数理解析研究所講究録
938 巻 1996 年 108-113

いたるところ微分不可能なアトラクター

津田　一郎　北大 ·理 ·数学
(Ichiro Tsuda)

§1. 導入

脳の理解のための解釈学的方法[1)]に，強力な記述力をもちうる典型的なメタファーモデルを要求する．モデルは，なんらかの不可能問題を内包する形で構成されることが望ましい．結局，いかにしてデーモンをモデルに抽入するかという問題になる．このような文脈において一つの可能なモデルが得られたので報告する[2)]．結合ニューロンモデルにいたるところ微分不可能なアトラクタが現われる．ここではニューロンのモデルはニューロンの過去の状態を一つの変数にくりこんだ形のアナログモデルであり，状態更新は離散時間毎に行われるとする．まず，一個のカオスニューロンが一個の安定ニューロンを駆動する場合，二次元相空間内で，不安定多様体が交差するという現象を得る．これは，この二次元差分系が可逆でないことからの帰結である．しかし，この場合，交差は，いたるところで起こるように見受けられる．

次に，安定な興奮性ニューロンと安定な抑制性ニューロンの二体が相互作用している系に対して，一個のカオスニューロンがそれぞれを駆動しているというモデルを考える．この状況は，実際の脳の中でも十分起こりうることであろう．

このモデルの示す現象は基本的には,"Strange Nonchaos" あるいは" いたるところ微分不可能なアトラクタ" のクラスに属するが，そのために力学に新しい性質が内包されていることがわかる．特にカントール集合上に制約された新しい力学が内包されていることが強く示唆される結果を得た．このことを理解するために，まず準備としていくつかの基本概念を説明し，その後にこの主題の説明を行うことにする．

§2. Weierstrass 関数

Weierstrass 関数は，連続でいたるところ微分不可能な関数であり，次式で与えられる．

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \ \cos(b^n \pi x). \tag{1}$$

Weierstrass は，$0 < a < 1$ で，b は $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ をみたす奇数である時 $W(x)$ はこの性質をもつことを示した．その後 Hardy は，$0 < a < 1$ で $ab \geq 1$ なら $W(x)$ は有界な微係数をもたないことを示し，畑は，$0 < a < 1$ で，b は，$ab \geq 5.603\cdots$ をみたす実数であれば無限大をこめて微分係数をもたないことを示した．また，類似の関数に，次式の高木関数がある．

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n d(x, Z), \tag{2}$$

ここで $d(x, Z)$ は x に最も近い整数までの距離である．詳しくは，文献 (3),(4) とその中の文献を参照のこと．

最も簡単な Weierstrass 型の関数は，Katsuura によって与えられた.[5)]

ユークリッド距離をもつ領域 $X = [0, 1] \times [0, 1]$ 上で，縮小写像 $w_i (i = 1, 2, 3)$ を次で定義する．

$$w_i : X \longrightarrow X (i = 1, 2, 3).$$

$$w_1(x,y) = (\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}),$$
$$w_2(x,y) = (\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}), \tag{3}$$
$$w_3(x,y) = (\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}).$$

この写像は三つの不動点 $(0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1,1)$ をもつ．$F(X)$ を，Xのすべての非空の閉集合の集合とする．

全ての $A \in F(X)$ に対して，

$$w(A) := w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A). \tag{4}$$

全ての $A, B \in F(X)$ に対して，Hausdorff 距離が定義される．

$$d_H(A,B) := \inf\{\epsilon > 0 | N_\epsilon(A) \supset B \text{かつ } N_\epsilon(B) \supset A\}, \tag{5}$$

ただし，$N_\epsilon(\bullet)$ は $\bullet$ のϵ−近傍である．Wは，この計量のもとで，$F(X)$ 上の縮小写像である．

$D_0 = \{(x,x) \in X\}$ として $D_n = w(D_{n-1})$ で，D_nは $[0,1]$ 上の連続関数 $f_n : [0,1] \to [0,1]$ のグラフである．

