数理解析研究所講究録
934巻 1996年 57-67

非特異点のガロア被覆となる特異点について

東北学院大学教養学部　土橋宏康 (Hiroyasu Tsuchihashi)

Y を $\mathbf{C}^n$ の原点の開近傍とし、$\pi: X \to Y$ を Y の有限ガロア被覆とする。即ち、π は正規解析空間 X から Y への固有有限正則写像であり、$Aut(\pi) := \{g \in Aut(X) | \pi \circ g = \pi\}$ が π の各束 $\pi^{-1}(y)$ に推移的に作用する。さらに、$\pi^{-1}(0)$ は一点 x_0 だけからなると仮定する。π の分岐点集合 $\{y \in Y | \#\pi^{-1}(y) < \deg \pi\}$ の既約成分を $B_1, B_2, \ldots, B_s$ とし、π の B_j に沿っての分岐次数を r_j とする。即ち、 $r_j = \deg \pi / \max\{\#\pi^{-1}(y) | y \in B_j\}$。$B_\pi := r_1 B_1 + r_2 B_2 + \cdots + r_s B_s$ とする。次のような問題を考える。

問題 1 (X, x_0) はいかなる特異点か。B_π および $Gal(X/Y) := Aut(\pi)$ から (X, x_0) の性質 (Gorenstein か等) がどれだけわかるか。

問題 2 Y の正因子 D が与えられたとき、

$$\begin{aligned} GC(Y, D) &:= \{B_\pi = D \text{ となる有限ガロア被覆 } \pi: X \to Y\}/\sim, \\ AC(Y, D) &:= \{B_\pi = D \text{ となる有限アーベル被覆 } \pi: X \to Y\}/\sim \end{aligned}$$

を決定せよ。ここで、$(\pi: X \to Y) \sim (\pi': X' \to Y)$ とは $\pi = \pi' \circ \phi$ を満たす同型写像$\phi: X \simeq X'$ が存在することである。

1 節から 3 節で問題 1 および 2 について現在までに判ったことを解説する。問題 2 の $AC(Y, D)$ については完全に判るが、$GC(Y, D)$ について具体的に判るのは、今のところ、D が超平面配置のような簡単な場合 (例 4 と例 5) と 4 節で構成する (X, x_0) がトーリック特異点となるような特別な場合だけである。

1　問題 1 について

命題 1 (X, x_0) は $\mathbf{Q}$-Gorenstein である。即ち、$X \setminus Sing(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 r 重 n 形式が存在する (r は $r_1, r_2, \ldots, r_s$ の最小公倍数)。また (X, x_0) が quai-Gorenstein であるための必要十分条件は $(r_1 - 1)\pi^{-1}(B_1)_{red} + (r_2 - 1)\pi^{-1}(B_2)_{red} + \cdots + (r_s - 1)\pi^{-1}(B_s)_{red}$ が $X \setminus Sing(X)$ 上主因子となることである。

証明 $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ を $\mathbf{C}^n$ の座標系とし、

$$\phi = \frac{(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n)^r}{f_1^{\frac{r}{r_1}(r_1-1)} f_2^{\frac{r}{r_2}(r_2-1)} \cdots f_s^{\frac{r}{r_s}(r_s-1)}}$$

とすれば $\pi^*\phi$ は $X \backslash \pi^{-1}(Sing(B_\pi))$ 上いたるところ 0 にならない正則 r 重 n 形式である。ただし、f_i は B_i の定義式である。$\pi^{-1}(Sing(B_\pi))$ は余次元が 2 以上なので $\pi^*\phi$ は $X \backslash Sing(X)$ に自然に延長できる。次に、ψ を $X \backslash Sing(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 n 形式 とすると $\frac{\pi^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n)}{\psi}$ は $X \backslash Sing(X)$ 上の正則関数であり、その零因子は $(r_1-1)\pi^{-1}(B_1)_{red} + (r_2-1)\pi^{-1}(B_2)_{red} + \cdots + (r_s-1)\pi^{-1}(B_s)_{red}$ に等しい。逆に、 f がそのような正則関数ならば、$\frac{\pi^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n)}{f}$ は $X \setminus Sing(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 n 形式である。 ■

この命題により、(X, x_0) は小平次元が $1, \ldots, n-2$ の代数多様体上の錐にはならないことがわかる。また (X, x_0) は次の 3 つの型に分けることができる。$\mu : (\widetilde{X}, E) \to (X, x_0)$ を (X, x_0) の特異点解消とし、ψ を $X \setminus Sing(X)$ 上いたるところ 0 にならない正則 r 重 n 形式とする。

