

21.

組み糸の自動生成とその線画について

河野洋敏 (岡山理科大学大学
院) 坂本薫 (岡山理科大学)
仁木滉 (岡山理科大学) 関谷
全 (吉備国際大学)

21.1 はじめに

組み糸の考え方は, 1930 年代のはじめに E.Artin が結び目を研究する一手段として導入した [1]. その後, 1985 年に V.F.R.Jones が結び目理論に組み糸を応用した [2]. そして, 結び目の研究において, J.H.Conway が計算機を使って, 結び目を組織的に作る方法を提案した [3] が, それはすべての結び目に対応していなかった [4]. そこで我々は, 計算機を使って完全な結び目のリストを生成することを考える. V.F.R.Jones に従い, 組み糸を生成し, それを用いて結び目を生成することを考える. この研究では, 組み糸を生成するアルゴリズムを提案する. ここでは, prolog の特徴を有効に利用している. また, 結び目への発展を容易にし, 物理現象を評価する数式への足掛かりともなるだろうと考え, 組み糸を線画する事を試みる. 今回はこの試みのために開発したアルゴリズムと結果の一部を報告する.

21.2 組み糸について

境界線と呼ばれる水平な無限の横線を 2 本取り, それぞれを上境界線, 下の境界線と呼ぶ. 上と下の境界線上にはそれぞれ N 個の固定点が存在する. 上の境界線上のそれぞれの固定点は下の境界線

上にある固定点と糸によって結ばれている。以下の条件1を満たす糸によって結ばれた N 個の固定点の図を N 次の組み糸または、単に組み糸と呼ぶ。

条件1

- (1)上と下の境界線上のそれぞれの固定点は、ただ1つの糸だけによって結ばれている。
- (2)それぞれの糸は、いつも下へ進む。
- (3)3次元空間では、任意の2本の糸は交差しないが2次元空間上へ図を写像するとき、ある交点 が許される。

また、上の境界線上の固定点を $a(1 \leq a < N)$ とし、下の境界線上の固定点を $a'(1 \leq a' < N)$ とすると、ある N 次の組み糸において隣り合う固定点からの糸をただ1ヶ所で交わるように入れ替えた N 次の組み糸を基本の組み糸(図1)と呼ぶ。ここで、糸を入れ替えるのに左回転させて得られる N 次の組み糸を g_a で表し、右回転させて得られる N 次の組み糸を g_a^{-1} で表す。糸を入れ替えるとき、 g_a の a 、または g_a^{-1} の $a+1$ からの糸が交わる交点を上交点、 g_a の $a+1$ 、または g_a^{-1} の a からの糸が交わる交点を下交点と呼ぶ。また、交点が存在しない N 次の組み糸を恒等な組み糸(図1)と呼び、 e で表す。

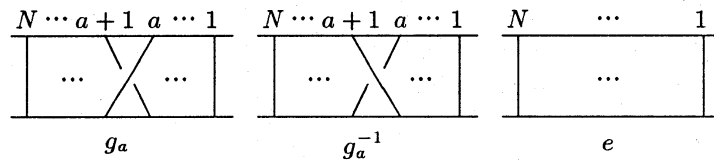


図1. 基本の組み糸と恒等な組み糸

ある N 次の組み糸を上と下の境界線と平行な $n-1$ 本の線で分割する。分割されたそれぞれの境界線の間には、必ず交点があるか、1つも存在しないようにする。そうすると、基本の組み糸または恒等な組み糸の n 個の積として表すことができる。ここで n は1以上の任意の整数である。そこで、それぞれの境界線上に N 個の固定点を持ち、基本の組み糸または恒等な組み糸の n 個の積として表されている N 次の組み糸を、 N^n 次の組み糸と呼ぶ。

21.3 組み糸の生成について

N 次の組み糸を生成するとき、 N 次の組み糸は無限に存在し計算機で生成するには困難である。そこで、 N 次の組み糸を g_a, g_a^{-1}, e の n 個の積で表す N^n 次の組み糸に着目する。 N, n が一定であるとき、 N^n 次の組み糸は有限となり計算機で生成することが可能となる。よって、 N 次の組み糸を N^n 次の組み糸とする事によって、無限に存在する N 次の組み糸の部分的なリストを生成することができ、

n を増加させることによって N 次の組み糸の完全なリストに近づくことができる。

まず、すべての N^n 次の組み糸を生成する。どのような組み糸でも固定点が N 個存在し、n-1 本の水平な線で分割することが出来るなら、生成される組み糸に含まれる。

次に prolog によってこの組み糸の糸を解く。つまり位相的に同値な組み糸を 1 個の組み糸と同一視する事を考える。ここで prolog を用いたのは、組み糸のリスト同士のマッチングが容易に行え、バックトラックを用いた条件の分岐が得意だからである。ある N^n 次の組み糸において、 g_a, g_a^{-1}, e のそれぞれの上の境界線上の固定点を $b(1 \leq b \leq N)$ とし、下の境界線上の固定点を $b'(1 \leq b' \leq N)$ とする。ただし、 b' は、 b から糸を下境界線上に垂直に進めたときの固定点である。ここで、 N^n 次の組み糸を構成している糸を n 本の線分に分けて、条件 2 の下で 1 本ずつ評価し、1~5 の数のリストを生成する (図 2)。

