数理解析研究所講究録
934巻 1996年 111-123

負の定曲率空間におけるボロノイ図とその応用

大西 建輔 (Kensuke Onishi)

(神戸大学大学院自然科学研究科)

Abstract

ボロノイ図は計算幾何においてもっとも基本的かつ利用価値の高い概念である. 本文章はその双曲空間への拡張を考察するものであり, 理解を促すものである. 最初に $\boldsymbol{R}^2$ と $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図の基本概念や特徴付けを行ない, それに基づく構成を行なう. その後, 応用を考える.

1 序

計算幾何学とは計算機の上で幾何的な構造 (点集合や凸包など) をどのように扱えば良いのかを研究する学問である. 一般に計算機は図形を扱うことが不得意である. 例えば, 2次元凸包を考えてみよう. これを表現することは非常に簡単で各頂点に名前をつけ, その頂点の列を考えればよい. そして, 各頂点の座標を (あればではあるが) 頂点に付加すれば良い. さて, これと同じことが3次元の凸包でできるのであろうか. 結論からいえばそれは無理である. 3次元凸包の構造は2次元凸包よりも複雑になっているからである. (d 次元の凸包の構造を書き表すには各次元のフェイス間の接続状態を表すグラフ Incidence Graph が良く使われる.) このように何かの構造を表すグラフやそれに何らかの情報を付け加えた構造のことをデータ構造という. 幾何的な構造にあったデータ構造を考えるのが一つの目的である. そうした目的のために多くの研究がなされ, 多くの成果が次の2冊 [14, 4] にまとめられている. これらの本以外にも [8] や [2] といった良書もある. さらに, 面白い読みものとして [18] のような入門書も出版されている.

また, 計算機は正確な計算が不得意である. つまり, 幾何構造を構成する場合にも誤差が入ることが多々あるということである. しかし, 人々は何とかして正しい幾何的な構造を得たいと考え, そのためのアルゴリズムを考えてきた. その結果が [17] に大変よくまとめられている.

この文章では特にボロノイ図とデローネ三角形分割についての話をおこなう. ボロノイ図とは近接関係を表す構造であり, デローネ三角形分割とはその双対グラフであり, Computer Graphics や Simulation などの分野で良く利用されている構造である. これらについては [14] の Section 5.5 や [4] の Chapter 13 にも書かれている.

さて, このように多くの研究がなされ書籍も出版されてはいるが, これらの結果のほとんどは, ユークリッド空間での研究である. $\boldsymbol{R}^d$内で距離を変えた研究もある ([11, 6, 7]) が, 空間そのものをユークリッド空間以外の空間に置き換えた研究はほとんど存在しない. ([3, 12] などがあるぐらいである.)

以下各節の要約を行なう. 次の章ではまず, ボロノイ図とは何か, どのように利用できるのかということを中心に話を構成する. 第3章では, 話を負の定曲率空間に話題を移し, ボロノイ図を構成するための定義や補題に言及する. さらに $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図が $\boldsymbol{R}^2$上のボロノイ図の部分集合であることを利用し $O(n\log n)$ 時間で構成できるということを示す (第4章). また, 整数計算だけで構造が位相的に正しいボロノイ図が構成できることを示す. 最後に, 幾つかの応用についての話をおこなう.

2 ボロノイ図とは

この章ではボロノイ図とは何かということに主題をおいて話を進める. まず, "ボロノイ図がいかに有用なものであるか" ということから話を始める.

2.1 ボロノイ図の応用

例えば次のような問題を一つ考えてみよう.

[郵便局問題] ある都市に郵便局が n 個ある. 新しく家が建設されたとき, どこの郵便局がその家に最も近いか?

これを定式化すると次のようになる.

平面上に n 個の点 $p_1, \ldots, p_n$ が与えられている. 新しい点 q を加えたとき, 点 q からもっとも近い点は n 個の点の中でどの点か.

この問題をそのまま解くとすると次のようにすれば良い.

Algorithm (各点に対し最も近い点を探す.)

1. 点 q と点 p_i の距離 $d(q, p_i)$ を計算する.
2. i を 1 から n まで動かし, その最小値をとる.

このアルゴリズムを実行するためにかかる時間は $O(n)$[1]時間である. ところがこういった問題はある決まった構造に対して質問が行なわれることが多い. つまり, 何回も同じ計算を行なうよりは, ある種の構造を点集合の中に入れておけば, 計算が速く行なえる.

これを効率良く解くためにボロノイ図を使うことができる. アルゴリズムの形で表すと次のようになる.

Algorithm (各点に対し最も近い点を探す)

1. n 点でのボロノイ図を構成する.
2. q と適当な点 $p_{q(1)}$ の間の距離を計算する.
3. $p_{q(1)}$ を含む領域と隣接する領域の点と q との距離を計算し, 最も近い点を $p_{q(2)}$ とする.
4. $p_{q(i)}$ と $p_{q(i+1)}$ が一致するまでこの操作を続ける.

このようなアルゴリズムを使うと, 明らかに先ほどのアルゴリズムよりは計算すべき 2 点間の距離の数が少ないことがわかる. つまり, (ボロノイ図を作る時間を考えなければ) 計算時間が少なくなったということである.

さらに, ボロノイ図の各々の領域の間に四分木の情報を加えておけば, 探索にかかる時間は $O(\log_4 n)$ とすることができる. (計算幾何において通常解きたい問題の大きさは少なくとも n は数百, 数千, 解くことができれば, もっと大きくということになるので, $O(n)$ と $O(\log n)$ の間にはかなり大きな差がありできる限りオーダーを下げたい.)

これ以外にもボロノイ図の構造を使いいくつかの問題を解くことができる.

- **(最大空円を求める問題)** $p_1, \ldots, p_n$ の凸包の中に中心をもち, 内部にどの p_i をも含まない円のうち半径が最大のものを求める.
- **(最小木問題)** $p_1, \ldots, p_n$ の間に $n-1$ 本の辺を付加して連結グラフをつくるとき, 辺の長さの和を最小にする.
- **(最小木問題の一般化)** 平面上に n 点が k 個の成分 $S_j = \{p_{j_i} | i = 1, \ldots, n_j\} (j = 1, \ldots, k) (\sum_{j=1}^{k} n_j = n)$ に分けられていたとする. 同じ成分内の点はすでに連結であるとみなし, 異なる成分に属する点の間に $k-1$ 本の辺を加え全体を連結にする. このとき, 付加した辺の長さの和を最小にする.

