数理解析研究所講究録
941巻 1996年 15-24

3.

三斜内容三圓術(Malfattiの問題)の数式処理－有理関数体上のタワーの構成

竹島　卓(富士通情報研)
穴井宏和(富士通情報研)

3.1 前書き

「三斜内容三圓術」は和算家安島直圓が「不朽算法(1799年)」に論じ、解答を与えた幾何の問題である。西洋ではMalfattiの問題(1803年)として知られる。現代の数学の問題としては、代数的整数論の問題と捉えることができ、有理数上の有理関数数体の代数的拡大体の表現を求めることに帰着する。しかし数学的には自明な問題とは言え、有理数体上の代数的拡大体を具体的に扱うことでさえ大変困難な問題であるのに、有理関数体上の代数的拡大体を扱うことは遥かに難しいことは想像に難くない。これを現代の計算機代数でどう扱うことができるか、富士通研究所で開発した数式処理システムRisa/Asirの超高速のグレブナ基底パッケージを利用した解法により示す。本論文の目的は、文字で表されるパラメータを含むことが多い初等幾何学の問題を例題にして、数式処理システムの能力が現時点でどの程度かを読者に知っていただくことにある。本論文ではグレブナ基底を多用したが、それはグレブナ基底が多変数の多項式を扱う上で大変融通の効く便利な道具であることと、Risa/Asirに実装されているものが高速で十分実用的であることに依っており、個々の計算の特殊事情によっては他の数学的方法が計算上有利な場合もあることをお断りしておく。なお、Risa/Asirはanonymous ftpによりつぎのところから取得できるので、試して見て頂きたい。

endeavor.fujitsu.co.jp[164.71.1.131],
/pub/isis/asir (V. 950831, newest version), /pub/isis/asir-old (V. 940420).

3.2 問題の説明

「3角形の中に3個の円を、どの円も互いに他の2つの円に外接し、しかも3角形の2辺に内接するように配置せよ。」

この問題は3角形 ABC の内接円の半径を1と規格化すると、3変数+3パラメータ、4制約式（1つはパラメタ間の制約式）の代数制約問題を解くことに帰着できる。x^2, y^2, z^2をそれぞれ 角 A, 角 B, 角 C の側にある円の半径、$l = 1/tan(\mathrm{A}/2), m = 1/tan(\mathrm{B}/2), n = 1/tan(\mathrm{C}/2)$ と置くと、次の方程式となる。

$$f_1(x,y;l,m) = lx^2 + my^2 + 2xy - (l+m) = 0, \tag{1}$$

$$f_2(y,z;m,n) = my^2 + nz^2 + 2yz - (m+n) = 0, \tag{2}$$

$$f_3(x,z;l,n) = nz^2 + lx^2 + 2zx - (n+l) = 0. \tag{3}$$

ここで、l, m, n はパラメータであり次式を満たす。

$$f_4(l,m,n) = lmn - (l+m+n) = 0. \tag{4}$$

この方程式を解き、x^2, y^2, z^2を l, m, n で表すことが問題である。

この問題にはつぎのような対称性の高い美しい解答が知られている。

$$\{x^2 = \frac{bc}{2a},\ y^2 = \frac{ca}{2b},\ z^2 = \frac{ab}{2c}.\} \tag{5}$$

ただし、

$$a = 1 + tan(\mathrm{A}/4) = 1 - l + \sqrt{1+l^2}, \tag{6}$$

$$b = 1 + tan(\mathrm{B}/4) = 1 - m + \sqrt{1+m^2}, \tag{7}$$

$$c = 1 + tan(\mathrm{C}/4) = 1 - n + \sqrt{1+n^2}. \tag{8}$$

3円の半径を表す変数を、パラメタの式として一般的に表すのは結構難しく、特にこのような対称性を持ったきれいな式が知られるまでには130年ぐらい掛かったそうである。数式処理でこのようなきれいな解を得ることがここでのひとつの目標である。

3.3 方針

1. $\mathbf{Q}$ 上超越的なパラメータ l, m, n は代数的に独立ではなく、$\mathbf{Q}(l,m,n) = \mathbf{Q}(m,n)$ であることに注意する。ここで、m, n は互いに代数的に独立な超越元である。

