

ウェイト系の双対性とミラーシンメトリー

小林 正典 (Masanori Kobayashi)

東京工業大学理学部数学教室

0. INTRODUCTION

古典的な魔法陣 (magic square) とは、1 から n^2 までの自然数を正方形に並べ、縦・横・斜めの和がどれも等しくなるようにしたものであった。この条件を緩めて、並べる数は非負整数で重複を許し、また、斜めの和は考えないものを魔法陣と呼ぶことがある。すなわち、 n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ で、 $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり、ある非負整数 h に対し、 $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = h$ ($\forall i, j$) を満たすものをいう。 n と h を固定したときに魔法陣が何個あるか数え上げることが組み合わせ論の興味の対象の一つになっていた[4]。

例えば、 $n = 3$ として、 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は、 $h = 4 = n + 1$ の魔法陣である。一般にはイデアルの包含関係 $(h) \supset (\det A)$ が成り立つのであるが、この行列は $(h) = (\det A)$ を満たしている。

実はこの魔法陣の存在から、 \mathbb{P}^3 の 4 次超曲面どうしにミラーシンメトリーの対応があることがわかるのである。

以下、多様体などは全て \mathbb{C} 上で考える。行列 A の各行が、変数 (x, y, z) の単項式のべきを指定していると思い、 A を \mathbb{C}^3 の特異点を持つ超曲面 $\{ax^2yz + bxy^2z + cxyz^2 = 0\}$ (a, b, c は 0 でない定数) の族に対応させる。すぐ分かる通り、これらは原点で交わる 4 枚の平面である。その変形 $xyz(ax + by + cz) + d = 0$ ($d \neq 0$) を考えると (一般にはさらに xyz の項を足してもよいのだがここでは略する)、座標の定数倍により $xyz(x + y + z) + 1 = 0$ とできる。この方程式が定義する曲面は非特異で、元の特異点の Milnor ファイバーと思える。これを \mathbb{P}^3 内でコンパクト化すると、曲面 $XYZ(X + Y + Z) + W^4 = 0$ になる。この曲面の無限遠 $W = 0$ は、丁度 4 本の \mathbb{P}^1 が互いに相異なる点で横断的に交わり、6 個の交点のそれぞれに A_3 型特異点を持つ。また、これらが特異点の全てである。その極小特異点解消を取ると、Picard 数が 19 の K3 曲面になる。

一方、 \mathbb{P}^3 の一般の 4 次曲面は Picard 数が 1 の K3 曲面であるが、これと前の曲面が、(適当な代数的な複素化 Kähler 類を指定して) ミラーなのである。一般に、どのように射影空間、あるいは重み付き射影空間の反標準線形束に属する Calabi-Yau 多様体どうしのミラーを表示できるかを、以下に説明したい。なお、上の場合は Batyrev の論文[1]にも同様の例があるが、ここでは群による商をとらないので、[1] と座標の表示の仕方は異なる。

なお、全般に関する詳しい内容や引用文献については、[2] を参照して頂きたい。

1. 重み付き魔法陣と重み付き射影空間

まず、重み付き魔法陣を定義しよう。 n を正整数とし、 $\mathbf{a} = {}^t(a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \dots, b_n)$ をそれぞれ n 個の正整数の組とする。また、 $\mathbf{1}$ で成分が全て 1 であるベクトル ${}^t(1, \dots, 1)$ を表すことにする。2 つのウェイト系[3]

$W_a = (a_1, \dots, a_n; h)$, $W_b = (b_1, \dots, b_n; k)$ ($h, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を固定する。

定義. A が重み (W_a, W_b) の重み付き魔法陣 (weighted magic square) であるとは、 $Aa = h\mathbf{1}$, ${}^tAb = k\mathbf{1}$ を満たすことをいう。

例 1. i, j, h を $i < h, j < h, ij \leq h$ を満たす任意の正整数とした時、行列 $\begin{pmatrix} h-ij & j & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は重み $((1, i, h-i; h), (1, j, h-j; h))$ の重み付き魔法陣である。

次に重み付き射影空間を思い出す。 $a_0 = h - \sum_{i>0} a_i$, $b_0 = k - \sum_{i>0} b_i$ が正 (特に 1) のとき、二つの重み付き射影空間 $\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $\mathbb{P}(b_0, b_1, \dots, b_n)$ の反標準因子の間にミラーシンメトリーが成立する条件に付いて調べるのが目標である。

$a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ を $(n+1)$ 個の正整数の組とし、和を h とおく。