特に，連続関数 $f_\infty : [0,1] \to [0,1]$ が存在する．

wは，$F(X)$ 上の縮小写像であるから wは $F(X)$ の中に唯一の不動点 D^*をもつ．任意の $A \in F(X)$ に対して，$\{w^n(A)\}$ は，計量 d_Hに関して D^*に収束する．

ここで，D^*は，f_∞のグラフになる．すなわち，D_nは D^*に収束する．

Katuura は，関数 f_∞は，$\forall_x \in [0,1]$ で微分不可能であることを証明した.[5)]

§3. 特異連続でいたるところ微分不可能な関数

Rössler らは，Katsuura 関数から特異連続でいたるところ微分不可能な関数を構成した.[6)] ここで特異連続とはカントール集合上で連続なことである．すなわち，カントール集合をつくる各段階での部分区間 $I_n^{(i)} (i = 1, 2, \cdots, 2^n)$ 上で連続関数$\varphi_n^{(i)}(x)$ を定義するが，これは，抜き取る部分区間上で定値関数をつけ加えて，全域で連続関数 $F_n(x)$ が得られるように定義しておく．この時，カントール集合をつくる極限操作に伴う $\{\varphi_n^{(i)}(x)\}$ の極限をカントール集合上での連続関数と定義する．

さらに，カントール集合上での微分可能性を定義しなければならない．いくつかの定義が可能であろうが，ここでは Dini 微分で定義する.[2)] やはりカントール集合をつくる n 段目において，2^n個の部分区間の各々$I_n^{(i)}$において，連続関数 $f_n^{(i)}$を定義する．これに対して，

$$\Delta_n^{(i)} := \frac{f_n^{(i)}(b_n^{(i)}) - f_n^{(i)}(a_n^{(i)})}{b_n^{(i)} - a_n^{(i)}}, \quad I_n^{(i)} = [a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \cdots, 2^n) \tag{6}$$

とする．$n+1$ 段目の操作で，部分区間 $I_n^{(i)}$から $I_{n+1}^{(2^i-1)}, I_{n+1}^{(2^i)}$が得られる．この時，

$$\Delta_{n+1}^{(2i-1)} := \frac{f_n^{(i)}(b_{n+1}^{(2i-1)}) - f_n^{(i)}(a_n^{(i)})}{b_{n+1}^{(2i-1)} - a_n^{(i)}}, \quad I_{n+1}^{(j)} = [a_{n+1}^{(j)}, b_{n+1}^{(j)}] \quad (j = 1, 2, \cdots, 2^{n+1})$$
$$\Delta_{n+1}^{(2i)} := \frac{f_n^{(i)}(b_n^{(i)}) - f_n^{(i)}(a_{n+1}^{(2i)})}{b_n^{(i)} - a_{n+1}^{(2i)}}. \tag{7}$$

ここで，$\forall_n > 0$ に対して，$\{\Delta_k^{(2Z-1)}\}_{k=n}^{\infty}$ が収束する時，すなわちカントール集合の奇数番目の各左端点で，カントール集合上で定義される関数 $f(x)$ の Dini 微分 (右微分) が存在する時，さらに，$\{\Delta_k^{(2Z)}\}_{k=n}^{\infty}$が収束する時，すなわち，カントール集合の偶数番目の各右端点で $f(x)$ の Dini 微分 (左微分) が存在する時，これらの時に限って，$f(x)$ はカントール集合上で微分可能であるとする．

以上は，３進カントール集合を念頭においたが，一般のカントール集合上の関数に微分可能性を拡張するのは簡単である．n 段目に対する部分区間 $J_n^{(i)}$のそれぞれからはじまる区間列上で，上のような変化率をとりその収束性で定義できる．カントール集合上の関数 $f(x)$ の Dini の右微分の存在で微分可能性をいうこともできるし，もっと強くして，Dini 右微分=Dini 左微分によって定義してもよい．
次に示す Rössler の関数は，弱めた定義においてすら，微分可能性は，成り立たない．
さて，Rössler の関数は次のようにして構成できる．

$$
\begin{aligned}
c_1(x,x) &= (\frac{x}{5}, \frac{2x}{3}) \\
c_2(x,x) &= (\frac{3-x}{5}, \frac{1+x}{3}) \\
c_3(x,x) &= (\frac{4+x}{5}, \frac{1+2x}{3})
\end{aligned} \tag{8}
$$

