数理解析研究所講究録
938 巻 1996 年 149-159

'Niceness' of a class of Markov systems with respect to their L-functions

東工大.理 盛田健彦 (Takehiko Morita)

ここでいう'nice'という概念は砂田利一氏の著書「基本群とラプラシアン」にあらわれたものの類似である.「基本群とラプラシアン」によれば:

$P=\{p\}$ を可算集合, $N: P \to \mathbb{R}$ を

$\pi(x)=\#\{p\in P\ ;\ N(p)< x\}$ が各 $x\geq 0$

に対して有限で $\pi(1)=0$ となる関数とする

G を群とし, P から G への共役類への写像

$p\longmapsto\langle p\rangle$ が与えられたとする. このとき G の有限次元ユニタリ表現 ρ に対して組 (P, G, N, ρ) に関する L-関数を形式的に

$$L(\rho, s)=\prod_{p\in P}\det(I-\rho(\langle p\rangle)N(p)^{-s})^{-1}$$

で定義する.

<u>定義</u>: (P, G, N) は L-関数の族

$\{L(\rho,s)\ ;\ \rho$ は G の有限次元ユニタリ表現$\}$

に対し 以下をみたすとき 'nice' であるといわれる.

(L.1) $h>0$ が存在して $L(p,s)$ は $\mathrm{Re}\, s>h$ で絶対収束し正則.

(L.2) $L(p,s)$ は 閉領域 $\mathrm{Re}\, s\geq h$ を含む複素平面の領域へ有理型に解析接続される.

(L.3) $L(p,s)$ は $\mathrm{Re}\, s\geq h$ で零点を持たない.

(L.4) p が既約で自明でないならば

$L(p,s)$ は $\mathrm{Re}\, s\geq h$ で正則.

(L.5) $L(1,s)$ は $s=h$ で 1位の極を持ち

$s=h$ をのぞき 軸 $\mathrm{Re}\, s=h$ で正則. ┘

'nice' な 3つ組 (P,G,N) の例を一つあげてみよう.

G として co-compact Fuchsian group すなわち

$PSU(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix};\ \alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta=1\right\}\Big/\{-I,I\}$ の離散部分群で Poicaré disc $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ を Gで割った商空間 $\mathbb{D}/G$ が閉リーマン面となるもの, とし,

P としては Gの原始双曲元の共役類全体の集合,

$N(p)=\exp(\,l(p)\,)$, ただし, $l(p)=2\cosh\frac{\mathrm{tr}\,h}{2}$,

$h\in p$ とする.

よく知られているように Pは Riemann面 $\mathbb{D}/G$ 上の向き付けられた閉測地線と 1:1 対応しており

$\ell(p)$ が丁度その長さ（双曲的）をあらわしている。この場合の L-関数は Selberg の L-関数に他ならない。

一方、Ruelle, Bowen, Parry, Pollicott 等によって研究されてきた力学系のゼータ関数というものがある。Selberg の L-関数は次のようにして力学系のゼータ関数として'あらわせる'ことが Bowen-Series 'Markov maps associate with Fuchsian groups' Publ. IHES 50 (1979) 401–418 等から比較的容易に分る。

おおざっぱにいうと、G の S^1 $(=\partial \mathbb{D})$ への作用のみの情報で L 関数は決定されていることに着目する。Bowen-Series が実行したことは G の S^1 への作用と軌道同値な写像 $T_G : S^1 \longrightarrow S^1$ を構成し、そのエルゴード理論的な性質のいくつかを示していくということであった。T_G の典型的な性質の一つに Markov 性というのがあることに注意する。このノートでは Bowen-Series による S^1 上の写像 T_G のような離散力学系から定義される L 関数に対する 'nice' 性を若干一般化した形で述べてみたいと思う。したがって、本質的に新しい結果がこのノートに含まれている

わけではなく むしろ「Markov system で表わせる L-関数に帰着できるような議論ならば Ruelle による熱力学形式を通して 'nice' 性の議論も可能になる」といったわく組を明示するのが目標となる

Markov Systems

まず Markov system を定義しよう. S をコンパクト距離空間(コンパクトである必要はないが、完備可分ぐらいあればよい) Γ を $\mathrm{Homeo}(S\to S)$ の部分群として ρ をその有限次元ユニタリ表現とする

3つ組 $\mathcal{T}=(\mathcal{R},\mathcal{P},T)$ が Markov system であるということを $\mathcal{R}$、$\mathcal{P}$、T が以下のものであることと定める

1) $\mathcal{R}=\{A(1),A(2),\dots,A(q)\}$ は S の部分集合の有限族で $\overline{\mathrm{int}\,A(i)}=A(i)$, $\mathrm{int}\,A(i)\cap\mathrm{int}\,A(j)=\phi$ (if $i\neq j$) をみたす.

2) $\mathcal{P}=\{J\}$ は S の高々可算個の部分集合からなる族で 2個以上の元からなり

2.1) $\overline{\mathrm{int}\,J}=J$, $\mathrm{int}\,J_1\cap\mathrm{int}\,J_2=\phi$ $(J_1\neq J_2)$

2.2) 各 $J\in\mathcal{P}$ に対し添字 $1\leq\iota(J),\tau(J)\leq q$ と同相写像 $T_J\in\Gamma$ (上の Γ) が対応し.