2. 変数を消去して x が単独で満たすべき多項式 $g(x;m,n)$ を導く。他の変数は x の有理式として表される。

3. 式 $g(x;m,n)$ の分解体を求める。$K=\mathbf{Q}(m,n)$ の拡大体上で一次因子に因数分解する。

4. Galois 群を調べ、可解性・作図可能性を判定

5. 根を (平方) 根号で表す。

6. どの根がもとの問題の解か検討する。既知の結果とも比較する。

3.4 技術要素と問題点

パラメータを含んでいるため**有理関数体とその拡大体上**で演算する必要がある。現時点での高度の数式処理技術を持ってしても、大きな計算量を覚悟する必要がある。

1. 変数消去⇒ もっぱらグレブナ基底計算による

2. 1変数多項式の分解体の計算⇒Trager のノルム法による
   - 代数拡大のノルム計算⇒ 終結式による (この計算が一番大きい)
   - 基礎体上の因数分解—多変数多項式の因数分解
   - 代数的拡大体上の GCD 計算⇒ グレブナ基底による

3. Galois 群の計算— 置換群として表現

4. 代数的拡大体の表現法— 逐次拡大か多根並列添加か

— Galois 理論、代数的整数論的考察が必要

— 根号表現— 二重根号外しなど

5. 平面幾何の代数的形式化の限界— 正負判定など

3.5 数式処理による解法： 変数の消去

使用数式処理システムおよび計算機環境はつぎのとおりである。

• Risa/Asir: version 950831 • OS: Linux, kernel version 1.2.8

• HW: FM/V-BIBLO(FMV-475NU/S), i486 DX4 75MHz, 24MB Memory

さて、変数の消去には、終結式や擬除算による Wu-Ritt の方法などがあるが、ここではもっぱら、Risa/Asir の G-base 計算パッケージを利用する。多項式集合 $\{f_1(x,y,l,m), f_2(y,z,m,n), f_3(x,z,l,n), f_4(l,m,n)\}$ の変数順序 $z \succ y \succ x \succ l \succ m \succ n$、純辞書式項順序による G-base(8.78 秒, 827392 Bytes Used) は２２本の多項式からなり、その中に唯一 x と m,n のみを含む x の８次多項式、すなわち、基礎体 $\mathbf{Q}(l,m,n)=\mathbf{Q}(m,n)$ 上の x の最小多項式 (x の満たすべき方程式) がある。また多少不正確な言い方ではあるが、y は純辞書式順序の G-base の性質により x の７次多項式として表され、

z は x と y とによって表されている。

$$\mathrm{g}(\mathrm{x}^2;\mathrm{m},\mathrm{n}) = 4(m+n)^2x^8 - 8(m+n)\{nm^2+(n^2-n)m+1\}x^6+$$
$$4\{n^2m^4+(3n^3-3n^2+n)m^3+(n^4-3n^3+3n-1)m^2+(n^3+3n^2-n)m-n^2\}x^4+$$
$$4mn(nm-1)\{(n^2-n+1)m^2-(n^2-n)m+n^2\}x^2+n^2m^2(nm-1)^2 \tag{9}$$

これは、x^2 に関する4次多項式なので、x^2を改めて x と置き換え、以後その4次多項式 $g(x;m,n)$ を因数分解することが本質的になる。

1. $g(x;m,n)$ は 係数体 $\mathbf{Q}(m,n)$ ($\mathbf{Q}$-係数の m,n の有理関数体) 上既約である。
2. 可解性は明らか(4次多項式)
3. 作図可能か?
4. 可能ならば平方根号を用いた根の表示を求む。注:4次多項式の根の公式からは作図できない。 $\Rightarrow$ $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ がすべて現れる!

3.6 数式処理による分解体の計算

Tragerのノルム法:Kを体、αをK上代数的な元とする。$f \in K(\alpha)[x]$ のK上のノルム $N_{K(\alpha)/K}(f)$ が無平方のとき、そのK上の既約分解を$N_{K(\alpha)/K}(f) = n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$とおけば、$\{g_i = gcd(f, n_i)\}_{i=1\dots r}$ はfの $K(\alpha)$ における既約分解 $f = g_1 \cdot g_2 \cdots g_r$を与える。

以下、$K = \mathbf{Q}(m,n)$ とし、Kの拡大体に対して Trager の方法を適用する。

3角形式の準備:x_1, x_2, x_3, x_4をそれぞれつぎに定義する g_1, g_2, g_3, g_4の根とする。

$$g_1(x;m,n) = g(x;m,n), \tag{10}$$
$$g_2(x;x_1,m,n) = \mathrm{sdiv}(g_1(x;m,n),(x-x_1)), \tag{11}$$
$$g_3(x;x_1,x_2,m,n) = \mathrm{sdiv}(g_2(x;x1,m,n),(x-x_2)), \tag{12}$$
$$g_4(x;x_1,x_2,x_3,m,n) = \mathrm{sdiv}(g_3(x;x_1,x_2,m,n),(x-x_3)). \tag{13}$$

