

コンパクト量子群について

福岡大学理学部 黒瀬 秀樹 (Hideki Kurose)

§1 序

最近数年の間にコンパクト量子群のほぼ同等な定義が C^* -代数、Hopf $*$ -代数のレベルで与えられた。構造に関することも含めて、大まかな議論は完結したように思われる。ここでは Hopf $*$ -代数レベルでのコンパクト量子群の定義からスタートし、その構造を議論することを目的とする。

定義 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \delta, \varepsilon, \kappa)$ が Hopf $*$ -algebra であるとは、

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &: \text{ a unital } * \text{-algebra} \\ \delta &: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \text{ (coproduct) a } * \text{-homomorphism} \\ &\quad \text{s.t. } (id \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes id) \circ \delta \\ \varepsilon &: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ (counit) a } * \text{-homomorphism} \\ &\quad \text{s.t. } (id \otimes \varepsilon) \circ \delta = (\varepsilon \otimes id) \circ \delta = id \\ \kappa &: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \text{ (antipode) an anti-homomorphism} \\ &\quad \text{s.t. } m \circ (id \otimes \kappa) \circ \delta = m \circ (\kappa \otimes id) \circ \delta = u \circ \varepsilon \\ &\quad \kappa \circ * \circ \kappa \circ * = id \end{aligned}$$

であるときをいう。ただし、 \otimes は代数的テンソル積、

$$\begin{aligned} m &\text{ は } \mathcal{A} \text{ の product } (m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ni a \otimes b \rightarrow ab \in \mathcal{A}) \\ u &\text{ は } \mathcal{A} \text{ の unit } (u : \mathbb{C} \ni \lambda \rightarrow \lambda 1 \in \mathcal{A}) \end{aligned}$$

である。

量子群という言葉は広い意味では、包絡 Lie 環の変形または群上の関数環の変形という 2 とおりの意味で用いられるが、ここでは我々は後者の意味で用いることにする。

例 G を有限群、 $F(G)$ を G 上の \mathbb{C} 値関数全体とすれば、 $F(G)$ は pointwise な積と $f^* = \bar{f}$ により unital $*$ -algebra。さらに

$$\delta(f)(s, t) = f(st)$$

$$\varepsilon(f) = f(e)$$

$$\kappa(f)(s) = f(s^{-1})$$

($f \in F(G)$, e は G の unit, $s, t \in G$) と定義すれば、 $F(G \times G) \cong F(G) \otimes F(G)$ より、 $(F(G), \delta, \varepsilon, \kappa)$ は Hopf $*$ -algebra。

例 G がコンパクト群のとき、 G の有限次元表現の座標関数から生成される $C(G)$ の部分空間を \mathcal{A} とすれば、上の例のように定義される $\delta, \varepsilon, \kappa$ で $(\mathcal{A}, \delta, \varepsilon, \kappa)$ は Hopf $*$ -代数となる。

ここで議論する Hopf $*$ -代数は、上の例における群 G に付随した Hopf $*$ -代数を何らかの意味での変形することにより得られたもの、と理解しておく。扱う Hopf $*$ -代数は一般には可換でもないし ($m \circ \sigma \neq m$)、余可換でもない ($\sigma \circ \delta \neq \delta$)。 ($\sigma: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ni a \otimes b \rightarrow b \otimes a \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$) Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} に対して、あたかも群らしきものが下にあり、 \mathcal{A} はその上の関数環の部分環であるようなイメージを持って議論をすすめることにする。

定義 \mathcal{A}' を Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} の algebraic dual とする。 $\varphi \in \mathcal{A}'$ が left (right) invariant であるとは、 φ が

$$(id \otimes \varphi)(\delta(a)) = \varphi(a)1 \quad ((\varphi \otimes id)(\delta(a)) = \varphi(a)1) \text{ for } a \in \mathcal{A}$$