定義. 重み付き射影空間 $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ とは、次をいう：

$$\text{Proj } \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n] \quad (\deg X_i = a_i).$$

これは、言い換えると、 \mathbb{C}^{n+1} から原点を除いたものを \mathbb{C}^* の次のような作用で割った商空間である： $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対し、

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) \mapsto (\lambda^{a_0} X_0, \lambda^{a_1} X_1, \dots, \lambda^{a_n} X_n).$$

これは射影空間 \mathbb{P}^n の座標毎に乗法群 μ_{a_i} で割ったものに他ならない。

正整数 k に対し、定義から

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \mathbb{P}(ka_0, \dots, ka_n)$$

であるので、 $\{a_i\}$ の最大公約数は 1 であるとしてよい。また、自然な同型

$$\mathbb{P}(a_0, ka_1, \dots, ka_n) \cong \mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

が X_0^k を X_0 に置き換えることにより作れるので、 $\{a_i\}$ のうち、どの n 個も互いに素であるとさらに仮定してよい。

さて、 $\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ の 0 次有理単項式 $X_0^{m_0} X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ ($\sum_{i=0}^n a_i m_i = 0$) のベキ (m_0, m_1, \dots, m_n) の全体は自然に加法群 \mathbb{Z}^{n+1} の階数 n の部分群をなす。後ろの n 個の成分を \mathbb{Z}^n に射影すると、 \mathbb{Z}^n の中で指数 a_0 の部分群

$$M_a := \left\{ (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i m_i \equiv 0 \pmod{a_0} \right\}$$

に同型に写される。

h 次単項式 $X_0 X_1 \dots X_n$ の掛け算により、 M_a を h 次有理単項式のベキの全体と同一視しよう。すなわち、 h 次有理単項式 $X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ は M_a の点 $(\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_n - 1)$ に対応している。このとき、 $M_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の中で、 X_i^{h/a_i} に対応する $(n+1)$ 個の点で張られる n -単体を Δ_a とする。すなわち、 Δ_a は $(n+1)$ 点

$$P_0 = (-1, \dots, -1), P_1 = (-1 + h/a_1, -1, \dots, -1),$$

$$\dots, P_n = (-1, \dots, -1, -1 + h/a_n)$$

からなる集合の凸苞である。 P_i 以外の n 個の頂点で張られる facet (= 余次元 1 の face) を π_i と書く。具体的に書くと、 $\pi_0 = \{\sum_{i=1}^n a_i m_i = a_0\}$, $\pi_i = \{m_i = -1\}$ ($i \neq 0$) となる。次が成立する。

命題 1.

$$(1) P_i \in M_a \iff a_i | h.$$

- (2) $\sum_{i=0}^n a_i P_i = \mathbf{0}$. 特に、 Δ_a は原点を内点に含む有理凸多面体である。
- (3) $\text{Int } \Delta_a \cap M_a = \{\mathbf{0}\}$.
- (4) $\mathbb{P}_{(\Delta_a, M_a)} := \text{Proj } \bigoplus_{k=0}^{\infty} (k\Delta_a \cap M_a \text{ に対応する単項式の一次結合}) \cong \mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

証明. (1)(2) は明らか。 (3) は、 Δ_a の内点に入る M_a の点は、各 π_i ($i \neq 0$) から離れているので各 m_i ($1 \leq i \leq n$) は 0 以上。従って $\sum_{i=1}^n a_i m_i$ は 0 以上だが、 M_a の定義からこれは a_0 の倍数。 π_0 上にもないことから 0 でなければならない。 よって、すべての座標が 0。 (4) は重み付き射影空間の定義から明らか。 \square

例 2. $a = (1, 3, 8, 12)$, $h = 24$.

この場合は各 a_i が h を割り切るので、 Δ_a は M_a の点を頂点とする四面体 (すなわち整四面体) である。頂点は: $P_0 = (-1, -1, -1)$, $P_1 = (7, -1, -1)$, $P_2 = (-1, 2, -1)$, $P_3 = (-1, -1, 1)$.

例 3. $a = (1, 6, 8, 9)$, $h = 24$.

$X_3^{8/3}$ に対応する点が整ではないので、 $k = 1$ すなわち h 次部分が座標環を生成しないが、 $\mathcal{O}(3)$ は大域切断で生成される。 $P_0 = (-1, -1, -1)$, $P_1 = (3, -1, -1)$, $P_2 = (-1, 2, -1)$, $P_3 = (-1, -1, 5/3)$.