任意の $A \in F(X)$ に対して，

$$
c(A) := c_1(A) \cup c_2(A) \cup c_3(A). \tag{9}
$$

これは (5) のもとで，縮小写像を与え，$D_{n+1} = C(D_n), D_0 = (x,x)$ である．D_nは，$[0,1]$ 上の特異連続な関数 g_nのグラフである．g_∞のグラフ D_∞は孤立点からなる．しかし，一方で g_∞は，カントール集合上で連続でいたるところ微分不可能である．

§4. 次元論

Rössler のモデル (8) から導かれる D_∞の次元を評価しよう．これは大変示唆に富む例になっている．まず，位相次元 $\dim_t = 0$ は明らかである．一方，ハウスドルフ次元 $\dim_h$は自己相似性を用いて簡単に，$\dim_h = \frac{\log\frac{25}{3}}{\log 5} = 1.317\cdots$である．すなわち，

$$
\dim_h - \dim_t > 1.0. \tag{10}
$$

一方，Katsuura 関数 f_∞のグラフの次元は，それぞれ $\dim_t = 1, \dim_h = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.4649\cdots$ で

$$
\dim_h - \dim_t < 1.0. \tag{11}
$$

Katsuura(3) から Rössler(8) にいたる時，カントールギャップがゼロでなければ，(10) が成立する．

モデル (3) も (8) も力学系ではなく縮小写像である．我々の興味は，微分可能力学系のアトラクタもっと一般には不変多様体が, 特異連続でいたるところ微分不可能であるようなものにある．類似の例として，Yorke らによる"Strange nonchaos"[7)-9)], Rössler と Hudson による"Superfat attractor"[10)], Moser[11)]や金子[12)]による “フラクタルな不変

トーラス" などが挙げられる．特異連続で微分不可能なアトラクターでは，一般に関係式 (10) が成立していると思われる．Rössler モデル (8) により次の Kaplan-Yorke の予想 [7] の成立の一つの根拠が与えられたと考えてよかろう．

$$\begin{array}{l}\text{Kaplan - Yorke の予想 ：} \\ \text{カオスアトラクターの次元は位相次元より 1.0 以上大きくなりうる．}\end{array} \tag{10'}$$

このことはリアプノフ次元の表式から，正のリアプノフ指数に比べて，初めの方の負のリアプノフ指数の絶対値が小さければおこりうる．

§5. 公理 A 系でのいたるところ微分不可能なアトラクターの存在

次の構成的モデル [13] は，カントール集合上の力学をつくるヒントになる．

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 9x_n (\mathrm{mod}\ 2\pi) \\ y_{n+1} &= 0.3y_n - 0.7\cos(9x_n) \\ z_{n+1} &= 0.3z_n + 0.7\sin(9x_n) \\ w_{n+1} &= 0.3w_n - 0.7\sin(2\times 9x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

これは，5 次元ベクトル場の流れのポアンカレ写像と考えられる．この系においてはさまざまな量を厳密に手で計算できる．不動点，周期解，安定性，リアプノフ指数などである．リアプノフ指数は，$\lambda_1 = 2.197, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1.204$ であるので，リアプノフ次元は，$\dim_\lambda = 2.825 (= \dim_h)$ となり，一方，位相次元は $\dim_t = 1.0$ となる．従って，式 (10) が成立している．また，非遊走集合上で，周期解が，稠密であること，及び非遊走集合が双曲的であることも容易に示されるので，この系は公理 A である．

