい McKay 対応について解説する。特に  $D_4$  型特異点の場合をしてみる。

$D_4$  型特異点を生じる有限群  $G$  は次の 2 つの行列  $A, B$  によって生成される。

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

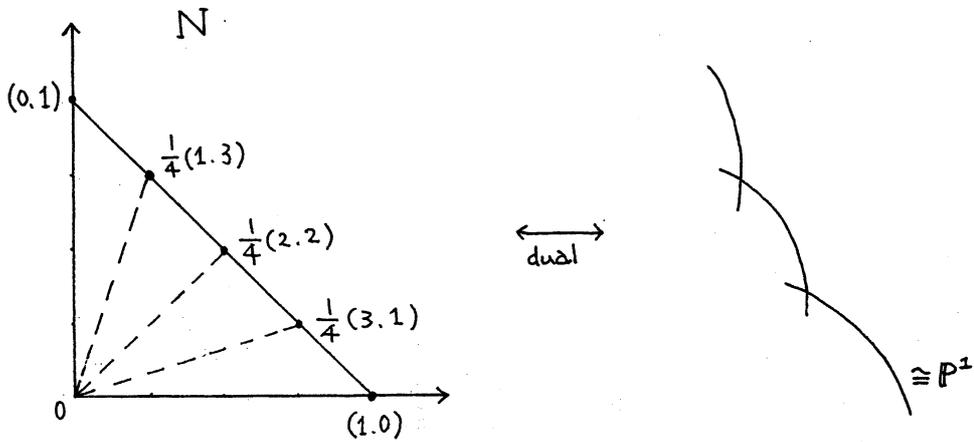
ただし、 $i = \sqrt{-1}$  とする。

(1) 群  $G$  は 3 つの巡回群を部分群として持っている：

$$\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle AB \rangle.$$

(2) (1) で得られた  $\langle g \rangle$  に対して  $\mathbb{C}^2 / \langle g \rangle$  の toric resolution を与える。

なおこの特異点解消の様子は  $\langle A \rangle$  の場合を考えれば他の場合も同様にわかる。



$$\langle A \rangle: \begin{array}{c} A \quad A^2 \quad A^3 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

$$\langle B \rangle: \begin{array}{c} B \quad B^2 \quad B^3 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

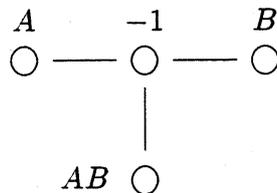
$$\langle AB \rangle: \begin{array}{c} AB \quad (AB)^2 \quad (AB)^3 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

(3) 更に群  $G$  の中で各元の間をみると、

$$A \sim A^3, B \sim B^3, AB \sim BA$$

が成り立つ。

(4) 定理 3.1 より 共役ならば同じ例外因子に対応することがわかる。したがって例外集合の様子は  $D_4$  型のディンキン図形として得られる。



例 2 (Trihedral 群).

Trihedral 群は 対角行列で生成される群  $H \subset SL(3, \mathbb{C})$  と

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される. 群  $H$  はひとつ以上の対角行列

$$A_i = \frac{1}{r_i}(a_i, b_i, c_i), \quad a_i + b_i + c_i = r_i$$

で生成されており、これは通常  $A_i = \text{diag}(\varepsilon^{a_i}, \varepsilon^{b_i}, \varepsilon^{c_i})$  と書かれ  $\varepsilon$  は 1 の原始  $r_i$  乗根である. 更に  $H \triangleleft G$ .

この群による商特異点が trihedral singularity であるが、その特異点解消については [I1,2] で構成された.

ここでは特に  $H = \langle \frac{1}{3}(0, 1, 2), \frac{1}{3}(1, 2, 0), \frac{1}{3}(2, 0, 1) \rangle$  の場合をみる. 明らかに  $G = \langle \frac{1}{3}(0, 1, 2), T \rangle$  は位数 27 の群である.