2.2 ボロノイ図とデローネ三角形分割

さて, ここまでどのようにボロノイ図が利用できるかということを示してきたが, ここで平面上でのボロノイ図の定義を行なうことにしよう.

定義 2.1 点集合 $p_1, \ldots, p_n$ に対し, p_i のボロノイ領域 $\mathrm{Vor}(p_i)$ とは,

$$\mathrm{Vor}(p_i) = \{x \in \mathbf{R}^2 | \ d(p_i, x) \leq d(p_j, x) \forall j \neq i\}$$

で表される領域である. ただし, $d(\cdot, \cdot)$ は 2 点間の距離とする. ボロノイ領域の全体は平面を分割し, その全体をボロノイ図という.

また, ボロノイ領域の境界をボロノイ辺, 頂点をボロノイ点といい, 元の点集合の点を母点という.

ここで注意をしてもらいたいのは, 次の 3 点である.

- ここでは平面上のボロノイ図と定義をしたが, これはこのまま高次元に拡張できる. しかしながら, 高次元ボロノイ図は構造が複雑で扱いづらいので, ここでは詳しく述べない. [2]

[1] ある正整数 N と正定数 k が存在していて, N 以上のすべての整数に対して, $g(n) \leq kf(n)$ となるとき, $g(n) = O(f(n))$ と書く

[2] d 次元ボロノイ図の各ボロノイ領域は一般に d 次元凸包となっている. ボロノイ図の中には凸包が n 個含まれており, さらにそれぞれのフェイス間に関係を持たせなければならない.

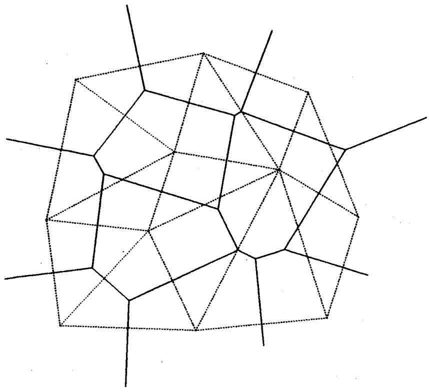

図 1: ボロノイ図とデローネ三角形分割

- $d(\cdot,\cdot)$ をいろいろな距離に替えてボロノイ図を構成することができる.

  これに関しては次のような距離で考えられている. ただし, $z_1(x_1,y_1), z_2(x_2,y_2)$ とする.

  - $d_p(z_1,z_2) = (|x_1-x_2|^p + |y_1-y_2|^p)^{1/p}$ $(1 < p < \infty)$
  - $d(z_1,z_2) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$
  - $d(z_1,z_2) = \max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$

- 最も近い点の集合としてボロノイ図を定義したが, 何番目に遠い領域としてボロノイ図を構成できる. これを k次ボロノイ図という. (図 2,3 参照)

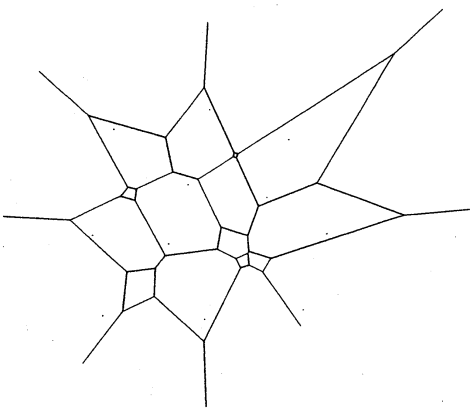

図 2: 2 次ボロノイ図

続いてデローネ三角形分割を定義する.

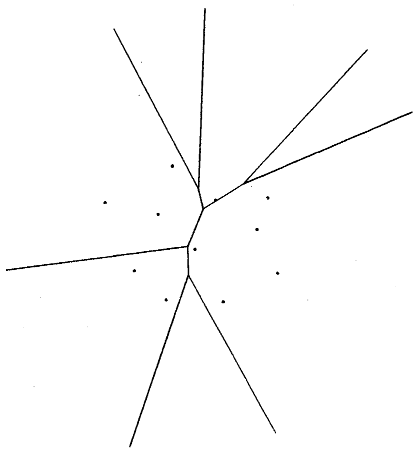

図 3: 最遠点ボロノイ図

定義 2.2 点集合 $P = \{p_1,\ldots,p_n\}$ のボロノイ図において $\mathrm{Vor}(p_i)$ と $\mathrm{Vor}(p_j)$ が共通の辺を持つとき, p_i と p_jを辺でつなぐ. このようにしてできたグラフ $G=(P,E)$ をデローネ三角形分割という.

デローネ三角形分割の特徴として次のようなことがいえる.

- 三角形分割の各三角形に対し外接円を書いたとき, その内側に頂点は存在しない.
- 最大角を最小にする.
- 最大外接円の半径を最小にする.
- 各三角形の最小包含円の半径の最大値を最小にする. [3]

2.3 平面上でのボロノイ図の構成

ここでは, $\boldsymbol{R}^2$上でのボロノイ図の構成について述べる. 構成法としては,

- 分割統治法
- 逐次添加法
- 幾何学的変換を使う方法

などがある. 幾何学的変換については4.1章を逐次添加法については4.2章を, 見ていただきたい. ここでは分割統治法について述べていく.

[3]最小包含円とは鋭角三角形の場合には外接円であるが, 鈍角三角形の場合は最長辺の中点を中心とする円である.

分割統治法とはアルゴリズム論においてよく使われる手法であり, その基本的な戦略は問題を2つに分割し, それぞれを再帰的に解き, それを一つにまとめるということである. まとめる部分の計算量が$O(n)$時間よりも小さければ, 全体の計算量は$O(n \log n)$時間となる. [4] 例えばこれをボロノイ図にあてはめると次のようになる.

[アルゴリズム] (ボロノイ図の構成 (分割統治法))

1. 点集合 $P = \{p_1, \dots . p_n\}$ を x 座標でソートしておき, その順にインデックスを付け替える.

2. 点集合 Pを左点集合 $P_l = \{p_1, \dots, p_k\}$ と右点集合 $P_r = \{p_{k+1}, \dots, p_n\}$ の2つに分割し, それぞれのボロノイ図 $\mathrm{Vor}(P_l)$,$\mathrm{Vor}(P_r)$ を再帰的に構成する. ただし, $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

3. $\mathrm{Vor}(P_1)$ と $\mathrm{Vor}(P_2)$ を合成し $\mathrm{Vor}(P)$ を構成する.