例 4. $a = (5, 6, 22, 33)$, $h = 66$.

$P_0(-1, -1, -1)$ は整数成分だが、 $X_0^{66/5}$ に対応するので M_a の点ではない。

2. ウェイト系の双対性

階数 n の自由 Abel 群 M の双対 $\check{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ を N で表し、係数拡大を $M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ のように表すことにする。一般に、 $M_{\mathbb{Q}}$ 内の、 0 を

内点を含む n 次元有理強凸多面体 Δ に対し、その極双対 (polar dual)

$$\Delta^* := \{y \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle x, y \rangle \geq -1 \ \forall x \in \Delta\}$$

もまた 0 を内点を含む n 次元有理強凸多面体である。 Δ の l -次元 face Γ ($0 \leq l \leq n-1$) に対し、その双対 $(n-l-1)$ -次元 face Γ^* が自然に定まる。

前節で定義した (Δ_a, M_a) の双対 $(\Delta_a^*, N_a := \check{M}_a)$ は、 π_i^* ($0 \leq i \leq n$) を頂点とし、ふたたび 0 を内点を含む n -単体であるが、さらに次の性質を満たす。

命題 2.

- (1) $\sum_{i=0}^n a_i \pi_i^* = \mathbf{0}$.
- (2) Δ_a^* の頂点 π_i^* たちは N_a に属し、 N_a を生成する。
- (3) Δ_a^* の各 facet P_i^* の頂点 $\{\pi_j^* \mid j \neq i\}$ が生成する N_a の部分群をとると、その余核は位数 a_i の巡回群に等しい。

証明. 前節の埋め込み $M_a \subset \mathbb{Z}^n$ の双対 $N_a \subset \mathbb{Z}^n$ を用いると、 Δ_a^* の頂点は

$$\pi_0^* = {}^t(-a_1/a_0, \dots, -a_n/a_0), \pi_1^* = {}^t(1, 0, \dots, 0), \dots, \pi_n^* = {}^t(0, \dots, 0, 1)$$

と表示される。(1)は直ちに従う。 N_a の定義から、(2)(3)は従う。□

逆に、(1)(2)を満たす n -単体があれば、それは (Δ_a^*, N_a) と同型である。次を注意する。

補題 1. 極双対が整ならば、整内点は $\mathbf{0}$ のみ。

一般に、 Δ_a^* は整であるが、その整内点は $\mathbf{0}$ のみとは限らないし (例えば $\mathbb{P}(1, 1, 3)$)、たとえ $\mathbf{0}$ のみでも、極双対 $\Delta_a^{**} = \Delta_a$ は整であるとは限らない (例えば $\mathbb{P}(1, 6, 8, 9)$)。

定義[1]. $M_{\mathbb{Q}}$ 内の $\mathbf{0}$ を内点とする n 次元強凸整多面体 Δ は、 Δ^* が整であるとき、反射的 (reflexive) である、という。

無論、 Δ が反射的なら、 Δ^* もそうである。

さて、 $\mathbb{P}_{(\Delta, M)}$ の反標準完備束の元の族に対しては、特に、 Δ が反射的のときに、極双対をとることがミラーシンメトリーに対応するであろうというのが Batyrev の処方箋である[1]。

二つの重み付き射影空間の反標準束の元の間には、その定義方程式から定まる反射的 Newton polytope の間に極双対の関係があるとき、Batyrev のミラーシンメトリーの構成に帰着できることが示せる[2]。

Δ を重み付き射影空間 $\mathbb{P}(a)$ の反標準超曲面の定義方程式の Newton polytope とする。 Δ^* が $\mathbb{P}(b)$ の反標準超曲面の Newton polytope であるとき、 Δ_a と Δ_b の間にはどのような関係があるだろうか。

条件を書き直すと：同型 $\sigma : N_b \rightarrow M_a$ が存在して、 $\sigma_{\mathbb{Q}}$ によって多面体の入っている空間を同一視すると、 $\Delta_b^* \subset \Delta \subset \Delta_a$ を満たす。このとき、 ${}^t\sigma_{\mathbb{Q}}$ により、 $\Delta_a^* \subset \Delta^* \subset \Delta_b$ は自動的に満たされる。

さらに、 Δ_a^* , Δ_b^* の整内点は $\mathbf{0}$ のみでなければならない。また、 Δ_a の任意の facet の上に Δ_b^* の頂点が存在することが、 Δ_a^* が整であることからわかる。

