

種数 2 の代数曲線の代数対応による 実乗法の構成

早大理工: 橋本喜一郎

1 はじめに. (問題と動機)

Wiles (および Taylor) による \mathbb{Q} 上の楕円曲線に対する谷山-志村予想の (条件付き) 解決は arithmetic geometry における新時代の幕開けを告げるものであったと言えよう — これによって, 我々はその関心を次の段階に向けることが可能になったのである。すなわち, \mathbb{Q} 上の楕円曲線の次に取り組むべき対象は, 素朴に考えれば, 次の何れかであろう:

- 1) 代数体 (特に 2 次体) 上の楕円曲線,
- 2) \mathbb{Q} 上の種数 2 の代数曲線,
- 3) \mathbb{Q} 上のアーベル曲面.

しかし, これらも良くみると各々がその内部構造により細分され, それによって数論的構造が異なってくる。実は, これらの Hasse-Weil 型 L-関数に関する予想を問題にする場合, 上記の三種の対象は, 同一の概念で記述される subcategory を有する。この共通概念は, Ribet により導入され, "GL(2)-type" と呼ばれる。

定義. \mathbb{Q} 上のアーベル多様体 A は, その \mathbb{Q} 上定義された自己準同型のなす \mathbb{Q} -algebra $\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ が $[\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q} : \mathbb{Q}] = \dim(A)$ を満たす代数体であるとき, "GL(2)-type" と呼ばれる。

但し, ここで 1) に対しては, 代数体 K 上定義された楕円曲線 E に対して, $A := \text{Res}_{K/\mathbb{Q}}(E)$ が, また 2) に対しては, \mathbb{Q} 上の種数 2 の代数曲線 C に対して, その jacobian variety $A := \text{Jac}(C)$ が, GL(2)-type であるかどうかを問題にする。

Modular Conjecture (Serre-Ribet): \mathbb{Q} 上のアーベル多様体 A が GL(2)-type ならば, A は modular curve $X_1(N)$ の jacobian $J_1(N)$ の因子と \mathbb{Q} -上 isogenous である。

この予想の根拠となる事実の説明および部分的解決に関しては, 本報告集の百瀬氏の稿を参照して頂きたい。

本稿の目的は, (\mathbb{Q} 上の) アーベル曲面 を代数曲線の立場から記述し, GL(2)-type となる実例を与えることであるが, 主に Mestre [9] の仕事の紹介である。ただし, [9] の基礎となっている Humbert, Griffith-Harris の古典的な仕事も, 日本の数論の間ではそれほど知られていないと思われるので, ここに簡単にまとめて紹介する。

A を複素数体 \mathbb{C} 上の simple な 2 次元の主偏極付きアーベル多様体とし, $\text{End}(A)$ をその自己準同型のなす環とする。このとき, \mathbb{Q} -algebra $\text{End}^{\circ}(A) := \text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は以下の何れかになる。

- (i) 4 次の CM-field,
- (ii) \mathbb{C} 上の 不定符号四元数体,

(iii) 実 2 次体, (iv) 有理数体 \mathbb{Q} .

$A_{2,1}$ を主偏極付きアーベル曲面の moduli space とする。 $A_{2,1}$ 上で上記の各タイプのアーベル曲面の locus は, 0,1,2,3 次元の部分集合をなし, 前 3 者の既約成分は各々

(i) CM-points, (ii) Shimura curves, (iii) Humbert surfaces¹

と呼ばれる。他方, Torelli の定理によって $A_{2,1}$ は種数 2 の曲線の moduli space \mathcal{M}_2 に双有理同値であることが知られている。 \mathcal{M}_2 から $A_{2,1}$ への写像 (Abel-Jacobi map) は, 曲線 C に $(Jac(C), \Theta_C = C)$ を対応させることに他ならない。(逆向きの写像は Rosenhain によって, theta 関数を用いて与えられている)。そこで我々の目的は, \mathcal{M}_2 の座標を用いて, 即ち代数曲線の言葉で上記 (i),(ii), (iii) に属するアーベル曲面を具体的に記述することである。ここでは, 特に (iii) の場合, 即ち $Jac(C)$ が, 与えられた判別式 Δ の 2 次体の整環 (order) を実乗法にもつ様な曲線の方程式を与えることを考える。実は, この問題は 100 年程前に既に G.Humbert [6] によって組織的に研究され, 小さな判別式の場合には (C 上では) 解答が与えられている。

2 Humbert の仕事

2.1 Kummer 曲面と $(16)_6$ -configuration

\mathfrak{H}_2 を 2 次の Siegel 上半平面とする:

$$\mathfrak{H}_2 := \left\{ \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \mid \text{Im}(\tau) > 0 \right\}$$

