数理解析研究所講究録
935巻 1996年 53-60

主要型作用素に対する analytic hypoellipticity について.

名城大理工　松澤 忠人

擬微分方程式に対して, hyperfunction の空間で解析的準楕円性などについて考えたい。以下の方法は, 殆んどそのまゝ Schwartz 超関数や ultradistribution に対しても適用される。

以下 K は R^n のコムパクト部分集合とし, $A'[K]$ は K 内に support をもつ analytic functional の集合とする。

n 次元の熱核は

$$E(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right) & t > 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

ここで $x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ である。$u \in A'[K]$ に対し

$U(x,t) = u_y(E(x-y,t)) = \int E(x-y,t)u(y)dy$ は R^{n+1}_+ で熱方程式をみたし, 次の意味で u を初期条件とすることが判る:

$$(1) \qquad \lim_{t\to 0_+} \int_\Omega U(x,t)\varphi(x)dx = u(\varphi), \qquad \varphi \in A = A(\mathbb{C}^n).$$

但しここで, Ω は $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ なる任意の有界開集合である。主としてこのような極限操作を基にして考える。$u \in A'[K]$ に対して上記の defining function $U(x,t)$ は x について整関数である。

$WF_A(u)$ の同値な二つの定義を述べる:

(a) $(x_0,\xi_0)\in T^*(R^n)\setminus 0$ に対して $(x_0,\xi_0)\notin WF_A(u) \Longleftrightarrow$
x_0 の近傍 Ω と $-\xi_0$ の近傍 V 及び定数 $C, c>0$ が存在して

(2) $$|U(x+i\xi,t)| \leqq C\exp\left(\frac{\xi^2-c}{4t}\right),\quad t>0,\ x\in\Omega,\ \xi\in V.$$

(b) Bros-Iagolnitzer 条件:

(3) $$\left|u_y\left(\exp\left[-i\langle y,\xi\rangle-(\beta-y)^2\frac{|\xi|}{2}\right]\right)\right| \leqq C e^{-c|\xi|},\quad (\beta,\xi)\in\Gamma.$$

ここで Γ は (x_0,ξ_0) のある cone 近傍 $\subset T^*(R^n)\setminus 0$.

さて、解析的準楕円性の証明において基本となるのは、次のような局所表現公式である: $u\in A'[K]$, $x_0\in R^n$, $\varepsilon>0$ に対して

(4) $$u(x)=(2\pi)^{-n}\iint_{\substack{|\beta-x_0|<2\varepsilon\\ |\xi|\geqq B}} u_y\left(\exp\left[i\langle x-y,\xi\rangle-(\beta-y)^2\frac{|\xi|}{2}\right]\right)\left(\frac{|\xi|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}d\beta\, d\xi + w_\varepsilon(x),$$

ここで $w_\varepsilon(x)\in \mathcal{B}(\Omega)$, $(K\subset\Omega)$, $w_\varepsilon(x)$ は $|x-x_0|<\varepsilon$ で解析的.

(条件(3)と見比べていただきたい).

更に、$a(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times R^n_\xi)$ を解析的擬微分作用素 $a(x,D)$ の symbol とするとき、$u\in A'[K]$, $K\subset\Omega$, $x_0\in R^n$, $\varepsilon>0$ に対して

(5) $$a(x,D)u(x)=(2\pi)^{-n}\iint_{\substack{|\beta-x_0|<2\varepsilon\\ |\xi|\geqq B}} u_y\left(\exp\left[i\langle x-y,\xi\rangle-(\beta-y)^2\frac{|\xi|}{2}\right]\right)a(x,\xi)\left(\frac{|\xi|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}d\beta\, d\xi + w_\varepsilon(x).$$

(4)や(5)のような表現公式を道具として、種々の作用素の(解析的)準楕円性を証明することができる。

1例として1階の主要型擬微分作用素について述べる。

まず $N>1$, $N=n+1$, として $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in\mathbb{R}^N$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^N$ のように書くことにする。そして $0\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\hat{\Omega}=\Omega\times\{t;|t|<\mu\}$, $\mu>0$, とする。次の形の作用素を考える：

(6) $\quad L=D_t-\lambda(x,t,D_x)+\lambda_0(x,t,D_x)$,

ここで $\lambda(x,t,\xi)\in S^1_{1,0,1}(\hat{\Omega}\times R^n_\xi)$, $\lambda_0(x,t,\xi)\in S^0_{1,0,1}(\hat{\Omega}\times R^n_\xi)$

これ等の記号については例えば [18], [19] などをみられたい。

<u>仮定</u> 1. $(\xi_0,\tau_0)\in R^N\setminus\{0\}$ であって

(7) $\quad \tau_0=\lambda(0,0,\xi_0)$, $\quad \xi_0\neq 0$

とし, $\lambda(x,t,\xi)$ は ξ_0 の conic nbd $V'\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ において ξ に関して1次斉次とする。

<u>仮定</u> 2. $\lambda_0(x,t,\xi)$ は必ずしも ξ に関して斉次ではないが正定数 C_0, C_1, B が存在して

(8) $\quad |\lambda_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x,t,\xi)|\leqq C_0C_1^{|\alpha+\beta|}\alpha!\,\beta!\,|\xi|^{-|\alpha|}$, $\quad (x,t)\in\hat{\Omega}$,

$\xi\in V'$, $|\xi|\geqq B$.