I. $\mu^*\psi$ の E の各既約成分に沿っての 0 の位数が$-r$ より大きい。このとき、すべての正整数 m に対して $\delta_m(X, x_0) = 0$。

II. $\mu^*\psi$ の E の各既約成分に沿っての 0 の位数が$-r$ 以上であり、少なくとも一つの既約成分に沿ってのそれは$-r$ に等しい。このとき、すべての正整数 m に対して $\delta_m(X, x_0) = 0$ または 1 であり、ある正整数 ℓ があって $\delta_{m\ell}(X, x_0) = 1$。

III. E のある既約成分に沿っての $\mu^*\psi$ の 0 の位数が$-r$ より小さい。このとき、$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\delta_m(X, x_0)}{m^{n-1}} > 0$。

$n = 2$ のとき I 型の特異点は商特異点であり [3]、II 型の特異点の例としては単純楕円型特異点、カスプ特異点およびこれらの有限群による商がある。

Y 上の正則関数 $f = \sum_{v \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}} c_v z^v$ に対して $Supp(f) = \{v \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0} | c_v \neq 0\}$ とする。ただし、$z^{{}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_n^{a_n}$ である。また、$\Gamma_+(f)$ を $\bigcup_{v \in Supp(f)} (v + \mathbf{R}^n_{\geq 0})$ の凸包とする。

定義

$$\Gamma_+(B_\pi) = (1 - \frac{1}{r_1})\Gamma_+(f_1) + (1 - \frac{1}{r_2})\Gamma_+(f_2) + \cdots + (1 - \frac{1}{r_s})\Gamma_+(f_s)$$

とする。ただし、f_i は B_i の定義式である。

Δ を $\Gamma_+(B_\pi)$ の面としたとき$\Delta = \Delta(u) := \{v \in \Gamma_+(B_\pi) | \langle v, u\rangle = \min\{\langle w, u\rangle | w \in \Gamma_+(B_\pi)\}\}$ となる点 u がある。$\Delta_j = \{v \in \Gamma_+(f_j) | \langle v, u\rangle = \min\{\langle w, u\rangle | w \in \Gamma_+(f_j)\}\}$ とすれば $\Delta = (1 - \frac{1}{r_1})\Delta_1 + (1 - \frac{1}{r_2})\Delta_2 + \cdots + (1 - \frac{1}{r_s})\Delta_s$ である。

定理 2 (1) (X,x_0) が I 型特異点ならば、${}^t(1,1,\ldots,1)\in Int(\Gamma_+(B_\pi))$。

(2) (X,x_0) が II 型特異点ならば、${}^t(1,1,\ldots,1)\in \Gamma_+(B_\pi)$。

$f_1, f_2,\ldots,f_s$ が以下の条件を満たせば逆も成り立つ。

(*) $\Gamma_+(B_\pi)$ の自分自身を除く各面 Δ に対して $f_{1\Delta}f_{2\Delta}\cdots f_{s\Delta}=0$ が $(\mathbf{C}^\times)^n$ で正規交差となる。ただし、$f_j=\sum_{v\in\mathbf{Z}^n_{\geq 0}}c_vz^v$ ならば $f_{j\Delta}=\sum_{v\in\mathbf{Z}^n_{\geq 0}\cap\Delta_j}c_vz^v$。

証明 $\Gamma_+(B_\pi)$ の双対 Newton 図形を$\Gamma^*(B_\pi)$ とする。即ち、$\Gamma^*(B_\pi)=\{\Delta^*|\Delta$は$\Gamma_+(B_\pi)$の面$\}$。ただし、$\Delta^*=\{u\in\mathbf{R}^n_{\geq 0}|\Delta(u)\supset\Delta\}$。扇の細分 $(\mathbf{Z}^n,\Gamma^*(B_\pi))\to(\mathbf{Z}^n,\{faces\ of\ \mathbf{R}^n_{\geq 0}\})$ から導かれるトーリック多様体の間の正則写像を

$$\lambda: T_{\mathbf{Z}^n}\mathrm{emb}(\Gamma^*(B_\pi))\to T_{\mathbf{Z}^n}\mathrm{emb}(\{faces\ of\ \mathbf{R}^n_{\geq 0}\})=\mathbf{C}^n$$

とし、$\widetilde{Y}=\lambda^{-1}(Y)$ とする。$\Gamma^*(B_\pi)$ の一次元錐 $\mu=\mathbf{R}_{\geq 0}u$ (u は原始元) に対して $E_\mu=\overline{orb(\mu)}$ とする。このとき、$\lambda^*\left(\frac{dz_1}{z_1}\wedge\frac{dz_2}{z_2}\wedge\cdots\wedge\frac{dz_n}{z_n}\right)$ の E_μ に沿っての 0 の位数が -1 であることから、命題 1 の証明の中の ϕ のλ による引き戻し $\lambda^*\phi$ の E_μ に沿っての 0 の位数 α_μ は

$$r\left(-1+\langle {}^t(1,1,\ldots,1),u\rangle-\sum_{j=1}^{s}(1-\frac{1}{r_j})d_u(f_j)\right)$$