を満たすときをいう。

これに関しては次のことが判っている。

事実 1) Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} 上の non-trivial な left (or right) invariant functional はあれば定数倍を除いて unique (c.f. [0])、またある意味で faithful (c.f. [7])。

2) Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} 上の non-trivial, left inv. $\varphi \in \mathcal{A}'$ が positive ($\varphi(a^*a) \geq 0, a \in \mathcal{A}$) ならば、

$$\begin{aligned} \varphi \text{ は right inv. でもある、} \varphi(1) &\neq 0 \\ \varphi \text{ は faithful } (\varphi(a^*a) = 0 &\Rightarrow a = 0) \end{aligned}$$

問題 Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} 上の両側 inv. $\varphi \in \mathcal{A}'$ は自動的に positive か？

定義 Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} が、

$$\text{non-trivial, positive, (両側) invariant } h \in \mathcal{A}'$$

をもつとき、 \mathcal{A} を compact, h を \mathcal{A} 上の Haar measure という。以下 \mathcal{A} 上の Haar measure h に対して $h(1) = 1$ を仮定する。

上に定義したコンパクト Hopf $*$ -代数がタイトルにあるコンパクト量子群の意味するものである。

コンパクト Hopf $*$ -代数の議論に入る前に、Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} に対して

$$\mathcal{A}' \text{ の代数と } \mathcal{A} \text{ の表現}$$

について述べておこう。

Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} の dual \mathcal{A}' には自然に積が定義できる

$$\varphi * \psi \equiv (\varphi \otimes \psi) \circ \delta \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{A}')$$

この積を convolution という。 \mathcal{A}' はこの積の下で unital algebra となる。(counit ε が \mathcal{A}' の単位元)

\mathcal{A} が Hopf $*$ -代数ならば、 \mathcal{A}' にはさらに 2 種類の involution が定義できる。

$$\varphi^\sharp = \varphi^* \circ \kappa, \quad \varphi^\flat = \varphi^* \circ \kappa^{-1} \quad (\varphi \in \mathcal{A}')$$

ただし $\varphi^*(a) \equiv \overline{\varphi(a^*)}$ ($a \in \mathcal{A}$) である。この 2 種類の involution の下で \mathcal{A}' は $*$ -algebra となる。 \sharp, \flat をそれぞれ left, right involution と呼ぶことにする。

(注) $\varphi^\sharp = \varphi^\flat$ ($\varphi \in \mathcal{A}'$) $\Leftrightarrow \kappa$ は $*$ -invariant $\Leftrightarrow \kappa^2 = id$

φ^* は involution ではない。 $((\varphi * \psi)^* = \varphi^* * \psi^*)$

Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} に対して、あたかも下に群らしきものがあるとのイメージを持ったとき、群のユニタリー表現に相当するものが次で定義される。

定義 Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} に対して、 $\{u_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \subset \mathcal{A}$ が \mathcal{A} の (n -dim.) unitary corepresentation であるとは、

$$\begin{aligned} \delta(u_{ij}) &= \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj} \\ \sum_{k=1}^n u_{ik} u_{jk}^* &= \sum_{k=1}^n u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij} 1 \end{aligned}$$

が成立するときをいう。 $U \equiv (u_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ も \mathcal{A} の unitary corep. という。

(注) \mathcal{A} の unitary corep. $U = (u_{ij})$ に対して、antipode κ の axiom より $\kappa(u_{ij}) = u_{ji}^*$ を得る。

unitary corep. $\{u_{ij}\} \subset \mathcal{A}$ または対応する $U = (u_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ が既約であるとは

$$\{T \in M_n(\mathbb{C}) \mid (T \otimes id)U = U(T \otimes id)\} = \mathbb{C}1$$