仮定3.（Nirenberg-Treves 条件）．$a(x,t,\xi)=\mathrm{Re}\,\lambda(x,t,\xi)$，$b(x,t,\xi)=\mathrm{Im}\,\lambda(x,t,\xi)$ とするとき，$b(x,t,\xi)$ は次の方程式系の積分曲線（$\subset \hat{\Omega}\times V$）に沿って高々 $2l$ 次偶数次の零点をもつ：

$$(9)\qquad \frac{dx}{dt}=-\mathrm{grad}_\xi\, a(x,t,\xi),\qquad \frac{d\xi}{dt}=\mathrm{grad}_x\, a(x,t,\xi).$$

以上の条件の下にまず L の右パラメトリックス K を Treves [23] の手順で構成する：

$$(10)\qquad Ku(x,t)=(2\pi)^{-N}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle+i(t-s)\tau}K(x,t,\xi,\tau)u(y,s)\,dy\,ds\,d\xi\,d\tau,$$

$$u\in A'[\hat{K}],\quad \hat{K}\Subset\hat{\Omega}.$$

シンボル $K(x,t,\xi,\tau)$ は次の形で求まる：

$$(11)\qquad K(x,t,\xi,\tau)=\int_{-T}^{t}e^{i\varphi(x,t,t',\xi)-i\tau(t-t')}k(x,t,t',\xi)\,dt',$$

$$(x,t,\xi,\tau)\in\hat{\Omega}\times V.$$

ここで V は (ξ_0,τ_0) の $R^N\setminus\{0\}$ における conic nbd でその $\mathbb{R}^n$ への射影が V' となるものである。φ は複素数値の phase であるがよい性質をもっている。$k(x,t,t',\xi)$ は解析的なシンボルで次の形の評価をみたす：

$$(8)' \quad |k^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,t,t';\xi)| \leqq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!|\xi|^{-|\alpha|}, \quad (x,t,t') \in \tilde{\Omega}\times$$

$$\times\{|t'|<\mu\}, \quad \xi \in V', \quad |\xi| \geqq B|\alpha|.$$

以上のような準備の下に次の3項のような性質を導びくことができる．

(i)　作用素 $K(x,t,D_x,D_t)$ の核関数 $\mathcal{K}(x,t,y,s)$ は $(x,t) \neq (y,s)$ なる所で (x,t,y,s) について解析的．$((0,0,0,0)$ のある近傍で$)$.

(ii)　$K(x,t,D_x,D_t)$ と ${}^tK(x,t,D_x,D_t)$ はそれぞれ (ξ_0,τ_0), $(-\xi_0,-\tau_0)$ 方向に analytic pseudo-local である．

(iii)　$LK = \delta + Q$,

となって Q は (ξ_0,τ_0) 方向に analytic regularizer.

以上で ${}^tL$ の $(-\xi_0,-\tau_0)$ 方向への解析的準楕円性が示されたこととなる。

REFERENCES

[1] Aronszajn, N, Preliminary notes for "Traces of analytic solutions of the heat equation" and the traces of analytic solutions of the heat equation, Colloque International C.N.R.S. sur les équations aux dérivées partielles linéaires, 2-3(1973), 5-68.

[2] Bony, J.M., Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-1977, Expsé No.3.

[3] Bros, J. and D. Iagolnitzer, Support essentiel et structure analytique des distributions, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, Exposé No.18.

[4] Chen Dong and T. Matsuzawa, S-spaces of Gel'fand-Shilov and differential equations, to appear in Japan. J. Math. (1993).

[5] Gel'fand, I. M. and G. E. Shilov, Generalized functions, Vol.2, Academic Press, New York-London, 1968.

[6] Hanges, N., Propagation of analyticity along real bicharacteristics, Duke Math. J., Vol.48. No.1, (1981), 269-277.

[7] Hashimoto, S., Matsuzawa, T. and Y. Morimoto, Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey, Comm. in Part. Diff. Eqs., 8(12), (1983), 1277-1289.

[8] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

[9] Kashiwara, M., Kawai, T. and T. Kimura, Foundation of the

theory of algebraic analysis (in Japanese), Kinokuniya Shoten, Tokyo, 1980.

[10] Kawai, T. and T. Matsuzawa, On the boundary value of the solution of the heat equation,Publ. RIMS, Kyoto Univ. 25, (1989) 491-498.

[11] Kim, K. W., Chung, S. Y. and D. Kim, Fourier hyperfunctions as the boundary values of smooth solutions of the heat equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29(1993), 289-300.

[12] Komatsu, H., Ultradistributions I; Structure theorem and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20, (1973) 25-105.

[13] ———, Ultradistributions II; The kernel theorem and ultra-distributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 24, (1977), 607-628.

[14] ———, Introduction to the theory of generalized functions (in Japanese), Iwanami Shoten, Tokyo, 1978.

[15] Martineau, A., Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki 1960-1961.

[16] Matsuzawa, T., Gevrey hypoellipticity of a class of pseudo-differential operators, Tôhoku Math. Journ. 39(1987), 447-464.

[17] ———, Hypoellipticity in ultradistribution spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 34, No.3, (1987), 779-790.

[18] ———, A calculus approach to hyperfunctions I, Nagoya Math. J., Vol.108, (1987), 779- 790.

[19] ———, A calculus approach to hyperfunctions II, Trans. A. M. S. Vol.313, No.2, (1989), 619-654.

[20] ———, A calculus approach to hyperfunctions III, Nagoya Math.

J., Vol.118, (1990), 133-153.

[21] Sjöstrand, J., Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, Comm. in Part. Diff. Eqs., 5 (1), (1980), 41-94.

[22] ———, Singularités analytiques microlocales, Astérisque, 95, (1982), 1-166.

[23] Treves, F., Analytic-hypoelliptic partial differential equations of principal type, Comm. Pure Applied Math.,Vol. 24,(1971), 537-570.

[24] ———, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, Vol.1 and 2, Plenum Press, New York-London, 1980.