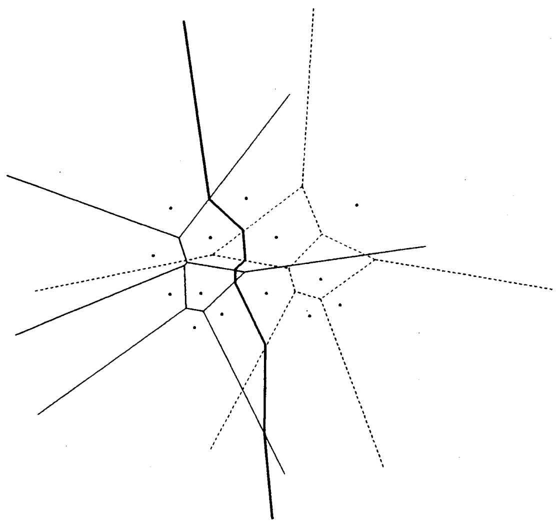

図 4: 左半分の点のボロノイ図 (実線), 右半分の点のボロノイ図 (破線) とそれらをつなぐ折れ線 (太線)

次にアルゴリズムの3の部分に着目してみよう. 図4を見てもらえばわかるが, 各点に対するボロノイ領域は局所的な部分が大きいので, 左点集合と右点集合のそれぞれのボロノイ図を重ねて書くと影響を受けない部分がある. 逆にいえば, 2つのボロノイ図を重ねて領域として重なった部分を修正していけばよい.

つまり, 図4の太線で書かれた部分を求めそれに応じて修正をすればよいことがわかる. この折れ線を求めることを考える.

[Procedure] (折れ線を求める.)

1. 点集合 P_lと P_rのそれぞれの凸包を計算し, その上側共通接線を計算する.

2. 上側共通接線に含まれる点の中で $P_l(P_r)$ の中で最も右 (左) にある点をそれぞれ $p_l(p_r)$ で表す. p_lと p_rの垂直二等分線を計算し, $p_l(p_r)$ の周りのボロノイ辺の中で交わるものを計算する.

3. 交点の中で最も y座標が大きい点を選び, 注目する点をそのボロノイ辺の反対側の点 (p_l, p_rでない点) ともう一つの点 (先ほど p_lの反対側の点を使えばこの点は p_r) に移す.

4. 先の2点を使い同様のことを交わる辺がなくなるまで続ける.(ただし, 1度使った辺は交わる候補にと使わないとする.)

これが $O(n)$ 時間で終る. [5]

3 負の定曲率空間

この章では負の定曲率を持つ空間について述べていく. 負の定曲率を持つ空間は Poincaé モデルや擬球 (pseudo sphere) などが存在するが, ここでは上半平面モデルを使い話を進める.

定義 3.1 [上半平面] $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \mid y > 0\}$ にリーマン計量 $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ を入れたリーマン多様体を上半平面という.

さて, 次に測地線と呼ばれるリーマン多様体上の曲線を考えよう. Cをリーマン多様体上の曲線で, 点 $p \in C$における曲率ベクトルをκとする. κ_gをκの接空間への射影とする. このとき C上のすべての点において$\kappa_g = 0$ となるような曲線を測地線という.

この測地線という概念は平面における直線の拡張概念であり, 例えば球面上の測地線はすべて大円の一部である.

[4] $T(n)$ を構成にかかる時間とすると $T(n) = T(n/2) + O(n)$ を解けばよいことがすぐにわかる. これを解くと $T(n) = O(n \log n)$ が得られる.

[5] ここでは解析はしない.

上半平面での測地線は次の補題のようにまとめることができる.

補題 3.1 上半平面上の曲線が測地線であるための必要十分条件は次のいずれかの方程式で表現されることである.

$$(x-p)^2+y^2=r^2 \quad (p,r\in\mathbf{R})$$

または,

$$x=c \quad (c\in\mathbf{R}).$$

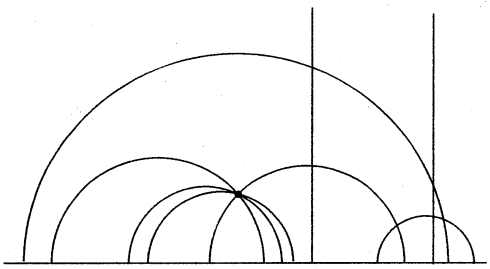

図 5: 上半平面の測地線

さて, ユークリッド平面での直線に代わるものは定義したが, これだけでは $\mathbf{H}$ 上でのボロノイ図を構成することができないのでさらにいくつかの定義を行なう.

まず, $\mathbf{H}$ 上の半空間を定義する.

定義 3.2 $\mathbf{H}$ 上の測地線 C に対して, $\mathbf{H}$ から C を除いた時にできる *2* つの連結成分のそれぞれを半空間と呼ぶ.

この時, 次の補題が成り立つ.

補題 3.2 (半空間の凸性) $\mathbf{H}$ 上の半空間は凸集合である. つまり,

$$p_1,p_2\in C^+ \Longrightarrow C_{p_1,p_2}\in C^+$$

ただし, C_{p_1,p_2} は p_1,p_2 を端点とする測地線分であり, C^+ は半空間とする.

次に距離を次のように定義する.

定義 3.3 $\mathbf{H}$ 上での距離をリーマン計量により決定される内在的な距離とする.

これは 2 点間の距離を測地線に沿って計算することである.

この定義を使い, 2 点間の距離を計算する.

補題 3.3 $\mathbf{H}$ 上の *2* 点 $p_1(x_1,y_1),p_2(x_2,y_2)$ の距離は次のように表現される.

$$d(p_1,p_2)=\left|\log\frac{A+\sqrt{A^2-4{y_1}^2{y_2}^2}}{A-\sqrt{A^2-4{y_1}^2{y_2}^2}}\right|$$

ただし, $A=(x_1-x_2)^2+({y_1}^2+{y_2}^2)$ とする.

垂直二等分線を $\mathbf{H}$ 上の 2 点から等距離にある点の集合と定義すると次の補題が成り立つ.

補題 3.4 垂直二等分線は測地線となる. また, *2* 点を $p_1(x_1,y_1),p_2(x_2,y_2)$ とすると, 垂直二等分線は次のように表される. $y_1\neq y_2$ ならば,

$$\left(x-\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}\right)^2+y^2=y_1y_2\left\{\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\right)^2+1\right\}$$

$y_1=y_2$ ならば,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

また, $\mathbf{H}$ 上の' 円' を次のように定義する.

定義 3.4 上半平面上の任意の点から等距離にある点の集合を円と定義する.

この円を実際に計算すると次のようになる.