であるときをいう。

§2. コンパクト Hopf $*$ -代数に対する convolution algebra

以下、 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \delta, \varepsilon, \kappa)$ を Hopf $*$ -代数、 h を \mathcal{A} 上の Haar measure とする。 \mathcal{A} に内積

$$(a, b) = h(b^* a) \quad \text{for } a, b \in \mathcal{A}$$

を考え、 \mathcal{A} の (\cdot, \cdot) による完備化を \mathcal{H}_h とかくことにする。

\mathcal{A} 及び \mathcal{A}' の algebra としての表現が次のように定義される。

$$\begin{aligned} \pi(a)b &= ab & a, b \in \mathcal{A} \\ \lambda(\varphi) &= (id \otimes \varphi) \circ \delta & \varphi \in \mathcal{A}' \\ \varrho(\varphi) &= (\varphi \otimes id) \circ \delta & \varphi \in \mathcal{A}' \end{aligned}$$

このとき $\pi(a), \lambda(\varphi), \varrho(\varphi)$ ($a \in \mathcal{A}, \varphi \in \mathcal{A}'$) は \mathcal{H}_h で dense な \mathcal{A} を定義域に持ち、 \mathcal{A} を不変にする閉作用素である。

$$\pi(a^*) \subset \pi(a)^*, \quad \lambda(\varphi^\#) \subset \lambda(\varphi)^*, \quad \varrho(\varphi^\#) \subset \varrho(\varphi)^*$$

(注) 結果的には各 $\pi(a)$ ($a \in \mathcal{A}$) は \mathcal{H}_h 上の有界作用素に拡大できるがこれは trivial なことではない。

また

$$\begin{aligned} \pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\ \lambda(\varphi * \psi) &= \lambda(\varphi)\lambda(\psi) \\ \varrho(\varphi * \psi) &= \varrho(\psi)\varrho(\varphi) \end{aligned}$$

($a, b \in \mathcal{A}, \varphi, \psi \in \mathcal{A}'$) が定義より明らかに成立する。

さて $\xi \in \mathcal{H}_h$ に対して

$$\varphi_\xi(a) = (\xi, a^*) \quad a \in \mathcal{A}$$

で $\varphi_\xi \in \mathcal{A}'$ を定義すると、 $\varphi \in \mathcal{A}'$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_\xi \quad \text{for some } \xi \in \mathcal{H} \\ \Rightarrow \varphi &\text{ は } L^2\text{-bounded i.e.} \\ |\varphi(a^*)| &\leq \lambda \|a\| \quad (a \in \mathcal{A}) \text{ for some const. } \lambda \end{aligned}$$

L^2 -bounded $\varphi_\xi, \varphi_\eta \in \mathcal{A}'$ に対して

$$\varphi_\xi * \varphi_\eta \text{ はまた } L^2\text{-bounded,}$$

従って

$$\varphi_\xi * \varphi_\eta = \varphi_\zeta \text{ for some } \zeta \in \mathcal{H}_h$$

この ζ を $\xi * \eta$ とかくことにする。

事実 1) \mathcal{H}_h は積 $*$ と Hilbert space norm の下で Banach 環

2) \mathcal{A} は \mathcal{H}_h の両側イデアル、特に $\mathcal{A} * \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$

3) $a \in \mathcal{A}$ に対して $a^\sharp = \kappa(a)^*$, $a^b = \kappa(a^*)$ と定義すると

$$\varphi_a^\sharp = \varphi_{a^\sharp}, \quad \varphi_a^b = \varphi_{a^b},$$

特に $a \rightarrow a^\sharp, a \rightarrow a^b$ はそれぞれ $*$ を積とする algebra \mathcal{A} の involution となる。

$*$ を積とし、 \sharp (または b) を involution とする $*$ -algebra \mathcal{A} を Hopf $*$ -algebra \mathcal{A} と区別するため、 $\tilde{\mathcal{A}}$ とかき、これを left (または right) convolution algebra ということにする。同一視 $a \in \mathcal{A} \leftrightarrow \varphi_a \in \mathcal{A}'$ により left (right) convolution algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ は left (right) involution を持つ dual $*$ -algebra \mathcal{A}' の subalgebra と考えることができる。