ここに、$\mathrm{sdiv}(f,g)$ は fを gで除した商を与える関数である。

$K(x_1)$ 上の x_2の最小多項式を以下のようにして求める。

1. $g_2(x;x_1,m,n)$ の変数 x を変数変換 $x \to x+x_1$ して、$g_2(x+x_1;x_1,m,n)$ とし、
2. その拡大 $K(x_1)/K$におけるノルムを求める。ノルムは体K上の多項式となり、その各既約因子は $g_2(x+x_1;x_1,m,n)$ の $K(x_1)$ 上の既約因子に対応する。
3. ノルムを体Kで因数分解する。
4. ノルムの各因子において、逆の変数変換 $x \to x-x_1$を施した上、$g_2(x;x_1,m,n)$ との gcd を取ることにより $K(x_1)$ 上の既約因子を得る。

実際のノルムの計算には終結式を用いる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}_{K(x_1)/K}(g_2(x+x_1;x_1,m,n)) \\
&\quad = \mathrm{res}_{x_1}(g_2(x+x_1;x_1,m,n), g_1(x_1;m,n)) \quad (105\,\text{秒}) \\
&\quad = 2^{14}(m+n)^4 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \quad (15.25\,\text{秒})
\end{aligned} \tag{14}
$$

ここに、

$$
\begin{aligned}
N_2 &= (m+n)^4x^4 - \\
&\quad 2(m^2+1)(m+n)^2\{(nm-1)^2+n^2+1\}x^2 + n^2(m^2+1)^2(nm^2-2m-n)^2,
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
N_3 &= (m+n)^4x^4 - \\
&\quad 2(n^2+1)(m+n)^2\{(nm-1)^2+m^2+1\}x^2 + m^2(n^2+1)^2(n^2m-m-2n)^2,
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
N_4 = (m+n)^2x^4 - 2(nm-1)^2(m^2+n^2+2)x^2 + (nm-1)^4(m-n)^2 \tag{17}
$$

$g_2(x;x1,m,n)$ のノルムが無平方、かつ体 K 上で 3 つの既約因子に分解する。よって、

$\Rightarrow$ $g_2(x;x1,m,n)$ は $K(x_1)$ 上で 3 つの既約因子を持ち、

$\Rightarrow$ $g(=g_1)$ は 1 根 x_1 の添加で一次因子に分解される。

そこで、分解体を $K_s = K(x_1)$ と書くことができる。

次に、g_2 の 3 つの因子を拡大体 $K(x_1)$ 上の gcd により実際に求める。たとえば、

$$
h_2(x;x_1,m,n) = \mathrm{gcd}([N_2]_{x\to x-x_1}, g_2(x;x_1,m,n)) \tag{18}
$$

は N_2 に対応する $g_2(x;x_1,m,n)$ の $K(x_1)$ 上の既約因子を与える。N_3, N_4 に対しても同様である。

有理数体の拡大体上の gcd は Risa/Asir にはチューンされた形で標準装備されているが、有理関数体上の gcd は備わっていない。(他のシステムにあるかどうか不知。) しかし、Risa/Asir の G-base を使えばこの計算が結構高速に実現できる。

式 (18) の gcd は、$\{[N_2]_{x\to x-x_1}, g_2(x;x_1,m,n), g_1(x_1;m,n)\}$ の $x \succ x_1$ による lex(純辞書式)G-base により求まる。(lex G-base を求めるには、いろいろな方法がある。)

$$
\begin{aligned}
h_2(x;x_1,m,n) &= m(n-m)(m+n)((n^2-1)m-2n)x + 4(m+n)^2x_1^3 - \\
&\quad 2(m+n)((3n+1)m^2+(3n^2-3n)m+4)x_1^2 + \{(n+1)^2m^4 + 2n(3n^2-2*n+1)*m^3 + \\
&\quad n(n^3-6n^2-3n+8)m^2 + 4n^2(n+2)m - 4n^2\}x_1 + mn\{(n^2-1)m^4 - n(n^2+n+2)m^3 + \\
&\quad n(n+1)^2m^2 - n^2(n+3)m + 2n^2 + 2n\} \quad (58.2\,\text{秒})
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
h_3(x;x_1,m,n) = \ldots\text{省略}\ldots(59.54\,\text{秒}) \tag{20}
$$

$$
h_4(x;x_1,m,n) = \ldots\text{省略}\ldots(49.38\,\text{秒}) \tag{21}
$$

これらはすべて x の 1 次式で、結局、

$$
g(x;m,n) = C(m,n) \times (x-x_1)h_2(x;x_1,m,n)h_3(x;x_1,m,n)h_4(x;x_1,m,n) \tag{22}
$$