補題 3.5 上半平面上の任意の点 $p_0(x_0,y_0)$ に対してこの点から等距離にある点の集合はユークリッド平面における円を表す方程式と同じ形を持つ. この方程式は点 p_0 との距離を r とすると

$$(x-x_0)^2+\left(y-\frac{e^r+e^{-r}}{2}y_0\right)^2=\left(\frac{e^r-e^{-r}}{2}y_0\right)^2$$

となる. ただし, e は自然対数の底である.

この円には中心と考えられる点が 2 つ存在する. 一つは, 円周上のすべての点から等距離にある点 (この中心を双曲的な中心と呼ぶ) であり, もう一つは方程式として書き表したときの中心 (この中心をユークリッド的な中心とも呼ぶ) である (図 6参照). [6]

さて, 次に $\mathbf{H}$ 上の任意の 3 点を通る曲線を考える. 3 点を $p_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ とすればその曲線族の一種は次のように表現できる.

[6] この 2 点はユークリッド平面では一致する.

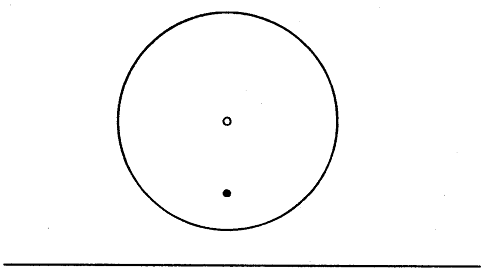

図 6: $\mathbf{H}$ 上の円とその中心: 白丸はユークリッド的な中心, 黒丸は双曲的な中心

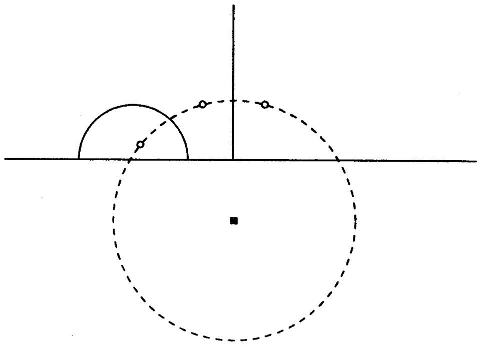

図 7: $\mathbf{H}$ 上の 3 点を通る円と垂直二等分線

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & {x_1}^2+{y_1}^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & {x_2}^2+{y_2}^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & {x_3}^2+{y_3}^2 \\ 1 & x & y & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

この行列式を展開して, 次の等式を得る.

$$\alpha(x^2+y^2) - \beta y + \gamma x - \delta = 0 \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbf{R}) .$$

これを使い, $\mathbf{H}$ 上の 3 点から等距離にある点が存在するための必要十分条件を得ることができる.

補題 3.6 $\mathbf{H}$ 上の相異なる *3* 点が与えられた時, その *3* 点から等距離にある点の集合は, もし存在すれば *1* 点からなる集合である. また, その点が存在するための必要十分条件は上と同じ記号を使うと,

$$\alpha \neq 0,\ \left(\frac{-\gamma}{2\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha}\right) \in \mathbf{H} \ \text{ and } \ 4\alpha\delta + \gamma^2 < 0.$$

となる.

[注意] $\mathbf{R}^2$ 上で直線上にない 3 点を与えたとき, その 3 点から等距離にある点は必ず存在するが, $\mathbf{H}$ 上では存在するとは限らない.(図 7参照)

また, ユークリッド平面上の円と見たときの中心が上半平面に含まれていたとしても, 双曲的な円の中心が上半平面に含まれないことがある.

例えば, (20,70),(10,30),(100,10) という 3 点を考えるとユークリッド平面上の円と見たときの中心は $\left(\frac{1125}{19}, \frac{740}{19}\right) \in \mathbf{H}$ となるが, 3 本の垂直二等分線は,

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{8925}{4} = (47.23\ldots)^2,$$

$$(x-145)^2 + y^2 = 6375 = (79.84\ldots)^2,$$

$$\left(x - \frac{340}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{17500}{9} = (44.09\ldots)^2$$

となり交わらない.

4 H 上のボロノイ図とその構成

この章では上半平面でのボロノイ図の構成を扱う. が, その前に $\mathbf{H}$ 上でのボロノイ図を定義しておこう.

定義 4.1 点集合 $\{p_1,\ldots,p_n\}$ に対し, p_iのボロノイ領域 $\mathrm{Vor}(p_i)$ とは,

$$\mathrm{Vor}(p_i) = \{x \in \mathbf{R}^2 |\ d(p_i,x) \leq d(p_j,x) \forall j \neq i\}$$

で表される領域である. ただし, $d(\cdot,\cdot)$ は *2* 点間の距離で, 定義 *3.3*で定義した距離とする. ボロノイ領域の全体は平面を分割し, その全体をボロノイ図という.

4.1 H 上のボロノイ図の構成

つぎに構成を行なうために $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図の構造を明らかにすることから始める.

まず, ユークリッド平面でのボロノイ図の構成 (幾何学的変換を使った方法) について述べる.

[アルゴリズム] 平面上のボロノイ図の構成

1. 点集合 $P = \{p_i(x_i,y_i) | x_i,y_i \in \boldsymbol{R}, 1 \leq i \leq n\}$ に対し, 点集合 $P' = \{p'_i(x_i,y_i,{x_i}^2+{y_i}^2) \in \boldsymbol{R}^3 | 1 \leq i \leq n\}$ を考える.
2. P'の下側凸包を構成する.

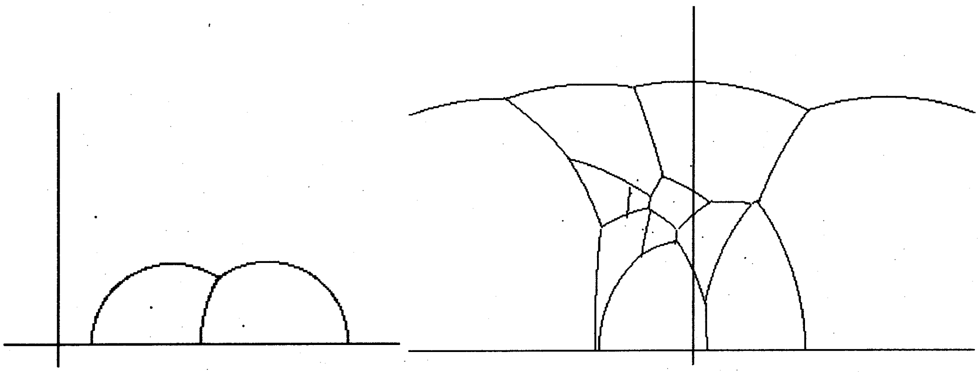

図 8: **H** 上のボロノイ図の例

3. 下側凸包を xy平面に射影する.(これはデローネ三角形分割になっている.)
4. デローネ三角形分割からボロノイ図を構成する.