$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2$ に対して, 行列 $(1_2 \ \tau) = (p_1, \dots, p_4)$ の列ベクトルで張られる \mathbb{C}^2 の lattice を L_τ とし,

$$A_\tau = \mathbb{C}^2 / L_\tau$$

とおくと, (A_τ, Θ) は主偏極付きアーベル曲面 となる。ここで, A_τ の主偏極は

$$E(p_h, p_k) = J, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$$

で定まる \mathbb{C}^2 の standard Riemann form E によって与えられる。主偏極に対応する因子 (theta divisor) Θ は以下の様に記述される。 $a = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ に対して, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を characteristic とする theta 関数 $\theta(z)$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ を

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi \sqrt{-1}^t (n+a) \tau (n+a) + 2\pi \sqrt{-1}^t (n+a)(z+b)},$$

で定めるとき, $\theta(z)$ の零点集合が Θ に他ならない。そして, $A_{2,1} \cong \mathfrak{H}_2 / Sp(2, \mathbb{Z})$ 。以下では, Θ は種数 2 の既約な代数曲線 C になるものとする。まず, (A_τ, Θ) から曲線 C を再構成するアイ

¹Humbert 曲面 H_Δ はその moduli 的解釈から明かな様に, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ に属する Hilbert modular 曲面と同型である。

デアについて簡単に説明しよう。 $A_\tau[2]$ を A_τ の 16 個の 2 等分点からなる部分群とする。これらは、

$$\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon + \lambda\tau_1 + \lambda'\tau_2 \\ \varepsilon' + \lambda\tau_2 + \lambda'\tau_3 \end{pmatrix} \pmod{L_\tau} \quad (\varepsilon, \varepsilon', \lambda, \lambda' \in \{0, 1\})$$

によって与えられる。いま Humbert に従って、これらに次の様に名前をつけておく：

notation	ε	ε'	λ	λ'
(11)	0	0	0	0
(12)	0	1	0	0
(21)	1	0	0	0
(22)	1	1	0	0
(31)	0	0	1	0
(32)	0	1	1	0
(41)	1	0	1	0
(42)	1	1	1	0
(13)	0	0	0	1
(14)	0	1	0	1
(23)	1	0	0	1
(24)	1	1	0	1
(33)	0	0	1	1
(34)	0	1	1	1
(43)	1	0	1	1
(44)	1	1	1	1

Table 1 : Humbert's notation for $A_\tau[2]$.

すると、 $\theta(z)$ の変換公式から次がわかる：

$$\Theta \cap A_\tau[2] = \{ (11), (22), (31), (41), (23), (24) \}$$

そこで、

$$\phi : A_\tau \longrightarrow \mathbf{P}^3$$

を、完備線形系 $|2\Theta|$ に対する射とする。 ϕ の像は $A_\tau/\langle \iota \rangle$ ($\iota : x \mapsto -x$ は A_τ の位数 2 の自己同型) と同型で、 \mathbf{P}^3 内の 4 次曲面となる。これは A_τ の Kummer 曲面と呼ぶ。 $\text{Kum}(A_\tau)$ と記す。その特異点は、 $A_\tau[2]$ の像である 16 個の二重点である。 $\xi \in A_\tau[2]$ 、に対して

$$\Theta_\xi := T_\xi(\Theta) \quad \& \quad \hat{\Theta}_\xi := \phi(T_\xi(\Theta))$$

とおく (T_ξ は ξ による平行移動)。このとき、 $2T_\xi(\Theta) \in |2\Theta|$ より、 \mathbf{P}^3 内の超平面 H_ξ で、 H_ξ と $\text{Kum}(A_\tau)$ の交差因子が $2\hat{\Theta}_\xi$ に一致するものが一意的に定まる。 H_ξ は Kummer 曲面 $\text{Kum}(A_\tau)$ の *singular plane* と呼ばれる。以下、 $\phi((ij))$ ($1 \leq i, j \leq 4$) を (ij) と略記する。これらの 16 個の *singular planes* と 16 個の *double points* は、以下の様な対称性を持った *configuration* を形成しており、古典的代数幾何学における名所旧跡の一つである。16 個の *singular planes* は以下の条件をみたま様に記号 kl ($1 \leq k, l \leq 4$) で表記される：

1. 各 *singular plane* kl 上には 6 個の *double points* $\{(ij) \mid i = k, j \neq l \text{ or } i \neq k, j = l\}$ がある。

2. 各 double point (ij) を通る singular planes が 6 個あり, それらは $\{kl \mid k = i, l \neq j \text{ or } k \neq i, l = j\}$ 。