と gを分解する。ここに、$C(m,n)$ は係数体 $\mathbf{Q}(m,n)$ に属する。

3.7 Galois群の決定

x_1は分解体K_sの原始元である。よって、原始元である x_1 を他の根x_2,x_3,x_4に写したときにそれら他の根が別のどの根に移るかを調べれば、gの Galois 群は根の置換群として容易に定まる。たとえば、「$h_3(x;x_2,m,n)$ の $h_2(x_2;x_1,m,n)$ による正規形が因子 $h_4(x;x_1,m,n)$ をもつ$\Leftrightarrow$ 根の置換 $x_1\to x_2$ によって $x_3\to x_4$」

Asir の正規形計算関数は p_true_nf() であるが零判定のみには p_nf() を用いるのが速い。上記は、

$$\mathrm{p\_nf}(h_3(x;x_2,m,n),[h_2(x_2;x_1,m,n),g_1(x1;m,n),h_3(x;x1,m,n)],[x_2,x_1,x],2) \tag{23}$$

が 0(零) になることで確かめられる (1.68 秒)。こうして次の表を得、Galois 群が決定できる。

根の行き先表

x_1	x_2	x_3	x_4	置換
x_1	x_2	x_3	x_4	1
x_2	x_1	x_4	x_3	σ
x_3	x_4	x_1	x_2	τ
x_4	x_3	x_2	x_1	$\tau\sigma$

Galois 群

V_4 (Klein の Vierergruppe)

$\mathrm{Gal}(g)=\{1,\sigma,\tau,\tau\sigma\}$

ここに、$\sigma:=(12)(34),\tau:=(13)(24)$.

3.7.1 判別式

d 次多項式 $f(x)$ の根を $x_1,\ldots,x_d$とするとき、判別式は $\mathrm{Discr}(f(x))\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{lc}_x(f)^{2d-2}\times\Pi_{i\neq j}(x_i-x_j)$ で定義され、実際には終結式により次のように計算される。$\mathrm{Discr}(f(x))=\mathrm{lc}_x(f)^{-1}\times\mathrm{res}_x(f,f')$.

$g(x;m,n)$ の判別式を計算して見よう。

$$\begin{aligned}\mathrm{Discr}(g(x;m,n))&=2^{12}m^2n^2(m-n)^2(m+n)^2(n^2+1)^2(m^2+1)^2\times\\&(nm^2-2m-n)^2(n^2m-m-2n)^2(nm-1)^4\qquad(7.82\text{ 秒})(+\text{因数分解 }0.78\text{ 秒})\end{aligned}\tag{24}$$

判別式が $\mathbf{Q}(m,n)$ 上平方ゆえ Galois 群の一般論から、$\mathrm{Gal}(g)$ は A_4の部分群。また、gは 1 根添加で 1 次因子に分解するゆえ、群の位数は 4 。

これらの観察からも、$\mathrm{Gal}(g)$ は位数 2 の 2 つの巡回群の直積、すなわち、$V_4=Z_2\times Z_2$であることが分かる。

3.8 部分群と中間体

3.8.1 正規部分群

拡大 K_s/K の Galois 群は位数 4 の群 V_4 であることが分かった。よって K_s は K 上の 2 次体 K' を部分体としてもつ。これにより作図可能と分かる。複数あるこの体を決定しよう。まず、$G = \mathrm{Gal}(g)$ には明らかに 3 つの独立な位数 2 の正規部分群 G_{12}, G_{13}, G_{14} がある。

<u>正規部分群</u>

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & / & | & \backslash & \\ G_{12} & & G_{13} & & G_{14} \\ & \backslash & | & / & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} G = \{1, \sigma, \tau, \tau\sigma\}, \\ \\ G_{12} := \{1, \sigma\},\ G_{13} := \{1, \tau\},\ G_{14} := \{1, \tau\sigma\} \end{array}$$