ここで以下、特異点の Milnor fiber の埋め込みからくる場合について考える。コンパクト化に用いる変数を X_0 としたとき、 $a_0 = 1$ である。もとの特異点は π_0 上の facet を Newton polytope とする十分一般の多項式で表される。ここで、 Δ_b^* の一つの facet は π_0 にあると仮定する。また、対応する条件を Δ_a^* についても仮定する。条件をまとめると、 Δ_b の頂点を Q_i , facet を ρ_i で書くことにして、

- (1) $a_0 = b_0 = 1$,
- (2) $\sigma(Q_0^*) \subset \pi_0, \sigma(\rho_0^*) = P_0$,
- (3) $\sum_{i=0}^n b_i \rho_i^* = 0$,
- (4) $\{\rho_i^* (i \neq 0)\}$ は $M_a = \mathbb{Z}^n$ を生成する。

$\sigma(\rho_i^*)$ として、facet π_0 内の n 個の頂点集合で M_a を生成し、 P_0 との錐が $\mathbf{0}$ を含むものを取ればよい。

Δ_b^* の頂点 ρ_i^* の σ による像を (b_{i1}, \dots, b_{in}) とすると、 π_0 内にあることから $(b_{ij})\mathbf{a} = a_0\mathbf{1}$ が成り立つ。 $c_{ij} := b_{ij} + 1$ とおくと、 $C\mathbf{a} = h\mathbf{1}$ が成り立つ。関係を逆に見ることにより、 ${}^t C\mathbf{b} = h\mathbf{1}$ も成り立つ。また、 $\det B = \pm 1$ は $\det C = \pm h$ と同値である。すなわち、 ${}^t B$ は σ の表現行列であり、 $C = B + (1)$ が $h = n + 1$ で重み (W_a, W_b) の重み付き魔法陣になっている。

なお、超曲面孤立特異点からくるウェイト系の双対性に付いては、[3] で算術的な双対性が示されている。本稿のものは実験的には一致するので、同じものであるとの期待がある。

以下に例をいくつか挙げよう。〈単項式〉で単項式に対応する点の凸苞を表すことにする。

例 5. $W_a = W_b = (1, 1, 1; 4)$ のときが最初に述べた \mathbb{P}^3 の 4 次曲面の場合に相当する。この場合、 Δ_b 自身が反射的多面体であり、 Δ_b^* を四面体 $\langle X_0^4, X_1^2 X_1 X_3, X_1 X_2^2 X_3, X_1 X_2 X_3^2 \rangle$ として埋め込むことができる。 B は単位行列であるから、 $M_a = \mathbb{Z}^3 = N_b$ として計算できる。

例 6. \mathbb{P}^3 の 4 次曲面で、 $\Delta^* \cong \Delta$ となる反射的多面体の例を作ってみよう。このとき、対応する二つの複素 Kähler 類付き K 3 曲面は「自己ミラー」になるはずである。 $\Delta = \langle X_0^4, X_1^2 X_2^2, X_2^2 X_3^2, X_3^2 X_1^2 \rangle$ とすると、上の σ により、 $\Delta^* \cong \Delta$ であるが、極小モデルの K 3 曲面の Picard 数は 13 である。 $h^{1,1} = 20$

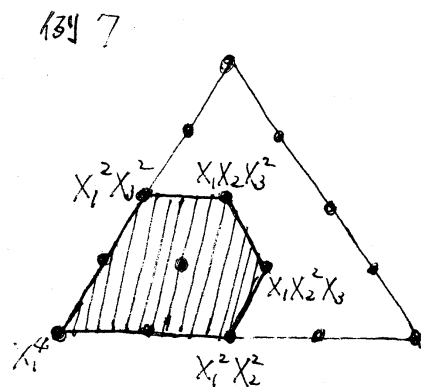
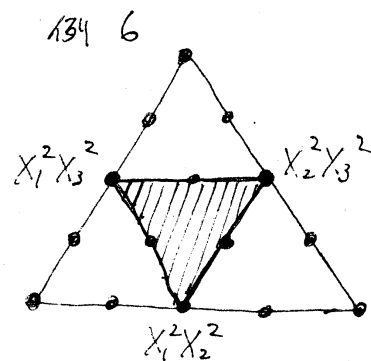
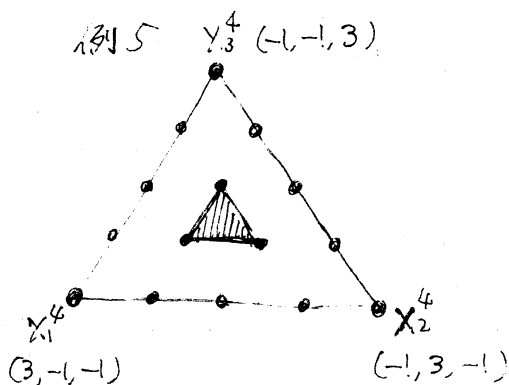
であるからおかしく感じるかもしれないが、実は、代数的輪体のなす Abel 群の中に、埋め込んだ空間の超平面切断から来ないものが階数 6 だけあり、 $20 = 7 + 6 + 7$ の 7 の部分が入れ代わっているのである。これについての詳細は[2]。