に等しい。ただし、u は μ を張る $\mathbf{Z}^n$ の原始元であり、$d_u(f_j)=\min\{\langle v,u\rangle|v\in Supp(f_j)\}$ である。従って、$\Gamma^*(B_\pi)$ のすべての一次元錐 μ について$\alpha_\mu\geq -r(\alpha_\mu>-r)$ となる必要十分条件は、${}^t(1,1,\ldots,1)\in\Gamma_+(B_\pi)$ ($Int(\Gamma_+(B_\pi)$) となることである。

一方、$\widetilde{X}$ を $X\times_Y\widetilde{Y}$ の正規化とし、$\tilde{\pi}:\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$, $\theta:\widetilde{X}\to X$ を射影とする。$\Gamma^*(B_\pi)$ の各 1 次元錐 μ について F_μ を $\tilde{\pi}(F_\mu)=E_\mu$ となる $\widetilde{X}$ の既約因子の一つとすると$\theta^*\pi^*\phi=\tilde{\pi}^*\lambda^*\phi$ の F_μ に沿っての 0 の位数 $(\alpha_\mu+r)r_\mu-r$ が $-r$ 未満 ($-r$ に等しい、$-r$ より大きい) となるための必要十分条件はα_μ がそうなることである。ただし、r_μ は $\tilde{\pi}$ の E_μ に沿っての分岐次数である。

次に、$\Gamma^*(B_\pi)$ の非特異錐からなる細分の一つ Σ を選び、写像 λ の定義において$\Gamma^*(B_\pi)$ を Σ で置き換えると $\widetilde{Y}$ は非特異であり、さらに (*) が満たされているとき$\lambda^{-1}(B_\pi)$ は $\lambda^{-1}(0)$ の近くで正規交差となる。このとき、$\widetilde{X}$ は必ずしも非特異ではないが商特異点しか持たない。また、$\varpi:\overline{X}\to\widetilde{X}$ を $\widetilde{X}$ の特異点解消とするとき、$\lambda^{-1}(0)$ の各既約成分に沿っての$\lambda^*\phi$ の 0 の位数が $-r$ 以上 (より大きい) ならば $(\theta\circ\varpi)^{-1}(x_0)$ の各既約成分に沿っての $(\lambda\circ\tilde{\pi}\circ\varpi)^*\phi$ のそれも同様であることが容易にわかる。 ■

例 1 $s\leq n, f_j=z_j$ のとき${}^t(1,1,\ldots,1)\in Int(\Gamma_+(B_\pi))$ である。実際、このとき (X,x_0) は商特異点である。

例 2 $s = n+1, f_j = z_j (1 \le j \le n)$, $f_{n+1} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ のとき $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{n+1}} > 1$ ($=1$) ならば ${}^t(1,1,\ldots,1) \in Int(\Gamma_+(B_\pi))$ ($\in \partial\Gamma_+(B_\pi)$) である。

例 3 f が $(2,2,\ldots,2) \notin \Gamma_+(f)$ を満たす正則関数で $B_\pi = 2\{z_1^2 z_2^2 \cdots z_n^2 + f = 0\}$ のとき ${}^t(1,1,\ldots,1) \in \partial\Gamma_+(B_\pi)$ である。実際に、このような分岐点集合を持つ Y のガロア被覆 X で (X, x_0) がカスプ特異点となるものが 2,3,4,5 の各次元に存在する (詳しくは [2] 参照)。

2 問題 2 について

Y は単連結であると仮定し、$D = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \cdots + r_s D_s$ を Y 上の因子とする。ただし、$r_1, r_2, \ldots, r_s$ は 2 以上の整数であり, $D_1, D_2, \ldots, D_s$ は既約と仮定する。また、f_j を D_j の定義式とする。このとき、

$$\{(w_1, w_2, \ldots, w_s, y) \in \mathbf{C}^s \times Y \mid w_1^{r_1} - f_1(y) = \cdots = w_s^{r_s} - f_s(y) = 0\}$$

の正規化 $\widetilde{Y}$ は Y のアーベル被覆であり、$Gal(\widetilde{Y}/Y) \simeq \mathbf{Z}_{r_1} \oplus \mathbf{Z}_{r_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{r_s}$ である。$AC(Y, D)$ については次の定理から完全にわかる。

