

## 26.

# 数式処理による 2 変数代数曲面の追跡 Hessian が零になる点の近傍の状態

一松 信 東京電機大学・理工

(Sin Hitotumatu)

笠嶋友美 上智大学・理工

(Tomomi Kasajima)

**Abstract.** Using the graphics functions of two different kinds of computer algebra systems, Risa/asir and Mathematica, we show some 3-dimensional graphics of  $z = f(x, y)$  belongs to  $C^2$ , especially at the point  $(x_0, y_0)$  satisfied  $Hessian = H(x_0, y_0) = 0$  where  $H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial xy})^2$ . To see this structure, there is the Peron's example:  $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$  [1]. This function satisfied (1)  $z = y^2$ , (2)  $z = 2x^4$  when  $x = 0, y = 0$  respectively and  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , even when  $f(x, y)$  assumes minimum on each straight line passing through the origin. But  $Hessian = 0$ . We show the graphics why that reason occurs in this case by using above two systems. Later we see that its bottom-line is given by (3)  $x = t, y = 3t^2/2, z = -t^4/4$ . This 3-dimensional curve is with opposite direction to above two curves with z-axis. This is merely an example, and we shall show other interesting example in a coming report.

## 26.1 はじめに

曲面の明解な描画のためには、与えられた数式の数学的特徴を把握しておく、思いの外良い描画が描ける場合がある。数式処理システムでは数式のさまざまな演算の他に、グラフィックスの機能も搭載されているものが多い。この点 数式処理システムに組み込まれているグラフィックス機能を利用しての描画は、同時に関連する式の演算を行ないながら、曲面の状況を探索できる特徴がある。

次節に示すように Hessian=0 の場合の一例で 2 変数代数関数

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

をとりあげる。この関数は Peano's Example と呼ばれている [1]。

数式処理におけるグラフィクス機能には、それぞれのシステムによって得意とするところがあり、本稿では、等高線、陰関数の描画には抜群の Risa/Asir を利用、また 3 次元曲面、曲線の描画には、Mathematica を利用した。Maple でも面白い描画が出来たが、出力装置が整わなかったので見送ることにした。

単純に見える式の形に似合わず特に原点の近傍では、微妙な数値に敏感に変動する非常に描きにくい曲面である。[1] では「たとえ、点  $P_0$  を通るすべての直線の上で  $f(x, y)$  の極小を与える点であっても  $P_0$  は  $f(x, y)$  の極小を与える点とはならない。」例として紹介されている。

## 26.2 Hessian

Hessian は微積分では周知の式であるが、見ての通り手計算では瞬間的とはいえない。さて、2 変数の関数  $z = f(x, y)$  は  $C^2$  級の関数で、 $z$  の表す曲面上の点  $(x_0, y_0)$  は停留点であるとする。点  $(x_0, y_0)$  の極値、鞍点の判定にはつぎの式で示す Hessian =  $H(x, y)$  が利用される。

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial xy} \right)^2$$

$H(x_0, y_0) \neq 0$  の場合は (付加する条件  $f_{xx}$  によって) 曲面の形状が極大 (小) と定まり、あるいは鞍点のいずれかに対応する。いずれもその図形的区別は明解である。しかし  $H(x_0, y_0) = 0$  の場合はこれらのいずれでもなく、対応する曲面の一般的な形状もまちまちである。

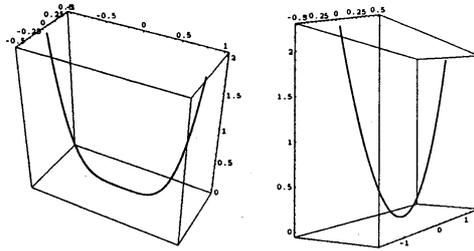
## 26.3 計算結果からの分析

この関数の特徴は、 $H(0, 0) = 0$  であるにかかわらず、微積の基本的な手順で計算すると、次の節で示されるように、原点は極小点であるかのようである。

原点における  $z$  の  $x, y$  に関する偏微分係数はそれぞれ零となる。即ち  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  である。さらに (no.1)  $x = 0$  のとき  $z = f(0, y) = y^2$ , (no.2)  $y = 0$  のとき  $z = f(x, 0) = 2x^4$  である。原点は停留点である。