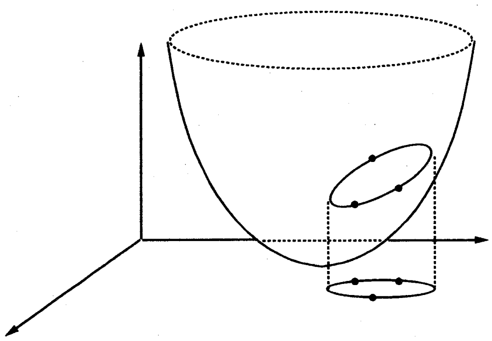

図 9: 三角形と外接円の持ち上げ

この方法のアナロジーをおこなう. そのために持ち上げるべき空間をまず考える.

定義 4.2 [**上半空間**] $\mathbf{H}^3 = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z > 0\}$ にリーマン計量 $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$ を入れたリーマン多様体を上半空間という

補題 4.1 $\mathbf{H}^3$上の曲線が測地線であるための必要十分条件は次のいずれかの方程式で表現できることである.

$$(x-p)^2+(y-q)^2+z^2 = r^2 \text{かつ} p'(x-p)+q'(y-q) = 0$$

または,

$$x = p, y = q$$

ただし, $p,q,r,p',q' \in \boldsymbol{R}$.

定義 4.3 多様体 Nの部分多様体 Mが点 $x \in M$で全測地的であるとは, 任意の測地線$\tau = x_t$(ただし, x_0 は x である)が小さな値 t に対して Mに含まれることである.

また, M上の任意の点で全測地的であるならば, M を Nの全測地的部分多様体と定義する. ([10] 参照)

定義 4.4 全測地的な $\mathbf{H}^3$上の部分多様体を測地面と呼ぶ.

補題 4.2 $\mathbf{H}^3$において同一測地線上にない *3* 点に対して, *3* 点を含む曲面が測地面であることの必要十分条件は曲面が次のいずれかの方程式を満たすことである.

$$(x-p)^2+(x-q)^2+z^2 = r^2$$

または,

$$px+qy+r = 0.$$

ただし, $p,q,r \in \boldsymbol{R}$.

定義 4.5 $\mathbf{H}^3$上の点集合に対して凸包 $\mathrm{conv}(S)$ を S を含むすべての半空間の交わりと定義する. ただし, 半空間とは測地面によって $\mathbf{H}^3$が *2* つの連結成分に分割されたとき, そのそれぞれの連結成分を半空間と呼ぶ.

定義 4.6 $\mathbf{H}^3$上の凸包の面を含む測地面の中で

$$(x-p)^2+(y-q)^2+z^2 \geq r^2$$

で表される領域にすべての凸包の点が含まれる測地面の集合を下側凸包という．また，

$$(x-p)^2+(y-q)^2+z^2 \leq r^2$$

で表される領域にすべての凸包の点が含まれる測地面の集合を上側凸包という．ただし，$p,q,r \in \boldsymbol{R}$.

定義 4.7 $\overline{\mathbf{H^3}} = \mathbf{H}^3 \cup \{z=0\}$ と定義する．このとき，写像 $\varphi : \overline{\mathbf{H^3}} \to \mathbf{H}, \psi : \mathbf{H} \to \overline{\mathbf{H^3}}$をそれぞれ次で定義する．

$$\varphi : (x,y,z) \mapsto (x, \sqrt{y^2+z^2})$$

$$\psi : (x,y) \mapsto (x,y,0)$$

補題 4.3 $\overline{\mathbf{H^3}}$上の任意の測地線はφによって $\mathbf{H}$ 上の測地線に写る．

さて，ここまでで先のアルゴリズムのアナロジーができることがわかった．ここで $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図の構成のアルゴリズムを得ることができた．

[アルゴリズム] $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図の構成

1. 点集合 Pに対し，点集合 $P' = \psi(P)$ を計算する．
2. P'の下側凸包を構成する．
3. 下側凸包をφによって射影し，$\mathbf{H}$ 上のデローネ三角形分割を構成する．
4. デローネ三角形分割からボロノイ図を得る．

しかし，ここで $\mathbf{H}^3$上の測地面と xy平面の交わりを考えてみると，これはユークリッド平面上の円である．この事実をもとに次の補題がいえる．

補題 4.4 $\overline{\mathbf{H^3}}$上の点集合 $\{p_i(x_i,y_i,0) | x_i,y_i \in \boldsymbol{R}\}$ に対して，その下側凸包は $O(n \log n)$ 時間で構成することができる．

(proof) まず，下側凸包に含まれる測地面を一つ考えてみよう．このとき，この測地面は少なくとも xy 平面上の 3 点を含む．しかし，下側凸包に含まれるということは球面の内側には一つの点も含まないということである．つまり測地面の境界を考えるとこれは平面上の 3 点を含む外接円でその内部に点を含まない．結局$\overline{\mathbf{H^3}}$の下側凸包はユークリッド平面のデローネ三角形分割と 1 対 1 の対応をもつ．$\boldsymbol{R}^2$のデローネ三角形分割は $O(n \log n)$ 時間で構成できることが良く知られている ([4] Chapter 13 参照) ので，そこから下側凸包への変換は線形時間でできる． □

この補題を使い先ほどのアルゴリズムを改良できる．

[アルゴリズム] $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図の構成 (改良版)

1. Pに対するデローネ三角形分割を構成する．
2. デローネ三角形分割から $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図を構成する．

このように改良できるがここでアルゴリズムの 2. を少し考えてみよう．

「デローネ三角形分割からボロノイ図を構成する」という部分ではあるが，これは次のような Procedure を全てのデローネ三角形分割の面に適用すればいい．

[Procedure] デローネ三角形分割から $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図を構成する．

1. 三角形分割の面に対しその頂点から等距離にある点 Oを求める．
2. Oが $\mathbf{H}$ に含まれない，または存在しないならば辺のなかで最も長い辺を削除する．
3. この部分グラフからその双対グラフであるボロノイ図を計算する．

結局，次の定理を得ることができる．

定理 4.1 $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図は $O(n \log n)$ 時間で構成できる．