定理 3 $\pi : X \to Y$ が $B_\pi = D$ を満たすアーベル被覆ならば $Gal(\widetilde{Y}/Y)$ のある部分群 H により、$(X \to Y) \sim (\widetilde{Y}/H \to Y)$ となる。

証明 $Gal(X/Y)$, $Gal(\widetilde{Y}/Y)$ は $\pi_1(Y \setminus D)$ の商群とみなせる。D_j の回りを正方向に一回転する $\pi_1(Y \setminus D)$ の元の一つを σ_j とし ($\int_{\sigma_j} \frac{df_i}{f_i} = \delta_{ij} 2\pi\sqrt{-1}$)、商写像 $\pi_1(Y \setminus D) \to Gal(\widetilde{Y}/Y)$ による σ_j の像を $\tilde{\sigma}_j$ とする。このとき、$\tilde{\sigma}_j^{r_j}$ は単位元であり、$Gal(\widetilde{Y}/Y)$ は$\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_s$ で生成される。
次に、$X \times_Y \widetilde{Y}$ の既約成分の一つの正規化を $\widetilde{X}$ とする。このとき、$Gal(\widetilde{X}/Y)$ は $Gal(X/Y) \bigoplus Gal(\widetilde{Y}/Y)$ の部分群だからアーベル群である。また商写像 $\pi_1(Y \setminus D) \to Gal(\widetilde{X}/Y)$ による $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ の像$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_s$ で生成される $Gal(\widetilde{X}/Y)$ の部分群を F とする。このときガロア被覆 $\widetilde{X}/F \to Y$ は $Y \setminus Sing(D)$ で分岐しない。ところが、Y は非特異だからこの写像は同形写像でなければならない。即ち、$F = Gal(\widetilde{X}/Y)$。一方、$\widetilde{X} \to Y$ の D_j に沿っての分岐次数は r_j であるから $\bar{\sigma}_j^{r_j}$ は単位元である。従って、商写像 $Gal(\widetilde{X}/Y) \to Gal(\widetilde{Y}/Y)$ は同型写像になるから、$\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ も同形写像である。また同型写像 $Gal(\widetilde{X}/Y) \to Gal(\widetilde{Y}/Y)$ による $Gal(\widetilde{X}/X)$ の像を H とすれば$\widetilde{Y}/H \simeq X$ である。 ■

この定理により、$AC(Y, D)$ は $\mathbf{Z}_{r_1} \oplus \mathbf{Z}_{r_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{r_s}$ の部分群 H で条件

$$(0,\ldots,0,a_j,0,\ldots,0)\in H\Rightarrow a_j=0$$

を満たすものの集合と一対一に対応することがわかる。従って、Y 上の任意の正因子 D に対して $\#AC(Y,D)<\infty$ である。

次に、$GC(Y,D)$ について考える。$Y_0=Y\setminus Sing(D)$, $\tilde{Y}_0=\mu^{-1}(Y_0)$ とする。ただし、$\mu:\tilde{Y}\to Y$ は自然な射影である。また、$\lambda:\widetilde{W}\to\tilde{Y}_0$ を普遍被覆とする。

定理 4 $\mu\circ\lambda:\widetilde{W}\to Y_0$ はガロア被覆である。また、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)\to Gal(\tilde{Y}_0/Y_0)$ の核は $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の交換子群である。

証明 $Gal(\tilde{Y}/Y)$ の任意の元 g に対して $g\circ\lambda$ も $\tilde{Y}_0$ の普遍被覆であるから $\lambda\circ\tilde{g}=g\circ\lambda$ を満たす $\widetilde{W}$ の自己同型 $\tilde{g}$ が存在する。従って、これらの元 $\tilde{g}$ $(g\in Gal(\tilde{Y}/Y))$ と$\pi_1(\tilde{Y}_0)$ とで生成される $Aut(\widetilde{W})$ の部分群は $\mu\circ\lambda$ の束 $(\mu\circ\lambda)^{-1}(y)$ $(y\in Y_0)$ に推移的に作用する。

次に、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の交換子群を H とする。$Gal(\tilde{Y}_0/Y_0)$ はアーベル群であるから上への準同型写像 $Gal(\widetilde{W}/Y_0)/H\to Gal(\tilde{Y}_0/Y_0)$ が存在する。仮にこの写像が同型写像でなければ、H を含み $Gal(\widetilde{W}/Y_0)\to Gal(\tilde{Y}_0/Y_0)$ の核に真に含まれる $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の指数有限な部分群 H' が存在する。このとき、$\widetilde{W}/H'$ は D_j に沿っての分岐次数が r_j である Y_0 の有限アーベル被覆であって、しかもその次数が $\deg(\mu)$ より大きい。ところが、定理 3 の証明で Y を Y_0 で置き換えれば、$B_{\pi'}=D\setminus Sing(D)=Y_0\cap D$ を満たす Y_0 の任意の有限アーベル被覆 π' の次数は $\deg(\mu)$ 以下であることがわかる。矛盾。 ■

