数理解析研究所講究録
941 巻 1996 年 143-150

18. 数式処理の非線形系制御への応用について

北本 卓也 (筑波大・数学)

18.1 序論

近年、佐々木（筑波大）により「近似代数」[Sas 88] が提唱され、その研究グループにより基礎理論およびその応用が研究されつつある [SSKS 91][Kit 93]。

本稿では、非線形制御の手法への近似代数を適用を試みる。

18.2 問題設定

ここでは本稿で取り扱う問題について解説する。制御系が次の微分方程式で表されているとする。

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i \tag{1}$$

$$y_i = h_i(x) \quad (1 \leq i \leq p) \tag{2}$$

ただし、x は n 次元ベクトル、$f:\ R^n \to R^n$, $g_i:\ R^n \to R$, $h_i:\ R^n \to R$ で $f(x), g(x), h(x)$ は解析関数とする。この制御系の性質を調べたり、望ましい応答を得るにはどのような入力 u を加えればよいか決定したりするのが本稿の目的である。

18.3 定義と記法

$\lambda(x)$ を $\lambda:\ R^n \to R$ とする。

$$d\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\right)$$

を $\lambda(x)$ の differential もしくは gradient といい、

$$d\lambda(x) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

ともかくことにする。

ベクトル場 f, g に対して、Lie product $[f, g]$ を

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

を定義する。

次で定義されたベクトル空間 $\Delta(x)$

$$\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}(f_1(x), \cdots, f_d(x))$$

を distribution といい、

$$\Delta = \operatorname{span}(f_1, \cdots, f_d)$$

とも書く。開集合 U 上で定義された distribution Δ はある整数 d に対して

$$\forall x \in U, \quad \dim(\Delta(x)) = d$$

である時、nonsingular であるという。また、この時 d を dimension という。$x_0 \in U$ は x_0 の近傍 U_0 で nonsingular なものが存在する時、regular であるという。regular でない点を特異点という。

distribution Δ はそれに含まれる任意のベクトル場の組の Lie product も Δ に含まれる、つまり

$$\tau_1, \tau_2 \in \Delta \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta$$

である時、involutive であるという。

18.4 Local reachability, observability

ここでは、与えられた制御系 (1),(2) に適当な座標変換を施すことで local な reachability や observability を調べる方法について述べる。

18.4.1 フロベニウスの定理

nonsingular な d 次元 distribution Δ が $U \in R^n$ で定義されており、$x_0 \in U$ の近傍 U_0 で実数関数 $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d}$ が存在し、

$$\text{span}(d\lambda_1, \cdots, d\lambda_{n-d}) = \Delta^{\perp} \tag{3}$$

が成り立つ時、completely integrable という。与えられた distribution が completely integrable かどうかの判定をするのがフロベニウスの定理である。

定理 1 (フロベニウスの定理)
nonsingular な distribution が completely integrable であることの必要十分条件は involutive であることである。□

これに対応する近似代数のフロベニウスの定理を考えることが出来る。まず、近似 involutive, 近似 completely integrable を定義する。

ベクトル場 $f_1, ..., f_k$ で張られる distribution Δ とベクトル場 g が与えられた時、

$$g \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i f_i \pmod{S^{l+1}}$$

となる多項式 $c_i(x)$ が存在する時、g が l 次で近似的にΔ に含まれるといい、

$$g \in \Delta \pmod{S^{l+1}}$$

と書くことにする。

distribution Δ が

$$\tau_1, \tau_2 \in \Delta \pmod{S^{l+1}} \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta \pmod{S^{l+1}}$$

を満たす時、Δ は l 次の近似 involutive ということにする。また、nonsingular な d 次元 distribution Δ が $U \in R^n$ で定義されており、$x_0 \in U$ の近傍 U_0 で実数関数 $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d}$ が存在し、

$$\text{span}(d\lambda_1, \cdots, d\lambda_{n-d}) \equiv \Delta^{\perp} \pmod{S^{l+1}} \tag{4}$$

が成り立つ時、l 次の近似 completely integrable という。

(近似代数のフロベニウスの定理)
nonsingular な distribution が l 次の近似 completely integrable であることの必要十分条件は l 次の近似 involutive であることである。□

d 次元 の distribution Δ が involutive である時、(3) の$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-d}$ を構成するには次のようにすれば良い。

まず、定義より $x_0 \in U$ の近傍 U_0 で

$$\Delta(x) = \mathrm{span}(f_1(x), \cdots, f_d(x))$$

が成り立つことに注意する。適当な $f_{d+1}, \cdots, f_n$ を加えることにより、U_0 で

$$\Delta(x) = \mathrm{span}(f_1(x), \cdots, f_d(x), f_{d+1}(x), \cdots, f_n(x)) = R^n$$