(proof) アルゴリズムの改良版を使う．1. の部分は補題 4.4 により $O(n \log n)$ 時間で構成できる．2. は Procedure を考えればこれは扱う辺や面の数の線形時間で計算できることがわかるが，これらの辺や面の数は $O(n)$ 個しかないので全体でも $O(n)$ 時間で終る． □

次にこのアルゴリズムを使い，ボロノイ図が整数計算だけで構成できることを示す．

定理 4.2 $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図は入力の点集合が有理数のみからなるとき，整数計算だけで構成することができる．

(proof) まず，ユークリッド平面上のボロノイ図 (もしくはデローネ三角形分割) を構成することを考え

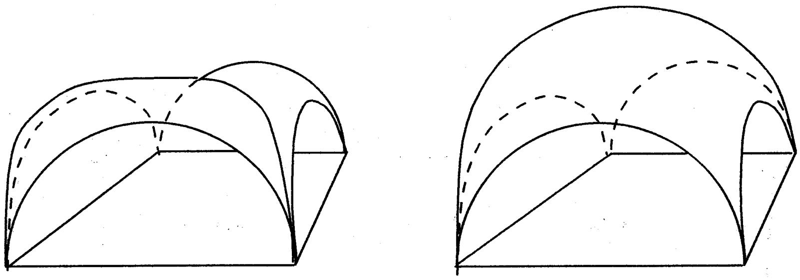

図 10: $\mathbf{H}^3$上の下側凸包 (左) と上側凸包 (右)

よう．これに関しては, [17] などに良い解説があるのでここでは概略を述べることにする．

$$H(p_i,p_j,p_k,p)=\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \\ 1 & x_j & y_j & {x_j}^2+{y_j}^2 \\ 1 & x_k & y_k & {x_k}^2+{y_k}^2 \\ 1 & x & y & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

という円の方程式を考える．ただし, $p_i(x_i,y_i),p_j,p_k$ は母点であり, $p(x,y)$ は一般の点である． つまり,$H(p_i,p_j,p_k,p)=0$ で表される円 C_{ijk} は p_i·p_j·p_k を通る円である．このとき, 点 p が C_{ijk} の内部, 円周, 外部にあることは $H(p_i,p_j,p_k,p)$ の符号によってわかる．この事実を元に整数計算だけでユークリッド平面上のボロノイ図が構成できる．

つぎに, これを $\mathbf{H}$ 上のボロノイ図に変換するには, 円の双曲的な中心が $\mathbf{H}$ 上に含まれるかどうかを調べれば良い．これは補題3.6で与えた条件を調べればいい．つまり, 補題3.6と同じ記号を使うと,

$$\alpha\cdot\beta>0 \ \text{ and } \ 4\alpha\delta+\gamma^2<0$$

を調べさえすればいい． □

4.2 新しい点を加えた場合の処理

ここではボロノイ図を動的に管理する場合に必要となる点を付け加える場合の処理を考えていくことにする．

まず, $\boldsymbol{R}^2$上における点の付加を考える．それは次のように Procedure で表せる．ただし, 点集合を $P_i=\{p_1,\ldots,p_i\}$, そのボロノイ図を $\mathrm{Vor}(P_i)$, 付加する点を p_{i+1}, それによってできたボロノイ図を $\mathrm{Vor}(P_{i+1})$ とする．

[Procedure]($\mathrm{Vor}(P_i)$ から $\mathrm{Vor}(P_{i+1})$ を構成する.)

Phase 1 (最も近い点を探す): $p_1,\ldots,p_i$の点の中で p_{i+1}に最も近い点を $p_{N(i+1)}$とする.

Phase 2 (局所的な修正): $p_{i+1},p_{N(i+1)}$の垂直二等分線を計算し, それと交わる $p_{N(i+1)}$のボロノイ領域の辺を探す．辺に隣接するもう一つのボロノイ領域の母点を $p_{N_1(i+1)}$とする; ...; これを繰り返し再び元の点 $p_{N(i+1)}$に戻ってくるまで続ける.

このようにして p_{i+1}に対するボロノイ領域を得ることができる.(図 11,12参照)

さて, $\mathbf{H}$ 上では Procedure を使い, ほとんどの場合はユークリッド空間と同様に構成できる．しかし, それだけでは扱えない場合が存在する．というのもこの空間では一つの点と一本の直線を選んだときに, その点を通り直線に交わらない直線が無限にとれるからである．