定理 5 $B_\pi=D$ を満たす任意のガロア被覆$\pi:X\to Y$ に対して $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の正規部分群 H と双正則写像 $\tau:\widetilde{W}/H\simeq X_0:=\pi^{-1}(Y_0)$ で $\pi\circ\tau$ が $\mu\circ\lambda$ から導かれる自然な写像 $\widetilde{W}/H\to Y_0$ に一致するものが存在する。

証明 W' を $\widetilde{W}\times_{Y_0}X_0$ の既約成分の一つとする。このとき、W' の正規化と射影 $W'\to\widetilde{W}$ の合成写像は不分岐被覆となる。ところが、$\widetilde{W}$ は単連結であるから $W'\to\widetilde{W}$ は同型写像である。次に、$G=\{g\in Gal(\widetilde{W}/Y_0)\oplus Gal(X_0/Y_0)|gW'=W'\}$ とし、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)\oplus Gal(X_0/Y_0)$ の第一、第二成分への射影の G への制限をそれぞれ p_1,p_2 とする。このとき、p_1 は同形写像であり、p_2 は上への写像である。また、$H=p_1^{-1}(\ker(p_2))$ とすれば、合成写像 $\widetilde{W}\simeq W'\to X_0$ から導かれる写像 $\widetilde{W}/H\to X_0$ は同型写像である。 ■

上の定理において $B_{[\widetilde{W}\to Y_0]}=B_{[\widetilde{W}/H\to Y_0]}$ であるから $\widetilde{W}\to\widetilde{W}/H$ は不分岐被覆である。従って、$GC(Y,D)$ は $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の指数有限な正規部分群であって$\widetilde{W}$ に固定点を持たないものの集合の部分集合とみなせる。

例 4 D を例 1 の B_π としたとき、$\tilde{Y}_0$ は単連結であるから $GC(Y,D) = AC(Y,D)$ は有限集合である。

例 5 D を例 2 の B_π としたとき、$\tilde{Y}$ は $w_1^{r_1}+\cdots+w_n^{r_n}=w_{n+1}^{r_{n+1}}$ で定義される $\mathbf{C}^{n+1}$ の超曲面に同型である。$n=2$ のときは、$Y_0 = Y\setminus\{0\}$ としてよいので、$\tilde{Y}$ が比較的簡単な特異点の場合、$\pi_1(\tilde{Y}_0)$ 及び $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ が計算できる。特に、${}^t(1,1)\in Int(\Gamma_+(D))$ ならば、定理 2 と [3] により、$GC(Y,D)$ に属す特異点 (X,x_0) は商特異点であるから、$\pi_1(\tilde{Y}_0)$ は有限群になる。

(I) $(r_1,r_2,r_3)=(2,2,\ell)$ のとき、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ は

$$A=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho^{-1}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2,\mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、ρ は 1 の原始 2ℓ 乗根である。このとき、G の交換子群は $<A^2>$ であり、$\tilde{Y}\simeq \mathbf{C}^2/<A^2>$ は A_ℓ 型の有理二重点である。G の固有正規部分群 H で $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ に固定点を持たず、G/H がアーベル群となる (即ち、商写像 $\mathbf{C}^2/H\to\mathbf{C}^2/G\simeq\mathbf{C}^2$ が $AC(\mathbf{C}^2,D)$ に属す) ものは ℓ が奇数のときは $<A^2>$ と (i) $H=<A>$ だけであり、ℓ が偶数のときは、この他には次の 4 個がある。(ii) $H=<A^2, A^{\frac{\ell}{2}}B^{\frac{\ell}{2}}C>$, (iii) $H=<A^2, A^{\frac{\ell}{2}+1}B^{\frac{\ell}{2}}C>$, (iv) $H=<A^{\frac{\ell}{2}-1}B^{\frac{\ell}{2}}>$, (v) $H=<A, A^{\frac{\ell}{2}}B^{\frac{\ell}{2}}C>$。$\mathbf{C}^2/H$ は H がそれぞれ (i), (ii), (iii), (v) のとき、$A_{2\ell}$, $D_{\frac{\ell}{2}}$, $D_{\frac{\ell}{2}}$, D_ℓ 型の有理二重点である。H が (iv) のときは $\ell\geq 4$ ならば有理二重点ではない巡回商特異点である。G/H がアーベル群でない G の正規部分群 H はすべて $<A,B>$ の部分群であって、条件

$$A^aB^b\in H \Rightarrow A^{-a}B^b\in H$$

を満たす。さらに H は $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ に固定点を持たないとき、巡回群になる。