3.8.2 中間体

部分群 G_{12} に対応する中間体 K_{12} を求めよう。まず、G_{12} による K_s の原始元 x_1 の軌道 B_{12} は直ちに

$$B_{12} = \{x_1, x_2\} \tag{25}$$

と分かる。そこで、

$$f_{12}(x) := (x - x_1)(x - x_2) \tag{26}$$

と置けば、

補題： K に f_{12} の係数をすべて添加した体は K_{12} に一致する。

が成り立つ。特に、f_{12} の係数中 K に含まれないものが K_{12} の原始元となる。明らかに、原始元として

$$p_{12} := -(x_1 + x_2) \tag{27}$$

がとれる。p_{12} の K 上の最小多項式を $m_{12}(x)$ とすると、$m_{12}(x)$ は $\{x + (x_1 + x_2), g_1(x_1), h_2(x_2; x_1)\}$ の変数順序 $x_2 \succ x_1 \succ x$ の lex G-base により得られる。

$$\begin{aligned} m_{12}(x) = {} & (m+n)^2x^2 + 2(m+n)(nm^2 + n^2m - nm + 1)x + \\ & n\{nm^4 + (2n^2 - 2n)m^3 + (-2n^2 + 2)m^2 + (2n^2 + 2n)m - n\} \quad (0.53\ 秒) \end{aligned} \tag{28}$$

これは2次式であるから判別式を計算して拡大に必要な添加を得る。

$$\mathrm{Discr}(m_{12}(x)) = 2^2(n^2+1)(m+n)^2(nm-1)^2 \tag{29}$$

これから直ちに、

$$K_{12} = K(-(x_1+x_2)) = K(x_3+x_4) = K(\sqrt{n^2+1}) \tag{30}$$

同様にして K_{13}, K_{14}が得られる。

$$K_{13} = K(-(x_1+x_3)) = K(x_2+x_4) = K(\sqrt{m^2+1}), \tag{31}$$

$$K_{14} = K(-(x_1+x_4)) = K(x_2+x_3) = K(\sqrt{(n^2+1)(m^2+1)}). \tag{32}$$

このとき、

$$p_{12} = \frac{-(mn^2+m^2n-mn+1) \pm (mn-1)\sqrt{n^2+1}}{m+n} \tag{33}$$

以上より、Galois 群とその正規部分群が作る束に対応した体の束が得られる。

<u>中間体 K_{12}, K_{13}, K_{14}</u>

$$\begin{tikzcd}
 & K_s \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K_{12} \arrow[dr, dash] & K_{13} \arrow[d, dash] & K_{14} \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

どの二つも K上互いに線形独立な2次拡大である。よって、

$$K_s = K(\sqrt{n^2+1}, \sqrt{m^2+1}) \tag{34}$$

これによって、原問題の「美しい解答」に現れた2つの独立な2次拡大、式(7,8)、が機械的な計算によって得られたことになる。

3.9 根の表現

これまでの議論から、原方程式が可解であり、しかも2次拡大のみで根が構成できる(すなわち作図可能である)ことが分かっている。最終段階として根の根号(平方根号)による表現を求めて見よう。

3.9.1 逐次拡大表現

まず、どのような場合でも通用する逐次拡大表現を求める。すでにKの2次拡大のひとつである中間体K_{12} の原始元p_{12}の K上の平方根号による表現は式(33)に得られている。拡大 K_s/K_{12}に対応する根の表現を求めよう。$p_s := x_1$が K_sの原始元である。そこで、p_sの $K(p_{12}) = K_{12}$上の最小多項式 $m_s(x; p_{12}, m, n)$ を求める。それには、$\{x - x_1, p_{12} + x_1 + x_2, g_1(x_1), g_2(x_2; x_1), m_{12}(p_{12})\}$ から x_1, x_2を消去し、x, p_{12}を残せばよい。ブロックオーダ $\{x_1, x_2\} \succ \{x, p_{12}\}$ で G-base を計算して次

を得る。(1.12 秒)

$$m_s(x) = 2(m+n)x^2 + 2(m+n)p_{12}x - m(n-1)(m+n)p_{12} + mn((-n+1)m^2 + nm - n) \quad (35)$$

これから、p_sが p_{12}(と m, n) と平方根号を用いて次のように表される。

$$p_s = \frac{-(m+n)p_{12} \pm \sqrt{-(m^2+1)\{(m+n)p_{12} + n(nm^2 - 2m^2 - 2nm + n)\}}}{2(m+n)} \quad (36)$$