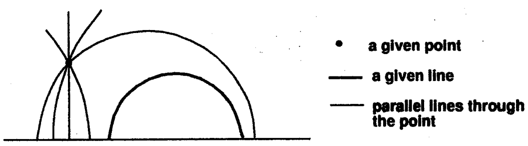

図 13: ある点を通り一つの直線と交わらない多くの直線

このため記号摂動法[7]がこの場合は使うことができない．

[7]点を微少量だけ動かし, 同一の直線上にある点を無くし計算量を減少させる方法．詳しくは [4, 17] 参照

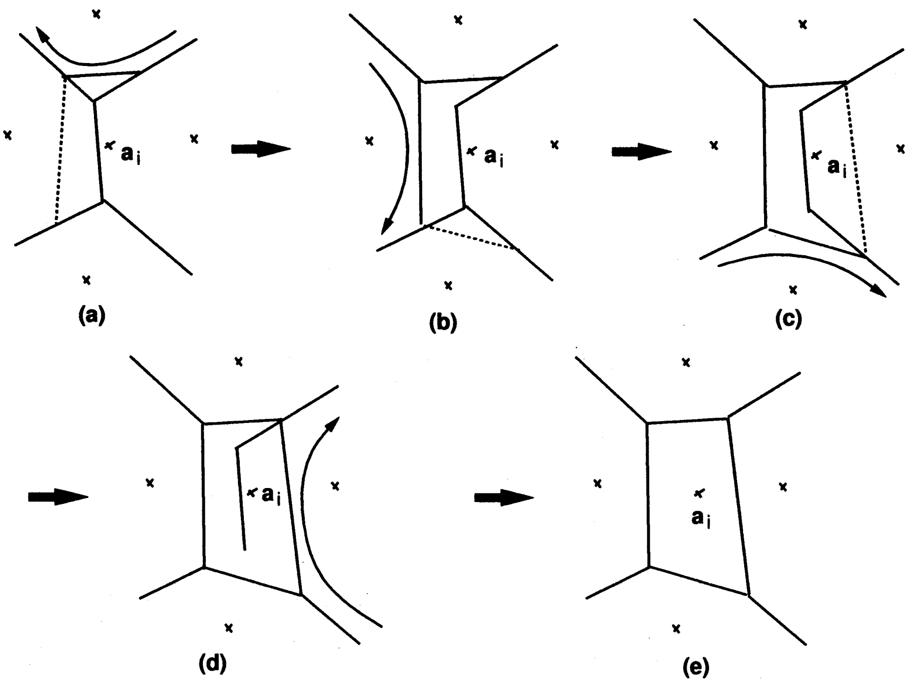

図 11: 点 a_iを加えた時のアルゴリズムの動き

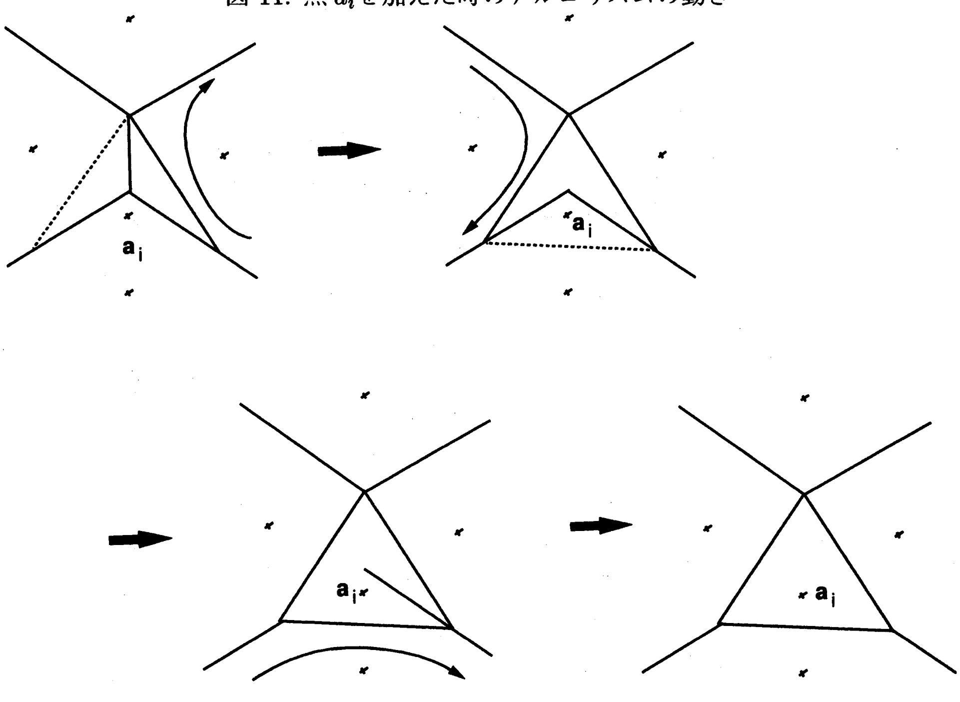

図 12: 辺が端点で交わっている場合 (退化している場合)

このような場合が存在するためにいくつかの特殊な場合に対しアルゴリズムを考えなければならない. そのため無限辺というものを考える. これは, $y=0$ をいくつかに分割したものでこれをボロノイ辺と考えることによりアルゴリズムを簡単に記述することができる.

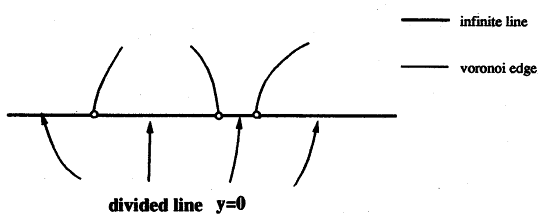

図 14: **H** 上のボロノイ図の無限辺

まず, どのような時に特別なアルゴリズムに入るかを調べるアルゴリズムを示す.

[Procedure] (交わる辺が無限辺であるとわかった時)

1. 垂直二等分線と交わるもう一つの辺を探す.
2. **IF** ((もう一つの辺が見つかり, その辺も無限辺である) もしくは (辺が見つからなかった))

   THEN 特別なアルゴリズムを使う.

   ELSE もう一つの見つかった辺を使いアルゴリズムを始める.

さて, この特別なアルゴリズムであるが次のように2つの場合が存在する.

- 1つだけ交わる辺が存在する.
- 交わる辺が2つ存在するがどちらも無限辺である.

まず, 最初の方に対するアルゴリズムを考えよう. これに関してはさらに2つの場合わけをする.

(a) 新しく追加された点が1つの垂直二等分線と1つの無限辺で囲まれている場合.

(b) (a) 以外の場合.

(a) の場合にはすべき処理はごく限られている. 垂直二等分線を構成し, 無限辺を3つに分割することで終る. (b) の場合には (a) で行なった処理に加えて, 追加点に最も近い母点の回りにある辺をすべて扱う必要がある.(図 15参照)

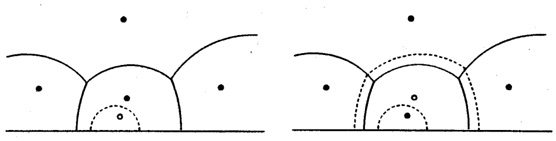

図 15: 無限辺が一つしか見つからない場合. 白丸は追加点, 黒丸は元からある母点, 実線はボロノイ辺で破線は新たにできるボロノイ辺.

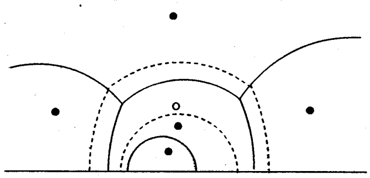

図 16: 無限辺が2つ見つかった場合. 白丸は追加点, 黒丸は元からある母点, 実線はボロノイ辺で破線は新たにできるボロノイ辺.

次に2つの無限辺が見つかった場合の処理を考える. この場合はまず追加点とその最近点の垂直二等分線を計算し, それをボロノイ辺に加える. さらに交わった2つの無限辺をそれぞれ分割し, その無限辺から始めもう一つの無限辺まで処理をする.

さて, これでアルゴリズムができたのでその評価をしよう.

定理 4.3 *n 個の点からなるボロノイ図が存在するとき, そこに新たな 1 点を加える操作は $O(n)$ 時間しかかからない.*

(proof) 1つの手順は一定時間でできると考えると, 全体の時間は操作するボロノイ辺の数と無限辺の数の和に比例することがわかる. そこで, ボロノイ辺の数と無限辺の数の評価をおこなう.

