数理解析研究所講究録
937巻 1996年 7-16

Schrödinger方程式のsmoothing効果と測地流の挙動について

京大理　土居　伸一（Doi, Shin-ichi）

1. 序

(M, g) をリーマン多様体とする。ただし、リーマン多様体といえば、C^∞級で、完備連結で、可算基をもつものを表すことにする。$\Delta = \Delta_g$ を Laplace-Beltrami 作用素とすると、M は完備なので $\Delta|C_0^\infty(M)$ は本質的自己共役である。その自己共役拡張も Δ で表すことにする。このとき C_0 ユニタリ群 $e^{it\Delta}$ のもつある種の smoothing 効果と、測地流の挙動との関係を調べたい。特に、いわゆる non-trapping 条件がくずれるときを問題にしたい。

次の例を通してどういう smoothing 効果を対象とするかを説明する。

<u>例 I</u>. (M, g) を (i) ユークリッド空間、又は (ii) 定曲率 $-\rho^2$ $(\rho > 0)$ の双曲空間とする：

(i)　$M = \mathbb{R}^d$,　$g = |dx|^2$

(ii) $(M,g) \cong (\mathbb{R}^{d-1}\times(0,\infty),\ (\rho x_d)^{-2}|dx|^2)$

$$\cong (\{|x|<\rho\},\ (2/(\rho^2-|x|^2))^2|dx|^2).$$

このとき次の写像は連続である：

(*) $L^2(M) \ni u \longmapsto e^{it\Delta}u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^{1/2}_{loc}(M))$.

より正確には (*) を $C_0^\infty(M)$に制限したものが、$L^2(M)$ 上の連続線型作用素に拡張できる。従って a.e. $t\in\mathbb{R}$ に対して $e^{it\Delta}u \in H^{1/2}_{loc}(M)$ となる。これは一つの smoothing 効果を表わしている。 ▨

この報告では (*) の連続性を $e^{it\Delta}$ の smoothing 効果と呼ぶ。これは non-trapping 条件と関係がある。

<u>例 2</u>. (M,g)を例1のものとする。hを別のリーマン計量で、あるコンパクト集合の外で $g=h$ が成立ものとする。このとき

$$L^2(M)\ni u \longmapsto e^{it\Delta_h}u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H^{1/2}_{loc}(M))$$

が連続となるための必要十分条件は、hに対する測地線で、全時間$t\in\mathbb{R}$にわたってコンパクト集合にとどまるようなものがないことである。（すなわち non-trapping条件が成立することである。） ▨

以上の例で問題点が少し明らかになったであろう。次の節で (M,g) に対し、単位余接束 S^*Mの部分集合 $S(g)$ を定義する。この集合 $S(g)$ は、smoothing 効果がくずれる場所を

示している。この構造を調べるのが本報告の目的である．

Notation.

(M, g)：リーマン多様体，$(x^1, \dots, x^d)$：局所座標系，

$\Delta = \Delta_g = \sqrt{G}^{-1} \partial_j g^{jk} \sqrt{G} \partial_k$：Laplace-Beltrami 作用素，

$g = g_{jk} dx^j dx^k$，$(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$，$G = \det(g_{jk})$，

$\mu = \sqrt{G}\, dx$：体積要素，

$p(x, \xi) = g^{jk}(x) \xi_j \xi_k = \sigma_p(-\Delta) \in C^\infty(T^*M)$，

$q(x, \xi) = \sqrt{p(x, \xi)} \in C^\infty(T^*M \setminus 0)$，

$H_q = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial q}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$：$q$ の Hamilton ベクトル場，

（H_q は $T^*M \setminus 0$ 上のベクトル場），

Φ_t：H_q-flow in $T^*M \setminus 0$，

（$\frac{d}{dt} \Phi_t(z) = H_q(\Phi_t(z))$，$z \in T^*M \setminus 0$；$\Phi_0 = I_{T^*M \setminus 0}$），