アトラクタを，唯一のカオス方向に横断する超平面で切ると，3 次元のカントール集合が得られる．これを $y-z$ 面へ写影すると円周上に 9 個の小円が並びそれぞれの小円の円周上にまた 9 個の小円が並び，という構造が繰り返された構造が現われる．計算によると 2 回目の小円以降が，オーバーラップするために，この図形はいたるところ微分不可能である．

§6. ニューラルネットにおけるいたるところ微分不可能性 [2]

§1 で予告したように二つの相互作用する安定ニューロンにカオスニューロンによる駆動がある 3 体のニューラルネットを考える．ここでの基本になるニューロンのモデルは合原によるものである．[14]

次式 (13),(14) で，x はカオスニューロンの状態，y, z はそれぞれ安定興奮性，及び安定抑制性ニューロンの状態を表わし，X, Y, Z は，それぞれのニューロンの内部膜電位である．

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(-\sum_{r=0}^{n} b_1^r x_{n-r} + I) \\ y_{n+1} &= f(-\sum_{r=0}^{n} b_2^r y_{n-r} + c_{zy} z_n + c_{xy} x_n) \\ z_{n+1} &= f(-\sum_{r=0}^{n} b_3^r z_{n-r} + c_{yz} y_n + c_{xz} x_n), \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，$0 < b < 1$, c_{uv}はuからvへの結合強度で，$c_{zy} < 0, c_{yz} > 0, c_{xy} > 0, c_{xz} > 0$である．$X_{n+1} = -\sum b^r x_{n-r} + I, Y_{n+1} = -\sum b^r y_{n-r} + c_{zy} z_n + c_{xy} x_n$, $Z_{n+1} = -\sum b^r z_{n-r} + c_{yz} y_n + c_{xz} x_n$とおくと，内部状態に対するモデル方程式は，

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} &= b_1 X_n - f_1(X_n) + \alpha \\
Y_{n+1} &= b_2 Y_n - f(Y_n) + c_{zy}(f(Z_n) - b_3 f(Z'_n)) + c_{xy}(f_1(X_n) - b_1 f_1(X'_n)) \\
Z_{n+1} &= b_3 Z_n - f(Z_n) + c_{yz}(f(Y_n) - b_2 f(Y'_n)) + c_{xz}(f_1(X_n) - b_1 f_1(X'_n)) \\
X'_{n+1} &= X_n \\
Y'_{n+1} &= Y_n \\
Z'_{n+1} &= Z_n,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ここで，$f_1(X) = \frac{1}{1+e^{-\gamma_1 X}}$，$f(X) = \frac{1}{1+e^{-\gamma X}}$.
適当にパラメタを調節することにより，X方向に横断的な超平面上で，いたるところ微分不可能なアトラクタが得られる．

§7. カントール集合上に制限されたダイナミクス[2)]

モデル (14) の$Y-Z$面のある傾いた方向にカントール集合が形成される．この集合上のダイナミクスの性質を調べるため (14) に外部ノイズ (一様ノイズ) を印加し，変化をみた．ノイズは，YもしくはZに印加された．ノイズの大きさを変えて KS エントロピーの変化を見た．非常に振幅の小さいノイズに対しては，エントロピーは増加したが，ノイズ振幅を大きくしていくと，減少をはじめ，ノイズレスの場合の値よりもさらに減少した．これは,"Noise-induced Order"[15),16)]のように思われるが，リアプノフスペクトルはノイズレベルを変化させてもほとんど変化しないことから，新型の現象であると思われる．ただし，ここではマルコフ分割をとれないので KS エントロピーは，十分細かい分割で近似的に計算した．