3.9.2 多根同時添加表現

ここに述べた逐次拡大表現は平方根の分枝の取り方によらず根の正しい表現を与えるが、2 重根号表現となるため人間に取って見やすいとは言えない。分解体 K_sが 2 つの独立な拡大によることが分かっているので、2 重根号無しの根の表現を与えることが可能である。そのような根の表現を求めて見よう。

多少天下り的であるが、式 (7,8) に合わせて、$b := 1 - m + \sqrt{m^2+1}$, $c := 1 - n + \sqrt{n^2+1}$ と置き、$g(x; m, n) = 0$ から m, n を消去して (7.65 秒)、$g_{bc}(x; b, c)$ を得る。これは、$\mu = \sqrt{m^2+1}, \nu = \sqrt{n^2+1}$と置いたとき、$K(b, c) = K(\mu, \nu)$ かつ $m, n \in \mathbf{Q}(b, c)$ とできるように b, c を決めたわけである。この $g_{bc}(x; b, c)$ を $\mathbf{Q}(b, c)$ 上で因数分解することにより $\mathbf{Q}(b, c)$ 上の根の表現が得られる。

$$\begin{aligned} g_{bc}(x; b, c) = {} & \{4(c-1)(b+c-2)x + b(c-2)(-cb+2)\} \\ & \times\{4(b-1)(b+c-2)x + c(b-2)(-cb+2)\} \\ & \times\{4(c-1)(b-1)(cb-b-c)x + (c-2)(b-2)(-cb+2b+2c-2)\} \\ & \times\{4(cb-b-c)x + bc(-cb+2b+2c-2)\} \quad \text{(4.89 秒)} \end{aligned} \quad (37)$$

正攻法としては $\mathbf{Q}(b, c)/\mathbf{Q}$ の拡大に関するノルムを使い、$g(x; m, n)$ の因数分解を行なう。

最後の因子から得られる根が、最初にあげた根の表示に対応することをつぎに示そう。

3.9.3 人手による根の表示との比較

式 (6) に合わせて、$a = 1 - l + \sqrt{l^2+1}$と置くとき、つぎの 2 つの式は同じか否か？

$$x = \frac{bc}{2a} \quad (38)$$

$$x = \frac{bc(bc - 2b - 2c + 2)}{4(bc - b - c)} \quad (39)$$

このことを調べるために、

$$k = \frac{(bc - 2b - 2c + 2)}{2(bc - b - c)} \quad (40)$$

と置き、

$$k = 1/a \tag{41}$$

が成り立つかどうかを調べよう。$\{2(bc-b-c)k-(bc-2b-2c+2), lmn-l-m-n, a^2-2a-2l(1-a), b^2-2b-2m(1-b), c^2-2c-2n(1-c)\}$ の変数順序 $b \succ c \succ l \succ m \succ n \succ a \succ k$ の lex G-base を計算すると、それは $(n^2+1)(ka-1)((k-1)a-2k+1)$ を含む。これから、

$k = 1/a$ あるいは $k = (a-1)/(a-2)$

となるが、実の平面幾何の問題として $1 < a < 2$ かつ $0 < x < 1$ なので、後者は不適当。よって、代数的には決定できないが実の図形の問題とした場合には $k = 1/a$ が成立し、数式処理である程度機械的に解いた結果は人手によるものに一致する。

3.10 まとめ

必要な主だった計算をまとめる。

（１）有理関数体の４次の拡大体上での因数分解—終結式と有理数体上の因数分解

（２）有理関数体の拡大体上での GCD 計算—G-base 計算

（３）有理関数体の拡大体上で正規形の計算—G-base 計算

これらの計算に Risa/Asir は十分効果的であった。Katura6 や Symplectic 数値積分公式の導出などに比べると、Risa/Asir にとっては比較的小さな問題であったといえる。

本稿で題材とした「三斜内容三圓術」は、まったく自明というのでもなく、また数式処理システムにとってまったく手が出せないというのでもなく、代数計算への数式処理機能の使い方が示せる例題として手頃であった。規模の大きな問題に対するグレブナ基底の計算には種々のノウハウがあり、本稿では説明し切れなかった。実際、上手くすれば本稿で参考に示した計算時間はさらに短縮できる。こういったノウハウを蓄積し共有して行くことが、数式処理の今後に取って大切であろう。