$J\subset A(\iota(J))$, $T_J:J\longrightarrow A(\tau(J))$ は同相(上への)

3) T は写像 $T : \bigcup_{J \in \mathcal{P}} \mathrm{int} J \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathrm{int} A(i)$

で $T|_{\mathrm{int} J} = T_J$ で定義されるもの.

このとき Markov system $\mathcal{T} = (\mathcal{R}, \mathcal{P}, T)$ の合成のくり返し $\mathcal{T}^n$ を以下のように定義する.

$J_{i_0}, \ldots, J_{i_{n-1}}$ に対し

(*) $\mathrm{int} J_{i_0} \cap T_{J_{i_0}}^{-1} \mathrm{int} J_{i_1} \cap \cdots \cap T_{J_{i_0}}^{-1} \cdots T_{J_{i_{n-2}}}^{-1} \mathrm{int} J_{i_{n-1}} \neq \phi$

のときその閉包を $J(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})$ とおき.

$$\mathcal{P}_n = \{ J(i_0 i_1 \cdots i_{n-1}) \ ; \ i_0 i_1 \cdots i_{n-1} \text{ は (*) をみたす} \}$$

とおく. $J(i_0 i_1 \cdots i_{n-1})$ 対し $T^n_{J(i_0, \ldots, i_{n-1})}$ を

$T^n_{J(i_0 i_1 \cdots i_{n-1})} = T_{J_{i_{n-1}}} \cdots T_{J_{i_0}}$ とくとき.

$$T^n : \bigcup_{J \in \mathcal{P}_n} \mathrm{int} J \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathrm{int} A(i)$$

を $T^n|_{\mathrm{int} J} = T^n_J$ となる写像として再び定義する. こうして得られた $(\mathcal{R}, \mathcal{P}_n, T^n)$ はやはり Markov system になるが, これを $\mathcal{T}$ の n 回 iteration とよぶことにする.

Markov system の定義の中で $\# \mathcal{R} < \infty$ は有限性条件として重要な役割を果たすことになることを注意しておこう.

ポテンシャル関数

熱力学形式を Markov system に適用していくために ポテンシャル関数にあたるものを導入する.

$\mathcal{T}=(R, \mathcal{P}, T)$ を Markov system としたとき、関数の族 $\mathcal{V}=\{V_J\}_{J\in\mathcal{P}}$ で

$$V_J : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

を $V : \bigcup_{J\in\mathcal{P}} \mathrm{int}J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ のようにみなし ポテンシャル関数とよぶことにする.

$\mathcal{T}$, $\mathcal{V}$ に関する条件

さて Markov system $\mathcal{T}$ と ポテンシャル関数 $\mathcal{V}$ に対して 次の条件を課すことにする.

(A.1) $\exists n_0 > 0$ s.t. $\mathcal{T}^{n_0}$ is uniformly expanding.

すなわち, n_0 をとることができて, ある $c\in(0,1)$ に対し, $J\in\mathcal{P}_{n_0}$, $x, y\in J$ である限り

$$d(T_J^{n_0}x, T_J^{n_0}y) \geq (1/c)\, d(x, y)$$

が成立するようにできる.

(A.2) (混合性) 行列 $L=(L(i,j))_{1\leq i,j\leq q}$ を

$\exists J \in \mathcal{P}$ s.t. $\iota(J)=i$, $\tau(J)=j$

のとき　$L(i,j)=1$ それ以外の i,j の組合わせについては $L(i,j)=0$ で定義する このとき

$\exists n_1$ s.t. $L^{n_1} > 0$.

(A.3)　$V_J : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ は Lipschitz 関数で　$\sup_{J\in\mathcal{P}} [V_J] < +\infty$

ただし $[-]$ は Lipschitz 定数をあらわすものとする.

次の条件 (A.4) は少し下品であるが $\#\mathcal{P}<\infty$ のときは不用である.

(A.4) $\exists s_0>0$ s.t. $1 < \sum_{\substack{\tau(J)=i \\ J\in\mathcal{P}}} e^{-s_0 \inf_{J\in\mathcal{P}} V_J} < \infty$

for some i

L-関数

$\mathcal{P}$ として $T_J^n J \supset J$ なる $J\in\mathcal{P}_n$ には $T_J^n x = x$ となる点が唯一存在するが、そのような点の $\mathcal{T}$-orbit の全体をとる. そのような点に対しては $T_J^n J \supset J$ $x\in J\in\mathcal{P}_n$ をみたす最小の n があるが、それを x の $\mathcal{T}$-period ということにする

群 G として　$G = \langle T_J ; J \in \mathcal{P} \rangle$ をとる

$p \in P$ とするとき p は集合と思ってよい.

$$\{x, T_{J_{i_1}}x, T_{J_{i_2}}T_{J_{i_1}}x, \ldots, T_{J_{i_{n-1}}}\cdots T_{J_{i_0}}x\}$$

$$N(p) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} V(T_{J_{i_k}}\cdots T_{J_{i_0}}x)\right)$$

とおく.（$T^n_{J(i_0 i_1 \cdots i_{n-1})}x = x$ より これは周期を一まわりしたときの和）.