条件 2

- (1) b と b' が結ばれているとき、1 とする。
- (2) b と $b'+1$ を結ぶ糸が上交点を持つとき、2 とする。
- (3) b と $b'+1$ を結ぶ糸が下交点を持つとき、4 とする。
- (4) (2) の条件を満たし、 $b+1$ と b' を結ぶ糸が下交点を持つとき、5 とする。
- (5) (3) の条件を満たし、 $b+1$ と b' を結ぶ糸が上交点を持つとき、3 とする。

そして、生成するリスト中に 2 または 4 が存在すれば、 g_b または g_b^{-1} と置き換え、1 だけが存在すれば e と置き換える。この置換において、2 または 4 が存在するリスト中の位置を b に与えることによって b がどの固定点を示しているか知ることが出来る。この処理をすべての N^n 次の組み糸について行うと、 g_a, g_a^{-1}, e のリストで表される。

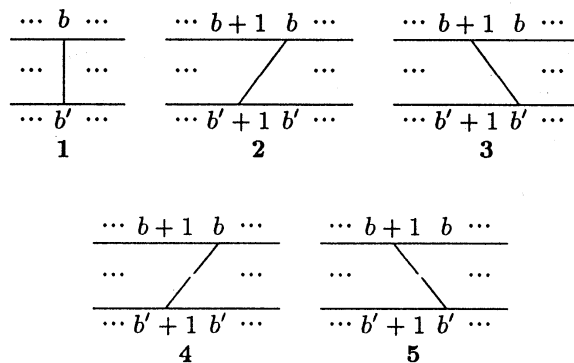


図 2. 糸を n 本に分けた線分と数の対応

表面上異なっている組み糸のリスト同士を以下の条件 3 [5] を使うことによって同値であるとし、1

つの組み糸として同一視する.

条件 3

- (1) g_b^{-1} が存在するとき, その前後に g_b があれば g_b^{-1}, g_b または g_b, g_b^{-1} を e, e に置き換える.
- (2) リスト中の g_b または g_b^{-1} をリストの先頭から順番にならべて e をその後にならべる.
- (3) 順番にならんでいる 3 つの $g_{b+1}^Y, g_b^Y, g_{a+1}^Y$ に対して, g_b^Y, g_{b+1}^Y, g_b^Y の順にならべる. ただし, Y は, 1 または -1 である.
- (4) 隣り合う g_b と g_c ($b > c$) が $|b - c| \geq 2$ を満たすならば, g_c, g_b の順にならべる.
- (5) $g_{b \pm 1}$ の前後がそれぞれ g_b^m, g_b なら, $g_{b \pm 1}, g_b, g_{b \pm 1}^m$ の順にならべる. ただし, g_b^m は, リスト中に g_b が連続して m 個存在することを示し, m は整数である.
- (6) $g_{b \pm 1}^{-1}$ の前後がそれぞれ g_b^m, g_b^{-1} ならば, $g_{b \pm 1}^{-1}, g_b^{-1}, g_{b \pm 1}^m$ の順にならべる.

この処理をするときある N^n 次の組み糸に対して条件 3 を 1 回だけ適応しても本来同値である組み糸が生成出来ないときがある. そこで, 条件 3 を n 回適用することによってすべての同値な組み糸を生成する. そして, 重複したもの, つまり位相的に同値であるものを 1 つだけ除いて他を取り除く. こうして位相的な同値性を考慮したすべての N^n 次の組み糸が生成される.

21.4 組み糸の線画について

位相的な同値性を考慮したすべての N^n 次の組み糸を線画する. 組み糸を線画するために各糸を n 本の線分に分ける. そして, n 本に分けた線分は以下のような条件 4 において線画される. ただし, n 本に分けた線分は端点として上の境界線上の固定点 c ($1 \leq c \leq N$) と下の境界線上の固定点 c' ($1 \leq c' \leq N$) と, 交点が存在するか否かのデータを持つ. もしその線分に交点が存在するならば, 上交点が下交点を持つ.

条件 4

- (1) 線分に交点が存在しないとき, c と c' を端点に持つ線分を描く.
- (2) 線分に交点が存在し,
 - (2.1) 上交点のとき, c と c' を端点に持つ線分を描く.
 - (2.2) 下交点のとき, 線分を 2 本の線に分けて描く.

よって, N^n 次の組み糸が線画される. これをすべての組み糸について線画するために以下の条件 5 を示す.

条件5

1 ページに横5個, 縦7個, 計35個の N^n 次の組み糸を線画する. 35個より多い組み糸が生成されれば35個ごとに2ページ, 3ページ... と線画していく.

このようにして, すべての N^n 次の組み糸を線画する. この方法で, 当初の目的通りに, すべての組み糸を表現することが可能になるであろうと思われる.

参考文献

- [1]E.Artin, Theorie der Zopfe, Hamburg Abh.,1925.
- [2]V.F.R.Jones, A polynomial invariant for links via von Neumann algebras, Bull.Amer.Math.Soc,1985.
- [3]J.H.Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, Pergamon Press,1970.
- [4]村杉邦男, 組み紐の幾何学, ブルーボックス,1982.
- [5]Zhong-Qi Ma, Yang-Baxter Equation and Quantum Enveloping Algebras, World Scientific,1993.
- [6]杉村邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社,1993.