とすることができる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

の解が $x(t) = \Phi_t^f(x_0)$ であるように $\Phi_t^f(x_0)$ を定義し、$\Psi: \ R^n \to R^n$ を

$$\Psi: \ (z_1, \cdots, z_n) \to \Phi_{z_1}^{f_1} \circ \cdots \circ \Phi_{z_n}^{f_n}(x_0)$$

で定義する。この時、Ψ^{-1} の最後の $n-d$ 要素 ($z_1, \cdots, z_n$ の関数) を $\lambda_1, ..., \lambda_{n-d}$ とすることができる。

$\phi_{d+1} = \lambda_1(x), \cdots, \phi_n = \lambda_{n-d}(x)$ と置くと $d\phi_1, \cdots, d\phi_n$ がある開集合 U 上で独立であるように $\phi_1(x), \cdots, \phi_d(x)$ をとることができる。この時、$z = \Phi(x)$ を次のように定義する。

$$z = \Phi(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_d(x), \phi_{d+1}(x), ..., \phi_n(x))^T$$

ベクトル場 $\tau(\in \Delta)$ をとると、新しい座標 z では

$$\bar{\tau}(z) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\tau(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

となるが、$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ の最後の $n-d$ 列は$\Delta^\perp$ の基底なので

$$\bar{\tau}(z) = (\bar{\tau}_1(z), ..., \bar{\tau}_d(z), 0, ..., 0)$$

が成り立つ。

近似代数のフロベニウスの定理の場合も、同様な座標変換をすることが出来てこの場合には

$$\bar{\tau}(z) \equiv (\bar{\tau}_1(z), ..., \bar{\tau}_d(z), 0, ..., 0) \pmod{S^{l+1}}$$

とできる。

これを利用して、制御系の local decomposition を行なうことができる。

18.4.2 Local decomposition

まず、重要な概念である invariant から説明する。

(Invariant)

f を与えられたベクトル場とする。distribution Δ は

$$\tau \in \Delta \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta$$

である時、f で invariant であるといい、

$$[f, \Delta] \subset \Delta$$

と書く。□

(近似 Invariant)

f を与えられたベクトル場とする。distribution Δ は

$$\tau \in \Delta \Rightarrow [f, \tau] \in \Delta \ (\mathrm{mod}\ S^{l+1})$$

である時、f で l 次の近似 invariant であるといい、

$$[f, \Delta] \subset \Delta \ (\mathrm{mod}\ S^{l+1})$$

と書く。□

Invariant に対して次の補題が成り立つ。

補題 1

Δ を nonsingular, involutive な d 次元の distribution とし、ベクトル場 f で invariant とする。この時、任意の点 x_0 に対しその近傍 U_0 が存在し、そこで座標変換 $z = \Phi(x)$ が定義され、その座標系では f は

$$\bar{f}(z) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n) \\ \cdots \\ \bar{f}_d(z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n) \\ \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, ..., z_n) \\ \cdots \\ \bar{f}_n(z_{d+1}, ..., z_n) \end{pmatrix}$$

の形で表される。□

補題 2

Δ を nonsingular, l 次の近似 involutive な d 次元の distribution とし、ベクトル場 f で l 次の近似 invariant とする。この時、任意の点 x_0 に対しその近傍 U_0 が存在し、そこで座標変換 $z = \Phi(x)$ が

定義され、その座標系では f は

$$\bar{f}(z) \equiv \begin{pmatrix} \bar{f}_1(z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n) \\ \cdots \\ \bar{f}_d(z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n) \\ \bar{f}_{d+1}(z_{d+1}, ..., z_n) \\ \cdots \\ \bar{f}_n(z_{d+1}, ..., z_n) \end{pmatrix} \pmod{S^{l+1}}$$

の形で表される。□

上の正確な場合に

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (z_1, ..., z_d) \\ \zeta_2 &= (z_{d+1}, ..., z_n) \end{aligned}$$

と置くと、

$$\dot{x} = f(x) \tag{5}$$

は

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= f_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \dot{\zeta}_2 &= f_2(\zeta_2) \end{aligned}$$

に変換される。上からわかるように ζ_2 は ζ_1 の影響を全く受けない。

よって (5) の2つの初期値 $x' = (\zeta_1', \zeta_2'), x'' = (\zeta_1'', \zeta_2'')$ が$\zeta_2' = \zeta_2''$ ならば $\zeta_1' \neq \zeta_1''$ でも全ての時間において $\zeta_2' = \zeta_2''$ である。

また、近似代数の場合にはシステムは

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &\equiv f_1(\zeta_1, \zeta_2) \pmod{S^{l+1}} \\ \dot{\zeta}_2 &\equiv f_2(\zeta_2) \pmod{S^{l+1}} \end{aligned}$$