(II) $(r_1,r_2,r_3)=(2,3,3)$ のとき、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ は

$$A=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}\rho^{10} & \rho^4\\ 0 & \rho^2\end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2,\mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、ρ は 1 の原始 12 乗根である。このとき、G の交換子群は $F=<B^2C, BC^2>$ であり、$\tilde{Y}\simeq\mathbf{C}^2/F$ は D_2 型の有理二重点である。これ以外の G の正規部分群で $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ に固定点を持たないものは $<A>$, $<A^2>$, $<A^3>$, $<A^4>$, $<A^6>$, $<B,C>$, $<A^2, B^2C, BC^2>$ だけである。$\mathbf{C}^2/<B,C>$ は E_6 型の有理二重点である。

(III) $(r_1,r_2,r_3)=(2,3,4)$ のとき、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ は

$$A=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\rho^3 & 0\\ 0 & \rho^{-3}\end{pmatrix}, C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \rho^6\\ \rho^6 & 1\end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2,\mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、ρ は 1 の原始 24 乗根である。このとき、G の交換子群は $F=<B^2,C^2,BC>$ であり、$\widetilde{Y}\simeq\mathbf{C}^2/F$ は E_6 型の有理二重点である。これ以外の G の正規部分群で $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ に固定点を持たないものは$<A>$, $<A^2>$, $<A^3>$, $<A^4>$, $<A^6>$, $<A^8>$, $<A^{12}>$, $<B,C>$, $<B^2,C^2>$, $<A^4,B^2,C^2>$ だけである。$\mathbf{C}^2/<B,C>$, $\mathbf{C}^2/<B^2,C^2>$ はそれぞれ E_7, D_2 型の有理二重点である。

例 6 $n=2$, $D=\ell\{z_1=0\}+2\{z_2^2-4z_1^a=0\}$ (a は正整数) としたとき、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ は

$$A=\begin{pmatrix}\rho^a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho^{-1}\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

で生成される $GL(2,\mathbf{C})$ の部分群 G に同型である。ただし、ρ は 1 の原始 $a\ell$ 乗根である。このとき、G の交換子群は a が奇数 (偶数) ならば $<B>$ $(<B^2>)$ である。H を G の正規部分群で $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$ に固定点を持たないものとする。$H\subset<A,B>$ ならば、H は巡回群である。ℓ が奇数のときは、$H\subset<A,B>$ である。ℓ が偶数で $H\not\subset<A,B>$ のときは、a が奇数 (偶数) ならば $H=<B,A^{\frac{\ell}{2}}C>$ $(H=<B^2,A^{\frac{\ell}{2}}C>$, $<B^2,A^{\frac{\ell}{2}}BC>$ または $<B,A^{\frac{\ell}{2}}C>)$ である。このとき、$\mathbf{C}^2/H$ は $D_{\frac{a\ell}{2}}$ 型または $D_{\frac{a\ell}{4}}$ 型の有理二重点である。

例 7 $D=2\{z_1^2z_2^2-4(z_1^3+z_2^7)=0\}$ としたとき、$B_{\pi_j}=D$ となるガロア被覆 $\pi_j:X_j\to Y$ で X_j が自己交点数 -3 の有理曲線 j 個の輪を一点につぶして得られるカスプ特異点となるものがある (詳しくは [2] 参照)。従って、このとき $GC(Y,D)$ は無限集合であり、$\widetilde{W}\to\widetilde{Y}_0$ は無限被覆である。

3 quasi-Gorenstein 性について

$\mu:\widetilde{Y}\to Y$ を 2 節で構成したアーベル被覆とし、

$$\sigma_j:\widetilde{Y}\ni(w_1,\dots,w_s,y)\to(w_1,\dots,w_{j-1},\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r_j}\right)w_j,w_{j+1},\dots,w_s,y)$$

とすれば、$Gal(\widetilde{Y}/Y)$ は $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ で生成される。一方、

$$\phi=\frac{\mu^*(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)}{w_1^{r_1-1}\cdots w_s^{r_s-1}}$$

は $\widetilde{Y}\setminus Sing(\widetilde{Y})$ 上至る所 0 にならない正則 n 形式であり、$\sigma_j^*\phi=\exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r_j})\phi$ である。従って、$\chi:Gal(\widetilde{W}/Y_0)\to\mathbf{Z}_r$ を $Gal(\widetilde{W}/Y_0)\to Gal(\widetilde{Y_0}/Y_0)$ とσ_j を