$G$  は age 2 の元としてただひとつ  $\frac{1}{3}(2, 2, 2)$  を持ち、あと 25 個の age 1 の元を持つ.  $SL(3, \mathbb{C})$  の部分群に対して非孤立特異点を与える元はすべて age が 1 の元である. したがっていまの場合、age=1 の元の集合  $\Gamma_1$  は

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(1, 1, 1), \frac{1}{3}(0, 1, 2), \frac{1}{3}(1, 2, 0), \frac{1}{3}(2, 0, 1), \\ \frac{1}{3}(0, 2, 1), \frac{1}{3}(2, 1, 0), \frac{1}{3}(1, 0, 2) \end{array} \right\} \cup HT \cup HT^2$$

$G$  の中の共役関係より

$$\frac{1}{3}(a, b, c) \sim \frac{1}{3}(b, c, a), \quad \forall a, b, c \in \{0, 1, 2\},$$

かつ

$$T \sim \frac{1}{3}(a, b, c)T, \quad \text{と} \quad T^2 \sim \frac{1}{3}(a, b, c)T^2 \quad \forall a \neq b.$$

このように crepant resolution  $\tilde{X} \rightarrow X = \mathbb{C}^3/G$  の例外因子は次の age=1 の共役類と 1 体 1 対応している:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(0, 1, 2), \frac{1}{3}(0, 2, 1), \frac{1}{3}(1, 1, 1), \\ & T, \frac{1}{3}(1, 1, 1)T, \frac{1}{3}(2, 2, 2)T, \\ & T^2, \frac{1}{3}(1, 1, 1)T^2, \frac{1}{3}(2, 2, 2)T^2. \end{aligned}$$

これらの元は  $H^2(\tilde{X}, \mathbb{Q})$  の基底と対応しているので  $h^2(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = 9$ . 一方定理 3.3 より  $H^4(\tilde{X}, \mathbb{Q})$  の基底は  $\Gamma_2 = \{ \frac{1}{3}(2, 2, 2) \}$  と対応している. この Poincaré 双対  $H_c^2(\tilde{X}, \mathbb{Q})$  は  $\Gamma_1^{(0)} = \{ \frac{1}{3}(1, 1, 1) \}$  に対応する基底を持っている. 特にオイラー数  $\chi(\tilde{X})$  は

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{X}) &= h^0(\tilde{X}, \mathbb{Q}) + h^2(\tilde{X}, \mathbb{Q}) + h^4(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = 1 + 9 + 1 = 11 \\ &= \#\{\text{conjugacy class in } G\}. \end{aligned}$$

## REFERENCES

- [BM] J. Bertin and D. Markshevich, *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Bogomolov*, Prépublication de l'Institut Fourier n.216 (1992).
- [DHVW] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa and E. Witten, *Strings on orbifolds (I)*, Nucl. Phys. **B261** (1985), 678–686.
- [HH] F. Hirzebruch and T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, Math. Ann. **286** (1990), 255–260.
- [I1] Y. Ito, *Crepant resolutions of trihedral singularities*, Proc. Japan Acad. **70** (1994), 131–136.
- [I2] ———, *Crepant resolution of trihedral singularities and the orbifold Euler characteristic*, Internat. J. Math. **6** (1995), 33–43.
- [I3] ———, *Gorenstein quotient singularities of monomial type in dimension three*, Jour. Math. Sci. Univ. Tokyo (to appear) (alg-geom/9406001).
- [IR] Y. Ito and M. Reid, *The McKay correspondence for finite subgroups of  $SL(3, \mathbb{C})$* , Higher Dimensional Complex Varieties Proc. Internat. Conference, Trento (1994) (to appear) (alg-geom/9411010).
- [M2] D. Markushevich, *Resolution of  $\mathbb{C}^3/H_{168}$* , preprint.
- [M1] D. G. Markushevich, M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Description of a class of superstring compactifications related to semi-simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 247–274.
- [Mo] S. Mori, *On 3-dimensional terminal singularities*, Nagoya Math. J. **98** (1985), 43–66.
- [R1] S. S. Roan, *On the generalization of Kummer surfaces*, J. Diff. Geometry **30** (1989), 523–537.
- [R2] ———, *On  $c_1 = 0$  resolution of quotient singularity*, preprint.
- [R3] ———, *Minimal resolutions of Gorenstein orbifolds in dimension three*, Preprint R940606–1, Acad. Sinica, Taipei, Jun 1994.