カントール集合をある程度粗視化して，セル上の不変測度を求めた．測度がゼロでないセル上の部分分布からの一回及び二回の遷移による測度分布を求めると，たった一回の遷移で，不変測度と定性的に一致し，二回の遷移による分布は，定量的にも不変測度とほぼ一致した．このことは，アトラクタの各局所局所に全体のダイナミクスが作られていることを意味している．セルの細分によっても以上のことは成立するので，カントール集合の各点全てに，それぞれ制限された完全なダイナミクスが生成されたと考えてよいであろう．ノイズによる KS エントロピーの減少は，ノイズによりカントール集合からはずれた軌道はもはや軌道の多様性を生成できないような異なるダイナミクスに支配されることを意味している．一方，リアプノフスペクトルの鈍感さは，相空間内での局所的拡大及び縮小率がほぼ一様であることを示している．KS エントロピーの変化とリアプノフスペクトルの変化が一見矛盾しているように見えるのは何故であろうか．軌道の多様性の度合が変化するならリアプノフスペクトルにそれが反映されてもよさそうであるが，そうでないのは何故なのだろうか．それは軌道の多様性が，カオスの場合のように不安定多様体の方向で生成されるのではなく，むしろ安定多様体の方向で生成されることからの帰結である．この場合，軌道の多様性はカントール集合上に制限されたダイナミクスがうけもっている．

さらに，この系は式 (10) の関係を満たしている．実際，位相次元は，$\dim_t = 2.0$ であるが，リアプノフ次元は，$\dim_\lambda = 3.068$ である．

これらの結果から我々は重要な結論に到達する．従来の"自己組織系"と呼ばれてきた系では，力学が与えられ，初期条件や境界条件に依存して解の発展形態が，時には振動現象やカオス現象の発現として，また時にはパタン形成としてとらえられてきた．しかしいずれの場合においてもこれらの散逸構造は，与えられた力学が全体として示す性質として考えられるべきものであった．これに反し，ここで述べた力学は，アトラクターにのみ制限された内部的な力学を発現する機構が存在することを端的に示している．分岐理論は，力学が，分岐点近傍で局所的に従うべき内部ダイナミクスを明示的に示すことに成功している．一方，我々の系はパラメタの広範囲でしかもアトラクターの全域にわたって定義された局所的な内部ダイナミクスの存在を示しているのである．このことこそが"自己組織"ということなのではないだろうか．議論が必要なところであろう．

参考文献

1) I.Tsuda, Progr.Theor.Phys. (Suppl.)**79**(1984)241.
2) I.Tsuda, (to be submitted to *Nuovo Cimento*);
I.Tsuda, (to be published in *The Proc. of the Workshop on "The Role and Control of Random Events in Biological Systems"*(Sigtuna, 1995));
I.Tsuda, (in preparation).
3) 山口昌哉，畑政義，木上淳，「フラクタルの数理」（岩波講座　応用数学）．
4) E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*(Oxford University Press, 1985).
5) H.Katsuura, Amer.Math.Monthly, **98**(1991)411.
6) O.E.Rössler, R.Wais and R.Rössler, in *The Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic & Neural Networks*(Iizuka, 1992)909.
7) J.L.Kaplan and J.A.Yorke, Lect. Notes. Math. **730**(1979)204.
8) J.L.Kaplan, J.Mallet-Paret and J.A.Yorke, Ergod.Th.and Dyn.Sys. **4**(1984)261.
9) C.Grebogi, E.Ott, S.Pelikan and J.A.Yorke, Physica **13D**(1984) 261.
10) O.E.Rössler and J.L.Hudson, Z.Naturforsch. **48a**(1993)673.
11) J.Moser, J.Diff.Eq. **5**(1969)411.
12) K.Kaneko, *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore, 1986) の 118 ページを見よ．
13) O.E.Rössler, J.L.Hudson, C.Kundsen and I.Tsuda, Int.J.of Intell.Sys. **10**(1995) 15.
14) K.Aihara, T.Takabe and M.Toyoda, Phys.Lett.A, **144**(1990)333.
15) K.Matsumoto and I.Tsuda, J.Stat.Phys. **31**(1983)87.
16) I.Tsuda and K.Matsumoto, in *Chaos and Statistical Methods* (ed. Y.Kuramoto, Springer-Verlag, 1984)102.