$\frac{r}{r_j}$ に移す写像 $Gal(\widetilde{Y_0}/Y_0) \to \mathbf{Z}_r$ の合成写像とすれば、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 6 $[\pi : X \to Y] \in GC(Y, D)$ に対して $Gal(\widetilde{W}/X_0)$ が $\ker(\chi)$ に含まれれば、X は quasi-Gorenstein である。

4 (X, x_0) がトーリック特異点となる例

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_s \\ C_1 & C_2 & \dots & C_s \end{pmatrix}$$

を次の条件 (C1), (C2) を満たす $n \times m$ 行列とする ($n > m$)。

(C1) B_j は次の正方行列のいずれか。

$$M_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ただし M_E は 6 次, 7 次、または 8 次正方行列である。

(C2) C_j は B_j が n_j 次正方行列のとき $(n-m)\times n_j$ 行列であり、非負行列 (すべての成分が 0 以上) であって零行列ではない。

α_i を I_n の i 列を A の i 列で置き換えて得られる行列とし、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ で生成される $GL(n,\mathbf{Z})$ の部分群を $G(A)$ とし、$C(A)=\bigcup_{g\in G(A)} g\mathbf{R}^n_{\geq 0}$ とする。このとき、$C(A)$ は凸錐となり、トーリック特異点 $X=Spec\mathbf{C}[C(A)\cap\mathbf{Z}^n]$ には $G(A)$ が自然に作用し、$Y=X/G(A)=Spec\mathbf{C}[C(A)\cap\mathbf{Z}^n]^{G(A)}$ は非特異となる (詳しくは [1] を見よ)。$\pi: X\to Y$ を商写像とし、$X_0=\pi^{-1}(Y\setminus Sing(B_\pi))$ とする。このとき、$(B_\pi)_{red}$ は

$$\left(\sum_{g\in H} z^{gv_0}-\sum_{g\in G(A)\setminus H} z^{gv_0}\right)^2=0$$

で定義され、分岐指数 r_j はすべて 2 である。ただし、$H=G(A)\cap SL(n,\mathbf{Z})$, $v_0=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_m$ である。

一方、$\mu:\widetilde{Y}\to Y$ を $D=B_\pi$ としたときの 2 節のアーベル被覆とし、$\widetilde{W}$ を $\mu^{-1}(Y\setminus Sing(B_\pi))$ の普遍被覆空間とすれば、定理 5 により $\widetilde{W}$ は X_0 の普遍被覆空間でもある。また、$X_1=X\setminus Sing(X)$ とすれば、$X_1\supset X_0$ であり、$\pi^{-1}(Sing(B_\pi))$ ($\supset X_1\setminus X_0$) の余次元は 2 以上であるから、$\pi_1(X_1)=\pi_1(X_0)$ である。次に、$C(A)$ の双対錐 $C(A)^*=\{u\in(\mathbf{R}^n)^*|\langle v,u\rangle\geq 0\ for\ all\ v\in C(A)\}$ の一次元面を張る原始元で生成される $(\mathbf{Z}^n)^*$ の部分加群を N とし、$\widetilde{X}=Spec\mathbf{C}[C(A)\cap N^*]$ とする。このとき、$\widetilde{X}\setminus Sing(\widetilde{X})$ は単連結であり、商写像 $\nu:\widetilde{X}\to X$ は $(\mathbf{C}^\times)^n$ および余次元 1 の軌道 $orb(\sigma)$ (σ は $C(A)^*$ の 1 次元面) で分岐しない。従って、$\nu^{-1}(X_1)$ は X_1 の普遍被覆であり、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ は $(\mathbf{Z}^n)^*/N$ と $G(A)^*$ との半直積に同形である。

ある正整数 ℓ があって、$1\leq i\leq \ell<j\leq m$ ならば $a_{ij}(=A$ の (i,j) 成分 $)=a_{ji}=0$ 即ち、$\alpha_i\alpha_j=\alpha_j\alpha_i$ であると仮定し、G_1 (G_2) を $\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell$ ($\alpha_{\ell+1},\ldots,\alpha_m$) で生成される $G(A)$ の部分群とすると $G(A)=G_1\oplus G_2$ である。また、$C_k=\bigcup_{g\in G_k} g\mathbf{R}^n_{\geq 0}$ とし、その双対錐 C_k^* の一次元面を張る原始元達で生成される $(\mathbf{Z}^n)^*$ の部分加群を N_k とすれば、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ は $(\mathbf{Z}^n)^*/N_1$ と G_1^* の半直積と $(\mathbf{Z}^n)^*/N_2$ と G_2^* の半直積の直和に同形である。従って、$s=1$ の場合に $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ が計算できれば、一般の場合もわかる。簡単な計算により、次の定理が得られる。