$S^*M = \{ z \in T^*M ;\ p(z) = 1 \}$，

$\Psi^m(M)$：M 上の m 階 classical pseudo-differential operator 全体，

$\sigma_p(A)$：$A \in \Psi^m(M)$ の主表象，

$\Psi^m_{cpt}(M)$：distribution kernel がコンパクトな台をもつ $\Psi^m(M)$ の元全体。

2. $S(g)$ の定義と一般的性質

<u>定義 2.1</u>　$z_0 \in S^*M$ に対し、$e^{it\Delta}$ が z_0 で smoothing 効果をもつとは、次の条件 (*) が成り立つことと定める：

(*) ある $A \in \Psi^{1/2}_{\varphi t}(M)$ があって $\sigma_p(A)(z_0) \neq 0$ でかつ、

$$L^2(M) \ni u \longmapsto Ae^{it\Delta}u \in L^2_{loc}(\mathbb{R};\ L^2(M))$$

が連続である。

さらに、$e^{it\Delta}$ が smoothing 効果をもたないような点 z_0 全体を $S(g)$ で表す。

<u>定理 2.2</u>　$S(g)$ は閉集合で、Φ_t-不変である (i.e. $\Phi_t S(g) = S(g)$, $t \in \mathbb{R}$)。

$S(g)$ はどのような点を含むであろうか。それを述べる準備として次の定義をおく。

<u>定義 2.3</u>　S^*M の開集合 $U (\neq \phi)$ に対し、

$$t_U = \sup_{z \in S^*M} m\{t \in \mathbb{R};\ \Phi_t(z) \in U\} \in (0, \infty]$$

とおく。さらに $S_0(g)$ を次のように定める：

$$S_0(g) = \left\{ \begin{array}{l} z \in S^*M;\ \text{その任意の開近傍}\ U\ \text{に対して} \\ \qquad t_U = \infty \end{array} \right\}$$

ただし m は一次元 Lebesgue 測度を表す。

(S^*M, Φ_t) を力学系とみたとき、極限点，非遊走点が定義できる。$z, z' \in S^*M$ に対し、z' が z の極限点であるとは、ある実数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、$|t_n| \to \infty$, $\Phi_{t_n}(z) \to z'$ $(n \to \infty)$ が成立することを言う。$z \in S^*M$ が遊走点であるとは、ある z の近傍 U と $T>0$ があって、$\Phi_t(U) \cap U = \phi$ $(t \geq T)$ が成立することを言う。遊走点でない点を非遊走点という。

<u>命題 2.4</u>　$S_0(g)$ は閉集合で、Φ_t-不変である。さらに
{極限点全体} $\subset S_0(g) \subset$ {非遊走点全体}。

<u>注意</u>　$\{\Phi_t(z) ; t \geq 0\}$ 又は $\{\Phi_t(z) ; t \leq 0\}$ が相対コンパクトならば z は極限点をもつ。とくにある $T>0$ があって $\Phi_T(z) = z$ となるとき (i.e. z が周期点のとき) z の極限点全体は $\{\Phi_t(z) ; t \in \mathbb{R}\}$ に一致する。

さて、$S(g)$ にもどると：

<u>定理 2.5</u>　$S_0(g) \subseteq S(g)$。

<u>系 2.6</u>　$\mathrm{Vol}(M) < \infty$ ならば $S(g) = S_0(g) = S^*M$.

<u>系 2.7</u>　$S(g)$ がコンパクトであると仮定すると、

$$S_{\lim}(g) \subset S(g) \subset S_{\mathrm{trap}}(g)$$

$$\nu(S_{\mathrm{trap}}(g) \setminus S_{\lim}(g)) = 0$$

が成立する。ただし

$S_{lim}(g) = \{$ 極限点全体 $\}$

$S_{trap}(g) = \{ z \in S^*M ;\ \overline{\{\Phi_t(z)\}_{t\in\mathbb{R}}}$ はコンパクトである $\}$.