事実 1) $\varepsilon(b^\sharp * a) = (a, b) = \varepsilon(a * b^\flat)$ ($a, b \in \tilde{\mathcal{A}}$) が成立

(ε は $\tilde{\mathcal{A}}$ 上の Plancharel weight)

2) $\tilde{\mathcal{A}}^2$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ で dense。従って left (right) convolution algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ は \mathcal{H}_h の内積に関して left (right) Hilbert algebra である。

3) $\hat{\pi}(\xi)\eta = \xi * \eta = \hat{\pi}'(\eta)\xi$ と定義すると $\hat{\pi}(\tilde{\mathcal{A}})'' = \hat{\pi}'(\tilde{\mathcal{A}})''$ 。

(注) anti-linear operator $a \rightarrow a^\sharp$ ($a \rightarrow a^b$) in \mathcal{H}_h の閉包を $S(F)$ とかけば、定義域 $\mathcal{D}(S)$ ($\mathcal{D}(F)$) は achieved left (right) Hilbert algebra となる。また $S = F^*$, $F^* = S$ が成立。

コンパクト Hopf $*$ -代数に対する convolution algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ の (簡単に判るが) 顕著な性質は

$$\hat{\pi}(a), \hat{\pi}'(a) \quad (a \in \mathcal{A}) \text{ が finite rank operators となる}$$

ことである。これより次の定理が示せる。

定理 Banach algebra \mathcal{H}_h の minimal closed two sided ideal からなる族 $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ が存在して

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h &= \sum_{\gamma \in \Gamma}^{\oplus} A_\gamma, \quad A_\gamma \cong \mathcal{M}(n_\gamma, \mathbb{C}) \\ \tilde{\mathcal{A}} &= \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \quad (\text{algebraic direct sum}) \end{aligned}$$

さて各 $A_\gamma \cong \mathcal{M}(n_\gamma, \mathbb{C})$ 上の trace τ_γ に対して、

$$\varepsilon(a) = \tau_\gamma(h_\gamma * a) \quad a \in A_\gamma$$

を満たす $h_\gamma = h_\gamma^\sharp \in A_\gamma$ 、さらに h_γ を対角化する matrix unit $\{u_{ij}\}$

$$e_{ij}^\gamma * e_{kl}^\gamma = \delta_{jk} e_{il}^\gamma, \quad e_{ij}^{\gamma^\sharp} = e_{ji}^\gamma, \quad h_\gamma = \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_i e_{ii}^\gamma$$

がとれる。

$$\begin{aligned} u_{ij}^\gamma &= h_\gamma^{-\frac{1}{2}} * e_{ij}^\gamma * h_\gamma^{-\frac{1}{2}} \quad (i, j = 1, \dots, n_\gamma) \\ U^\gamma &= (u_{ij}^\gamma) \in \mathcal{M}(n_\gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A} \end{aligned}$$

とおけば U^γ は \mathcal{A} の既約 unitary corepresentation となる。従って Peter-Weyl の定理に相当する次の定理が成立。

定理 Hopf $*$ -代数 \mathcal{A} に対して次は同値

- (i) \mathcal{A} はコンパクト
- (ii) 有限次元既約な \mathcal{A} の unitary corep. の族 $U^\gamma = (u_{ij}^\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) が存在して

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \text{Span} \{u_{ij}^\gamma\}_{i,j}$$

(注) Dijkhuizen-Koornwinder [1] は余代数の基本定理を用いて上の事実を示している。

§3. Remarks

1. コンパクト Hopf $*$ -代数 $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \text{Span} \{u_{ij}^\gamma\}_{i,j}$ に対して、

$$\begin{aligned} \|\pi(u_{ij}^\gamma)b\|^2 &= h(b^*u_{ij}^{\gamma*}u_{ij}^\gamma b) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_\alpha} h(b^*u_{kj}^{\gamma*}u_{kj}^\gamma b) = \|b\|^2. \end{aligned}$$

任意の $a \in \mathcal{A}$ は $\{u_{ij}^\gamma\}$ の一次結合で書けるから、 $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_h)$ 。