まず, **H** 上のボロノイ図が $\boldsymbol{R}^2$ のボロノイ図の部分グラフになっていることより変数に関する次の不等式が成り立つ.

$$|\mathbf{H} \text{ 上の } \mathrm{Vor(P)}| \leq |\boldsymbol{R}^2 \text{上の } \mathrm{Vor}(P)|.$$

ただし, 点集合を P, $|\cdot|$ でそのグラフの辺数を表すとする. ここでボロノイ図が平面グラフであることよりその辺数は高々$O(n)$ 本しかない.

次に, 無限辺の数の評価をおこなう. これは, ボロノイ辺が $O(n)$ 本しか存在しないことがわかったのでそのすべてが $y=0$ と交わったとしても, 無限辺は $O(n)$ 本しか存在しない. つまり, ボロノイ辺と無限辺を会わしても $O(n)$ 本しか存在しないことが証明できた. □

5 応用

5.1 ポアンカレの円盤上のボロノイ図

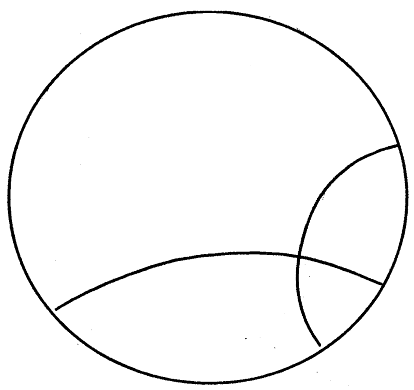

図 17: ポアンカレの円盤

上半平面を複素平面の一部とみなし次のように書く.

$$\mathbf{H} = \{z = x + iy \in \boldsymbol{C}, y > 0\}.$$

このとき, 領域 Dを次のように定義する.

$$\boldsymbol{D} = \{w = u + iv \in \boldsymbol{C}, |w|^2 = u^2 + v^2 < 1\}$$

この $\boldsymbol{D}$を単位円盤と呼ぶ.

さらに次のような写像を定義する.

$$f(z) = \frac{i-z}{i+z}, g(w) = \frac{i(1-w)}{1+w}.$$

この写像により $\mathbf{H}$ から $\boldsymbol{D}$へ, $\boldsymbol{D}$から $\mathbf{H}$ へと互いにボロノイ図が写し合える.

5.2 擬球上のボロノイ図

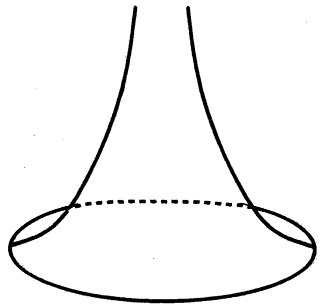

図 18: ユークリッド空間上の擬球

領域 $D = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 2\pi, v \ge 1\} \subset \mathbf{H}$ に対して次の関数を定義する.

$$f((u,v)) = \left(\frac{1}{v}\cos u, \frac{1}{v}\sin u, \log(v+w) - \frac{w}{v}\right)$$

ただし, $w = \sqrt{v^2-1}$とする. 写像 $f(D)$ は $\boldsymbol{R}^3$の曲面で擬球と呼ばれている. $\boldsymbol{R}^3$の計量が自然に擬球上に導入される. 領域 Dと $f(D)$ はリーマン多様体として同型である.

5.3 情報幾何

正規分布全体のなす空間を 2 次元のリーマン多様体とみなすために Fisher 計量をいれる. Fisher 計量とは, 次の行列で表される計量である.

$$g_{ij} = \int \frac{\partial}{\partial \xi^i} \log p(x;\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^j} \log p(x;\xi) \cdot p(x;\xi) dx$$

ただし,

$$p(x;\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \xi = [\mu, \sigma].$$

このような計量を入れたとき正規分布全体のなす空間は負の低曲率空間になる.([1]) この空間内での 2 点間の距離とは, 2 つの正規分布がどれだけ似ているかということを表す. つまり, 正規分布のボロノイ図が考えられ, それを利用し推定ができる.

参考文献

[1] 甘利 俊一, 長岡 浩司. 情報幾何の方法 岩波書店, 1993.

[2] D.Avis, 今井 浩, 松永 信介. 計算幾何学・離散幾何学. 朝倉書店, 1994.

[3] O.Devillers J.D.Boissonnat, A.Cérézo and M.Teilland. Output sensitive construction of the 3-D Delaunay trianglation of constraied sets of points. Technical Report 1415, INRIA, 1991.

[4] H.Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry.* Springer-Verlag, 1987. (邦訳 今井 浩, 今井 桂子. 組合せ幾何学のアルゴリズム. 共立出版, 1995.)

[5] P.J.Green and R.Sibson. Computing Dirichlet Tessellation in the Plane. *The Computer Journal*, 21:168–173, 1978.

[6] F.K.Hwang. An $O(n \log n)$ algorithm for rectikinear minimal spanning tree. *J.ACM*, 26:177–182, 1979.

[7] H.Imai, M.Iri, and K.Murota. Voronoi diagram in the laguerre geometry and its applications. *SIAM Journal on Computing*, 14:93–105, 1985.

[8] 今井 浩, 今井 桂子. 計算幾何学. 共立出版, 1994.

[9] 伊理 正夫 監修 / 腰塚 武志 編集. 計算幾何学と地理情報処理. 共立出版, 1986.

[10] S.Kobayashi and K.Nomizu. *Foundations of differential geometry.* INTERSCIENCE PUBLISHERS, 1969.

[11] D.T.Lee and C.K.Wong. Voronoi diagrams in l_1-(l_∞-) metrics with 2-dimensional storage applications. *SIAM J.Comput*, 9(1):200–211, 1980.

[12] S.Meiser J.D.Boissonnat and M.Teillaud. The space of spheres,a geometric tool to unify duality results on voroni diagram. Technical Report 1620, INRIA, 1992.

[13] K.Onishi and N.Takayama. Construction of Voronoi Diagram on the Upper Half-plane. *(preprint)*

[14] F.P.Preparata and M.I.Shamos. *Computational Geometory.* Springer-Verlag, 1985. (邦訳 浅野 孝夫, 浅野 哲夫. 計算幾何学入門. 総研出版, 1992.)

[15] M.I.Shamos and D.Hoey. Closest-point problems. In *Proceedings of 16th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 151–162, 1975.

[16] K.Sugihara and M.Iri. Construction of the Voronoi Diagram for one million Generators in Single-Precision Arithmetic. *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1471–1484, 1992.

[17] 杉原 厚吉. 計算幾何工学. 培風館, 1994.

[18] 徳山豪. はみだし幾何学. 岩波書店, 1994.