ν : Φ_t－不変な S^*M 上の"自然な"測度。

注意 $\sigma = \sum_{j=1}^{d} d\xi_j \wedge dx^j$ を T^*M 上の canonical 2-form とし、$(d!)^{-1}\sigma^d = dp \wedge \theta$ なる $(2d-1)$-form θ をとると、$\theta | S^*M$ は θ のとり方によらずにきまり、S^*M 上の体積要素 ν を定める。

系 2.8 $S(g)$ がコンパクトならば次は同値である：

(i) $S(g) = \phi$。

(ii) $S_{trap}(g) = \phi$.

(iii) すべての時間にわたってコンパクト集合にとどまるような測地線は存在しない。(nontrapping 条件).

3. $S(g)$ がコンパクトになる場合

$S(g)$ を上から評価するための簡単な補題を述べる

補題 3.1 $|\mathrm{grad}\, f|$, Δf, $\Delta^2 f \in L^\infty(M)$, $\mathrm{Hess}\, f \geq 0$ on M をみたす $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ が存在すれば、

$S(g) \subset \{ z \in S^*M ;\ \mathrm{Hess}\, f\langle \theta(z), \theta(z) \rangle = 0 \}$

が成りたつ。ただし $\theta : T^*M \to TM$ は $g\langle \theta(z), \cdot \rangle = z(\cdot)$ で定義される写像である。

<u>注意</u> ∇ を Levi-Civita 接続とするとき、$\mathrm{Hess}\, f$ は $(0,2)$ 対称テンソル場で、

$$\mathrm{Hess}\, f\langle X, Y\rangle = XYf - (\nabla_X Y)f \quad , \quad X, Y : \text{ベクトル場}$$

により定義される。

<u>Case I</u> $M = \mathbb{R}^d$, $g = g_{jk}\, dx^j dx^k$ の場合を考える。
次の条件を考えよう：

(A1) $\delta I \leqq (g_{jk}) \leqq \delta^{-1} I$ on $\mathbb{R}^d$, $({}^{\exists}\delta > 0)$.

(A2) $\partial^\alpha g_{jk} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ for $|\alpha| \leqq 3$.

(A3) $\partial_i g_{jk}(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ as $|x| \to \infty$, $({}^{\exists}\varepsilon > 0)$.

(A2)′ $\partial^\alpha g_{jk} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ for $|\alpha| \leqq N$ $({}^{\exists}N)$

(A3)′ $\partial_i g_{jk}(x) = o(|x|^{-1})$ as $|x| \to \infty$.

<u>命題 3.2</u> (A1)(A2)(A3) 又は (A1)(A2)′(A3)′ を仮定すると $S(g)$ はコンパクトである。

<u>Case II.</u> (M, g_0) を例 I の双曲空間とする。g を M 上の（別の）リーマン計量とする。次の条件を考えよう：

(A1) $\delta \leqq g/g_0 \leqq \delta^{-1}$ on M $({}^{\exists}\delta > 0)$

(A2) $|(\nabla_{g_0})^j g| \in L^\infty(M)$ $j = 1, 2, 3$.

(A3) $E(X, Y) = \nabla_{g\,X} Y - \nabla_{g_0\,X} Y$ で $(1,2)$ テンソル

場Eを定めるとき、$|E| = O(r^{-1-\epsilon})$ as $r\to\infty$.
ただし、$r=\mathrm{dist}(\cdot, x_0)$, x_0はMのある点、distはg_0よりきまる距離関数とする。さらに∇_g, ∇_{g_0}はg, g_0に応じたLevi-Civita接続を表す.

命題3.3 (A1)(A2)(A3)を仮定するとS(g)はコンパクトである。

Case III. Nを(境界のないC^∞)多様体とし、Mをその相対コンパクト開集合とする。さらに$\bar{M}$は、C^∞級の境界をもつ、Nの正規部分多様体となるものとする。このとき

$$M=\{\phi>0\},\quad \partial M=\{\phi=0\},\quad d\phi\neq 0 \text{ on } \partial M$$

なる$\phi\in C^\infty(N,\mathbb{R})$がとれる。さらに

$$\partial M = K_1\cup\cdots\cup K_n$$

と連結成分に分解しよう。M上のリーマン計量gが各K_jの近くで次の形をしているとする:

(i) $g=\phi^{-2}h_j$ (ただしh_jはN上のリーマン計量である。)
又は
(ii) $x_j^* g = t^{-4}dt\otimes dt + t^{-2}w_j$ (ただしw_jはK_j上のリーマン計量, $x_j:(-\epsilon,\epsilon)\times K_j\to N$は中への$C^\infty$級微分同相写像で、$\phi(x_j(t,k))=t$, $x_j(0,k)=k$をみたすものとする。)

命題3.4 以上の条件の下、S(g)はコンパクトである.

注意 Case II になるってgの摂動を考えることができる。又、(i)(ii)をもう少し一般化することも可能である。

4. 関連した仕事

分散型偏微分方程式の(広い意味での)smoothing効果を調べた仕事はたくさんある。例えば[Kt], [HNT1,2], [Ve] [Sj], [CS1,2], [Ym], [KY], [Yj] [BD], [Be], [St]を参照されたい。[St]以外は、定数係数の主要部をもつ方程式を対象としている。[St]では遠方で定数係数に近くなるような主要部をもつ分散型偏微分方程式に対し non-trapping 条件の下、種々の smoothing 効果が調べられている。なお、以上すべて $\mathbb{R}^d$ 上の方程式を考えている。

本報告では、non-trapping 条件がくずれたときに smoothing 効果が破れる状況を $S(g)$ の構造を通してみることに主眼があり、先行する仕事とは視点が異なっている。

むしろこの研究は、Schrödinger型方程式のCauchy問題と密接な関係がある。例えば[Mi], [Ic], [Do], [Kj]を参照されたい。

References

[Be] M. Ben-Artzi, *Global estimates for the Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **107** (1992), 362–368.

[BD] M. Ben-Artzi and A. Devinatz, *Local smoothing and convergence properties of Schrödinger type equations*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 231–254.

[CS1] P. Constantin and J. C. Saut, *Local smoothing properties of disipersive equations*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.

[CS2] ________________, *Local smoothing properties of Schrödinger equations*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 791–810.

[Do] S. Doi, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of the solutions*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994), 319–328.

[Ga] M. P. Gaffney, *The harmonic operators for exterior differential forms*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 48–50.

[HNT1] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Math Z. **192** (1986), 637–650.

[HNT2] ________________, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **71** (1987), 218–245.

[Hö] L. Hörmander, "The analysis of linear partial differential operators, I, III," Springer-Verlag 1983, 1985.

[Ic] W. Ichinose, *On L^2 well posedness of the Cauchy problem for Schrödinger type equations on the Riemannian manifold and the Maslov theory*, Duke Math. J. **56** (1988), 549–588.

[Kj] K. Kajitani, *The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients*, preprint.

[Kt] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in Appl. Math. Adv.in Math. Supplementary Studies **18** (1983), 93–128.

[KY] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smoothing operators and the associated smoothing property*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[Ku] H. Kumano-go, "Pseudo-diffential operators," the MIT Press, 1981.

[Mi] S. Mizohata, "On the Cauchy problem," Academic Press, 1986.

[RS] M. Reed and B. Simon, "Methods of mordern mathematical physics, II," Academic Press, 1975.

[Sj] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. **55** (1987), 699–715.

[St] W. Strauss, *Smoothing of dispersive waves*, Journées, Équations aux derivées partielles (Saint Jean de Monts, 1993), Exp. No. XIV, 5pp, École polytechnique, Palaiseau, 1993.

[Ve] L. Vega, *Schrödinger equations: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 874–878.

[Yj] K. Yajima, *On smoothing property of Schrödinger propagators*, Lecture Notes in Math. 1450, in "Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations," Springer-Verlag, 1990, pp. 20–35.

[Ym] M. Yamazaki, *On the microlocal smoothing effect of dissipative partial differenyial equations, I: second-order linear equations*, in "Algebraic analysis, vol.II," Academic Press, 1988, pp. 911–926.