一変数 (no.1), (no.2) はそれぞれ、原点で極小値をとる。(no.1), (no.2) の空間曲線を Mathematica

で描きだす。



原点を通る曲面  $z$  上の空間曲線, 原点は極小点であるかのように見える。

左図 : (no.2)  $f(x, 0) = 2x^4$ , 右図 : (no.1)  $f(0, y) = y^2$

## 26.4 グラフィクスの観点から

曲面の形状を調べるためには、3次元グラフィクスに描き出すのが効果的である。しかしながら、この2変数4次式  $z = (y - x^2)(y - 2x^2) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$  の表す3次元曲面はことに原点の付近では、微妙な数値の変動で曲面の形は大きく変動してくる。 $z = f(x, y)$  を実際に数式処理のグラフィクス機能を利用して描くことにする。

### ■ Mathematica での画描

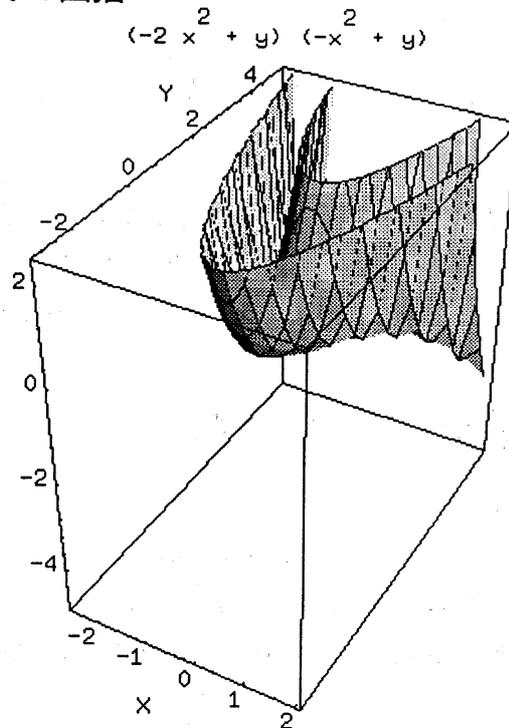
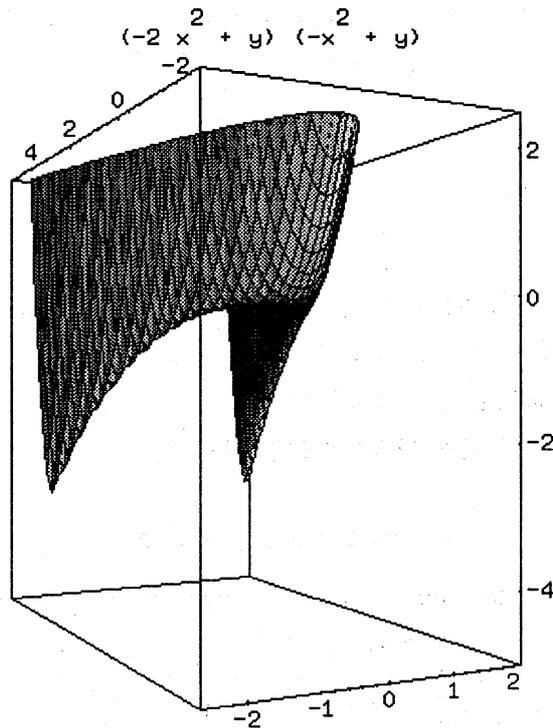
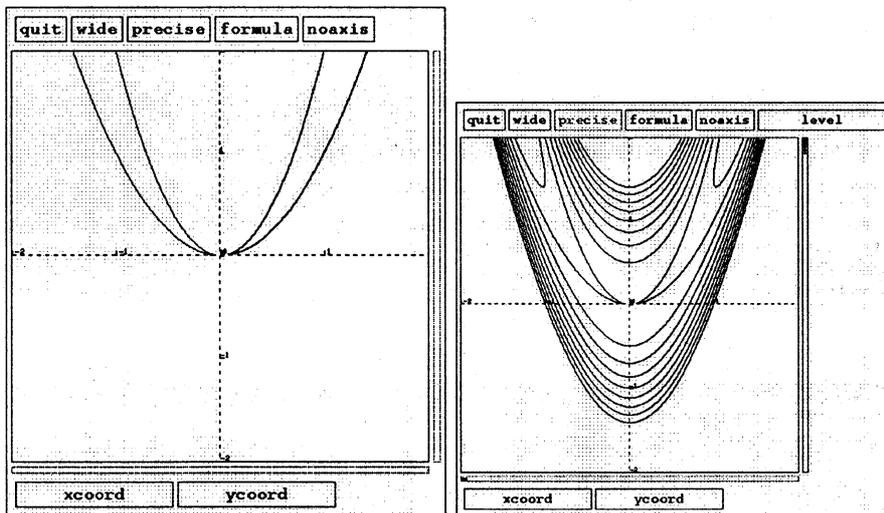