となる。

今までのことをまとめると次の定理を得る。

定理2

Δ を nonsingular, involutive な d 次元の distribution とし、ベクトル場 $f, g_1, ..., g_m$ で invariant であるとする。さらに、distribution span$(g_1, ..., g_m)$ は Δ に含まれているとする。この時、任意の x_0 に対しその近傍 U_0 とそこでの座標変換 $z = \Phi(x)$ が存在し、新しい座標系 z では (1) は次に形

で書き表される。

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \bar{f}_1(\zeta_1,\zeta_2)+\sum_{i=1}^{m}\bar{g}_{1,i}(\zeta_1,\zeta_2)u_i\\ \dot{\zeta}_2 &= \bar{f}_2(\zeta_2)\\ y_i &= h_i(\zeta_1,\zeta_2)\end{aligned}$$

□

定理 3

Δ を nonsingular, l 次の近似 involutive な d 次元の distribution とし、ベクトル場 $f, g_1, ..., g_m$ で l 次の近似 invariant であるとする。さらに、distribution $\mathrm{span}(g_1, ..., g_m)$ は Δ に l次で近似的に含まれているとする。この時、任意の x_0 に対しその近傍 U_0 とそこでの座標変換 $z = \Phi(x)$ が存在し、新しい座標系 z では (1) は次に形で書き表される。

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &\equiv \bar{f}_1(\zeta_1,\zeta_2)+\sum_{i=1}^{m}\bar{g}_{1,i}(\zeta_1,\zeta_2)u_i \pmod{S^{l+1}}\\ \dot{\zeta}_2 &\equiv \bar{f}_2(\zeta_2) \pmod{S^{l+1}}\\ y_i &= h_i(\zeta_1,\zeta_2)\end{aligned}$$

□

定理より上の分解を行なうためには次の 3 つの条件を満たす nonsingular な distribution を見つければよい。

(i)Δ は involutive である。

(ii)Δ は distribution $\mathrm{span}(g_1, ..., g_m)$ を含む。

(iii)Δ はベクトル場 $f, g_1, ..., g_m$ で invariant である。

ここでは、Δ を含み、ベクトル場 $\tau_1, ..., \tau_q$ で invariant な最小の distribution を$<\tau_1, ..., \tau_q|\Delta>$ で表すことにし、これを求めるアルゴリズムを考える。このために次の distribution の列を定義する。

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \mathrm{span}(g_1, ..., g_m)\\ \Delta_k &= \Delta_{k-1}+[f,\Delta_{k-1}]+\sum_{i=1}^{m}[g_i,\Delta_{k-1}]\end{aligned}$$

$\Delta_k = \Delta_{k-1}$ となった時、Δ_k が求める distribution であることが示される。

近似代数の場合には、同様に

(i)Δ は l 次の近似 involutive である。

(ii)Δ は distribution $\mathrm{span}(g_1, ..., g_m)$ を l で近似的に含む。

(iii)Δ はベクトル場 $f, g_1, ..., g_m$ で l 次の近似 invariant である。

となる Δ を求める為に

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\equiv \mathrm{span}(g_1,...,g_m) \pmod{S^{l+1}} \\ \Delta_k &\equiv \Delta_{k-1} + [f, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{m} [g_i, \Delta_{k-1}] \pmod{S^{l+1}}\end{aligned}$$

を計算すれば良い。

18.5 結論

非線形制御のシステムの分解の理論に、近似代数の手法を適用した。原点の近傍では高次項はシステムにあまり影響を及ばさないので、その高次項を打ち切ることにより、近似的にシステムを分解することが可能である。今後は他の理論にも近似代数の手法を適用することを課題としたい。

参考文献

[Kit 93] T.Kitamoto "Approximate Eigenvalues, Eigenvectors and Inverse of a Matrix with Polynomial Entries," Jpn. Indus. Appl. Math., Vol. 11, No. 1, 1994.

[Isi 93] Alberto Isidori "Nonlinear Control Systems,", Springer, 1993.

[Mac 89] J.M.Maciejowski "Multivariable feedback design," Addison Wesley, New York, 1989.

[GCL 92] K.O.Geddes, S.R.Czapor, G.Labahn "Algorithms for Computer Algebra", Kluwer Academic Pub., 1992.

[Sas 88] 佐々木 "近似的代数計算法" 数理研講究録 (Collection of Research Reports, Research Institute of Mathematical Study, Kyoto University) Vol 676, pp.307–319, 1988.

[SSKS 91] T.Sasaki, M.Suzuki, M.Kolar and M.Sasaki "Approximate Factorization of Multivariate Polynomials and Absolute Irreducibility Testing," Jpn. J. Indus. App. Math. Vol.8, No. 3, pp. 357-375, October 1991.