例 7. では、Picard 数 10 の例を挙げて見よう。

$$\Delta = \langle X_0^4, X_1^4, X_1^2 X_2^2, X_1^2 X_3^2, X_1 X_2^2 X_3, X_1 X_2 X_3^2 \rangle$$

とすると、 Δ は反射的で、 $\Delta^* \cong \Delta$ を満たし、 Δ を Newton 多面体とする一般の曲面の極小モデルは、Picard 数 10 の K 3 曲面になる。

Δ の図 : $X_0^4(-1,-1,-1)$ と斜線部の凸包、
(76上)



3. ARNOLD の奇妙な双対性

Arnold によると、ユニモーダルな超曲面特異点は、すべて曲面の特異点と安定同値であって、3 個の単純楕円型特異点、無限系列の尖点特異点、例外型と呼ばれる 14 個の特異点がある。最後のものが、10 組のペアを作るように見えるのが Arnold の奇妙な双対性と呼ばれる現象である。

その変形パラメータをうまく取ると \mathbb{C}^* -作用を持つものが各類に一つずつ存在することを用いて、Milnor ファイバーを重射影空間に埋め込み、極小モデルを取ると、K3 曲面の 2 次ホモロジー格子の代数的輪体と超越的輪体の一部が入れ代わっているように見えるというのが、Pinkham と Dolgachev-Nikulin による解釈であった。

この \mathbb{C}^* 作用の重みを (a_1, a_2, a_3) 、定義方程式の重みを h としよう。ただし、 a_i は正整数で、 $\gcd\{a_i\} = 1$ であるとする。このとき、次が成り立つ。

定理 1[2]. (a_1, a_2, a_3) , h を上の通りとすると、 $(a_1, a_2, a_3; h)$ を一方の重みとする重み付き魔法陣が、行と列の入れ替えを除いて一意的に定まり、他方の重みは、Arnold の奇妙な双対の特異点の重みに一致する。

定理 2[2]. 各例外型特異点に対して、ある反射的な Newton 多面体 Δ が存在して、奇妙な双対に対応するものは極双対になるように取れる。

例 8. $W_a = (6, 8, 9; 24)$, $W_b = (3, 8, 12; 24)$ とする。 $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ は重み (W_a, W_b) の重み付き魔法陣である。 Δ_b は反射的多面体であるから、 $\mathbb{P}(1, 6, 8, 9)$ の中で、 $\sigma(\Delta_b^*)$ すなわち $\Delta = \langle X_0^{24}, X_1^4, X_2^3, X_1 X_3^2 \rangle$ を Newton 多面体とする一般の曲面の極小モデルと、 $\mathbb{P}(1, 3, 8, 12)$ の一般の 24 次曲面の極小モデルとの間に、埋め込んだ空間から来る一般の複素化 Kähler 類を指定してミラーシンメトリーの関係がある。ただし、このままでは、前節の

例と同様、外から来ない代数的輪体があるので、 Δ の頂点として、 $X_0^6 X_3^2$ を付け加えると、 $12 + 0 + 8$ の 12 と 8 が入れ代わり、奇妙な双対性が実現される。

REFERENCES

1. Batyrev, V.V.: Dual polyhedra and the mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. *J. Alg. Geom.* **3**, 493–535(1994)
2. Kobayashi, M.: Duality of weights, mirror symmetry and Arnold's strange duality, alg-geom/9502004 (1995)
3. Saito, K.: On a duality of characteristic polynomials for regular system of weights. RIMS preprint (1994)
4. Stanley, R.P.: *Combinatorics and Commutative algebra* (Progress in Math. vol. 41) Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1983

152 東京都目黒区大岡山 2-12-1

E-mail address: masanori@math.titech.ac.jp