こうして, 三つ組 (P, G, N) がつくられたからその L 関数を形式的に

$$L(\rho, s) = \prod_{p \in P} \det(I_N - \rho(p)N(p)^{-s})^{-1}$$

と定義することができる.

この L 関数を強引にもとの Markov system と potential であらわすと

$$L(\rho, s) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{tr}(\rho\langle p\rangle)N(p)^{-ns}\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{J \in \mathcal{P}_n \\ T_J^n J \supset J}} \mathrm{tr}(\rho(T_J^n))\exp(-sV_J^n x_J)\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\sum_{J \in \mathcal{P}_n}\langle L_\rho(s)^n(\chi_J e_j)(x_J)\, e_j\rangle\right]$$

とあらわせる. ただし, x_J は $T_J^n x_J = x_J$ なる $J \in \mathcal{P}_n$ 内の唯一の点であり, e_j は $\mathbb{C}^N$ の標準基底.

χ_J は J の定義関数で, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}^N$ の内積,
$L_\rho(s)$ は $\bigsqcup A(i)$ 上の $\mathbb{C}^N$ 値関数に作用する線型作用素で $x \in A(i)$ のとき

$$L_\rho(s)v(x) = \sum_{J:\ \tau(J)=i} e^{-sV_J(T_J^{-1}x)} \rho(T_J) v(T_J^{-1}x)$$

と形式的にあらわせる.

仮定した条件 (A3)(A4) から $\mathrm{Re}\, s$ が十分大ならば $L_\rho(s)$ は $\mathrm{Lip}(\bigsqcup A(i) \to \mathbb{C}^N)$ ($\bigsqcup A(i)$ 上の $\mathbb{C}^N$-値 Lipschitz 連続関数のなす Banach 空間) 上の有界線型作用素の analytic family となる.

一般的結果.

先に定義した L-関数の性質のうち (L1)(L2)(L3) は仮定 (A1)〜(A4) からきわめて一般的に証明されてしまう. その方法を書いておく

(I). まず自明な表現に対する operator $L(s) = L_1(s)$ を考える. これは関数空間 $\mathrm{Lip}(\bigsqcup A(i) \to \mathbb{C})$ 上の作用素で $s \in \mathbb{R}$ ならば正値である.

簡単のために $q=1$ とし $A(1) \equiv A$ とかこう.

(L1) に出てくる $h>0$ をみつけるために $L(s)$ の絶対値最大の固有値が 1 となる s をみつけるという

方向で議論する. 実はそのような $s \in \mathbb{R}$ が h である

II でみつけた h の近くで $L(s)$ を摂動することを考えるのだが、$\Pi_n f(x) = \sum_{J \in \mathcal{P}_n} f(x_J) \chi_J(x)$ とおく ただし、

x_J は各 $J \in \mathcal{P}_n$ について一つ選んで fix しておく.

$\Pi_n f$ は $\mathrm{Lip}(A \to \mathbb{C})$ の元にはならないが

$L(s)^n \Pi_n f$ は $\mathrm{Lip}(A \to \mathbb{C})$ の元になる. 明らかに

$L(s)^n \Pi_n$ は $\mathrm{Re}\, s \geq h$ の近傍でコンパクト作用素になる. (A1), と V の正値性, 更に (A.3) を用いると

Baladi-Keller, Commu Math. Phys. 127 (1990) 459–477 の方法を少し変形することによって

(*) $\| L(s)^n - L(s)^n \Pi_n \| \leq C(s)\, \theta^n$

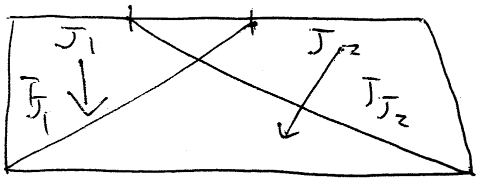
$0 < \theta < 1$ が $\mathrm{Re}\, s > h$ の近傍で成立することが示せる. 但し $C(s)$ は s に依存する. これにより. $L(1, s)$ についての解析接続の主張がみちびかれる.

実は (*) のような評価が自明でない表現に対しても $\mathrm{Lip}(A \to \mathbb{C}^N)$ 上の operator の version で示せるのである.

このような方法で (L1)〜(L3) は示される.

L4, L5 について.

(L4)(L5)は一般には成立しないカントール集合をつくるような Markov system を考えて $V_J(x) = \mathrm{const.}$



(T_{J_1} T_{J_2} は J_1 J_2 をそれぞれ 3倍に拡大して $[0,1]$ へうつす.)

としてみれば (L4)(L5) は成立していない. したがって何らかの非線型性が必要そうに見えてくる.

Selberg zeta を含むクラスについては Fuchs群の離散性から (L4)(L5) を transfer operator $L_p(1+\sqrt{-1}t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を用いることによって示すことができることに注意しておく. 例えば T. Morita, Markov systems and transfer operators associated with cofinite Fuchsian groups, TIT preprint series 44 の §6 を参照されたい.