$\pi(\mathcal{A})$ を作用素ノルムにより完備化して得られる C^* -代数を $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ と書く。このとき \mathcal{A} の coproduct δ は連続に

$$\Phi: \overline{\pi(\mathcal{A})} \rightarrow \overline{\pi(\mathcal{A})} \otimes \overline{\pi(\mathcal{A})}$$

に拡張でき、 Φ は C^* -代数 $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ の coproduct となる。さらに

$(\overline{\pi(\mathcal{A})} \otimes 1)\Phi(\overline{\pi(\mathcal{A})})$, $(1 \otimes \overline{\pi(\mathcal{A})})\Phi(\overline{\pi(\mathcal{A})})$ は $\overline{\pi(\mathcal{A})} \otimes \overline{\pi(\mathcal{A})}$ で dense。従って $(\overline{\pi(\mathcal{A})}, \Phi)$

は Woronowicz の意味でのコンパクト量子群となる。

逆に Woronowicz の意味でのコンパクト量子群があれば、その dense な subalgebra でコンパクト Hopf $*$ -代数となるものがとれる。c.f. [6]

2. $\tilde{\mathcal{A}}$ を left convolution algebra for compact Hopf $*$ -algebra \mathcal{A} とする。 $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}'$ と考え、 \mathcal{A} と $\tilde{\mathcal{A}}$ の pairing を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とかく。 $a \in \tilde{\mathcal{A}}$ に対して

$$\langle x \otimes y, \hat{\delta}(a) \rangle = \langle xy, a \rangle \quad x, y \in \mathcal{A}$$

で $\hat{\delta}(a)$ を定義すると、

$$\hat{\delta}: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow M(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}})$$

は $*$ -homomorphism で、 $\tilde{\mathcal{A}}$ の coproduct を与える。ただし $M(\cdot)$ は multiplier algebra を表わし、 $\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M(n_\gamma, \mathbb{C})$ より

$$M(\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}}) = \prod_{\alpha, \beta \in \Gamma} M(n_\alpha, \mathbb{C}) \otimes M(n_\beta, \mathbb{C}).$$

さらに

$$\begin{aligned} a \otimes b &\longrightarrow \hat{\delta}(a)(1 \otimes b) \\ a \otimes b &\longrightarrow (a \otimes 1)\hat{\delta}(b) \end{aligned}$$

は $\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}}$ 上の bijection となる。従って $(\tilde{\mathcal{A}}, \hat{\delta})$ は multiplier Hopf $*$ -algebra となり、Van Daele [8] の意味で discrete quantum group. ([2] も参照) 実は、逆に multiplier Hopf $*$ -algebra としての discrete quantum group から compact quantum group (compact Hopf $*$ -algebra) を構成することもでき、両者の間の双対性が成立。極最近、discrete, compact quantum group を特別な場合として含む multiplier Hopf $*$ -algebra のクラスの中で group dual に相当する双対性が成立することが Van Daele により示された。

文献

- [0] Abe, ホップ代数, 岩波書店
- [1] Dijkhuizen-Koornwinder, CQG algebras : A direct algebraic approach to compact quantum groups, *Letters. Math. Phys.* 32, 315-330 (1994).
- [2] Effros-Ruan, Discrete quantum groups, I., preprint (1993), to appear in *Internat. J. Math.*
- [3] Koornwinder, General compact quantum groups, a tutorial, preprint (1994).
- [4] K-Nakagami, Compact Hopf $*$ -algebras, quantum enveloping algebras and dual Woronowicz algebras, in preparation.
- [5] Masuda-Nakagami, A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 30, 799-850 (1994) .
- [6] Woronowicz, Compact quantum groups, preprint (1992).
- [7] Van Daele, Private communications.
- [8] ———, Discrete quantum groups, preprint (1993).
- [9] Yamagami, On unitary representations of compact quantum groups, preprint (1993).