図 :  $z$  は峡谷のある曲面



図： $z$ を下側から眺めた曲面

### ■ Risa/ Asir での画描



左図： $z = f(x, y)$ の陰曲線、右図： $z = f(x, y)$ の等高線

原点を出発点として  $z = 0$  平面上に 2つの放物線が左右にありその間溝になっている。また原点をはなれるに従って溝が深くなってゆく。溝の最低点をたどってゆくと、原点を通り  $z$ -軸の負の方向に一本の曲線が存在していることが「見て」確認される。

前述の  $z$  軸に正の方向の 2つの曲線 (no.1),(no.2) のほかに (no.3)  $z$ -軸に負の方向に向かう別の

曲線 (no.3) が存在している。従ってもし  $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$  のような形状の地形があり、原点の位置に泉が噴出しているとする、水は溜ることはなく、溝を通して流れていくであろう。

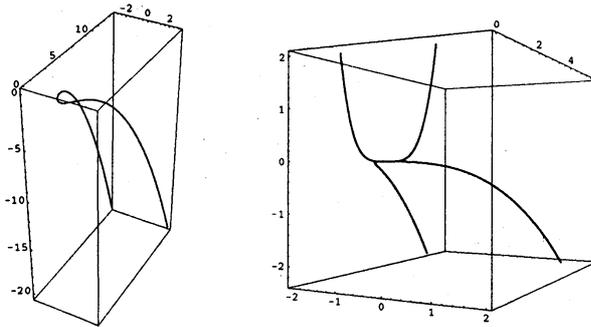
## 26.5 おわりに

$x-y$  平面に平行または垂直な観点からでは、原点が極小値であるかの域を脱しない。結局式だけみていたのでは、実際の形はつかみにくい。グラフィクスを描くことによって、より曲面の状態がはっきりしてくる。数学教育の面にも役にたつことと思う。

なお、講演後に見つけたが曲面の原点を通る空間曲線は

$$x = t, y = 3t^2/2, z = t^4/4$$

であることが確認された。Mathematica で描くとつぎの左図のようになる。



左図：(no.3) の空間曲線  $x = t, y = 3t^2/2, z = t^4/4$

右図：(no.3) と (no.2) を同時に描く。原点で接線  $x$  軸を共有している。

## 参考文献

- [1]一松信 執筆代表, 新数学事典 大阪書籍 1979年初版、1986年初版5刷、第4章解析学 3節、476頁.
- [2]S.Wolfram, Doing Mathematica, Wolfram Reseach, 1987.