定理 7 $s=1$ のとき、N は $d_1\mathbf{e}_1^*,\ldots,d_m\mathbf{e}_m^*,\mathbf{e}_{m+1}^*,\ldots,\mathbf{e}_n^*$ で生成される。従って、

$$(\mathbf{Z}^n)^*/N\simeq\mathbf{Z}_{d_1}\oplus\mathbf{Z}_{d_2}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}_{d_m}$$

である。ただし、B_1 が M_A, M_D または M_E のとき、

$$d_1 = \cdots=d_m=g.c.d.\{a_{ij}|1\leq j\leq m<i\leq n\},$$

B_1 が M_B のとき、

$$\begin{aligned} d_1 = \cdots = d_{m-1} &= g.c.d.\{a_{ij} | 1 \le j \le m < i \le n\}, \\ d_m &= g.c.d.\{2a_{ij}, a_{im} | 1 \le j < m < i \le n\}, \end{aligned}$$

B_1 が $M_{B'}$ のとき、

$$\begin{aligned} d_1 = \cdots = d_{m-1} &= g.c.d.\{a_{ij}, 2a_{im} | 1 \le j < m < i \le n\}, \\ d_m &= g.c.d.\{a_{ij} | 1 \le j \le m < i \le n\}, \end{aligned}$$

B_1 が M_F のとき、

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 &= g.c.d.\{a_{ij}, 2a_{ik} | 1 \le j \le 2 < k \le 4 < i \le n\}, \\ d_3 = d_4 &= g.c.d.\{a_{ij} | 1 \le j \le 4 < i \le n\}, \end{aligned}$$

B_1 が M_G のとき、

$$d_1 = g.c.d.\{a_{i1}, 3a_{i2} | 3 \le i \le n\},\ d_2 = g.c.d.\{a_{ij} | 1 \le j \le 2 < i \le n\}$$

である。また、$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の交換子群による商群は B_1 が M_A, M_D または M_E のときは $\mathbf{Z}_2$, B_1 が $M_{B'}$, M_F または M_G のときは $\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$, B_1 が M_B のときは d_m が偶数 (奇数) ならば $\mathbf{Z}_2^{\oplus 3}$ ($\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$) に同型である。

例 8 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \\ b & c \end{pmatrix}$ ($a = 1,2$ または 3, b と c は 0 以上の整数) とする。
$Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の位数は $a = 1, 2, 3$ のとき、それぞれ $6d_1d_2$, $8d_1d_2$, $12d_1d_2$ である。ただし、$d_1 = g.c.d.(b, ac)$, $d_2 = g.c.d.(b, c)$ である。一方、$(B_\pi)_{red}$ の定義式は $a = 1, 2, 3$ のときそれぞれ

$$z_1^2 z_2^2 - 4z_1^3 z_3^c - 4z_2^3 z_3^b + 18 z_1 z_2 z_3^{b+c} - 27 z_3^{2b+2c},$$

$$(z_1^2 - 4z_2 z_3^c)\left((z_2 + z_3^{b+c})^2 - 4z_1^2 z_3^b\right),$$

$$\left(z_1^2 - 4z_2^3 z_3^b + 12 z_1 z_2 z_3^{b+c} + 24 z_1 z_3^{2b+3c} + 36 z_2 z_3^{3b+4c} + 36 z_3^{4b+6c}\right)\left(z_2^2 - 4z_1 z_3^c - 12 z_3^{2b+4c}\right)$$

である。従って、B_π の既約成分の個数は $a = 1$, $a = 2$ かつ b が奇数, $a = 2$ かつ b が偶数, $a = 3$ のとき、それぞれ 1, 2, 3, 2 であるが、実際 $Gal(\widetilde{W}/Y_0)$ の交換子群による商群ははそれぞれ $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$, $\mathbf{Z}_2^{\oplus 3}$, $\mathbf{Z}_2^{\oplus 2}$ に同型である。

参考文献

[1] H. Tsuchihashi, Toric singularities which are Galois coverings of non-singular points, preprint

[2] H. Tsuchihashi, Cusp singularities which are Galois coverings of non-singular points, preprint

[3] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities I, Math. Ann., 250 (1980), 65-94

注 1 と 2 の文献は、そのままの形で雑誌に投稿せず、この記録の内容と一緒にして一つの論文しようかと考えています。連絡して頂ければ、1 と 2 の preprint はお送りします。