Double point (11) を含まない P^3 内の平面 Π を一つ選んで固定する。次の図は, (11) を通る $\text{Kum}(A_7)$ の 6 個の singular planes の Π による断面を表わす。

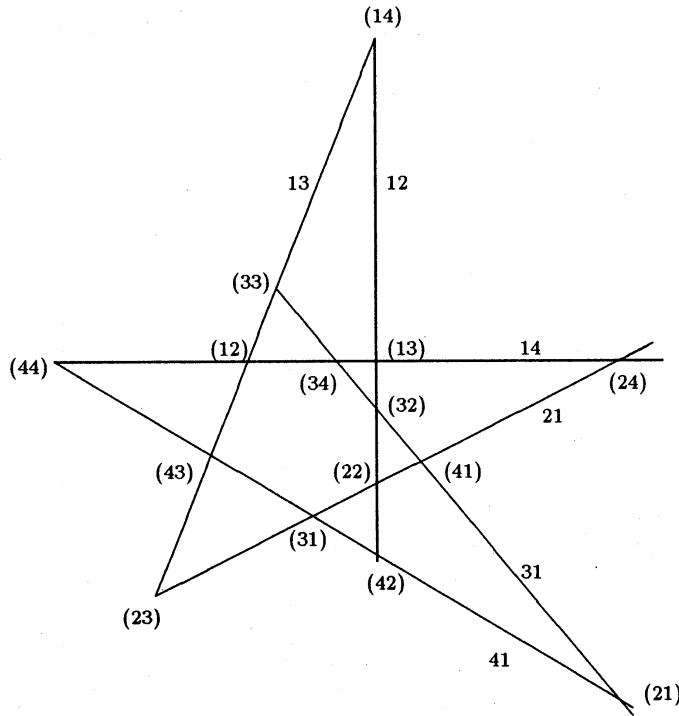


Figure 1 : singular planes の断面

Singular plane H_ξ は, $\text{Kum}(A_7)$ と 2 次曲線 $\hat{\Theta}_\xi$ に沿って接している。これより次のことが容易にわかる: D を $\text{Kum}(A_7)$ 上の任意の曲線とすると, D の (11) から平面 Π への射影は, 上記断面図の 6 本の直線と接するか, でなければ点 (ij) に於いて交わる。実際, (11) に於ける $\text{Kum}(A_7) \subset P^3$ の tangent cone と Π の交わり Γ は前者の条件をみたす。ここで, $\Pi \cong P^2$ の同次座標 x, y, z を Γ が方程式 $yz = x^2$ で与えられる様に取り, 6 本の直線 14, 21, 12, 13, 31, 41 が各々方程式

$$(1) \quad l_i: \quad y + 2a_i x + a_i^2 z = 0, \quad (1 \leq i \leq 6)$$

で表されるものとする。

Proposition 2.1 C は次の方程式で表される曲線と同型である:

$$(2) \quad Y^2 = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_5)(X - a_6).$$

□

2.2 Humbert's modular equations

定義. $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix}$ of \mathfrak{H}_2 に対して, 互いに素な整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbf{Z}$ で, 次の条件をみたすものが存在するとき, τ は判別式 Δ の singular relation を持つという。

$$(3) \quad \alpha\tau_1 + \beta\tau_2 + \gamma\tau_3 + \delta(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + \epsilon = 0,$$

$$(4) \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma - 4\delta\epsilon.$$

$N_\Delta := \{\tau \in \mathfrak{H}_2 \mid \tau \text{ は判別式 } \Delta \text{ の singular relation を持つ}\},$

$H_\Delta := \text{image of } N_\Delta \text{ under the canonical map } \mathfrak{H}_2 \longrightarrow Sp(4, \mathbf{Z}) \backslash \mathfrak{H}_2.$

とおく。 H_Δ は判別式 Δ の *Humbert surface* と呼ばれる。さて, $\text{End}(A_\tau)$ の有理表現を用いると, その自己準同型環は

$$\text{End}(A_\tau) = \{\phi \in M_2(\mathbf{C}) \mid \exists M \in M_4(\mathbf{Z}) \text{ s.t. } \phi(\tau \ 1_2) = (\tau \ 1_2)M \cdots (*).\}$$

と表現される。 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, と書くと, (*) は次と同値である:

$$\phi = \tau B + D, \phi\tau = \tau A + C \Leftrightarrow \tau B\tau + D\tau - \tau A - C = 0 \cdots (**).$$

Riemann form E から, $\text{End}(A_\tau)$ 上に Rosati involution $\phi \mapsto \phi^\circ$ が定まり, $E(\phi z, w) = E(z, \phi^\circ w)$ ($\forall z, w \in \mathbf{C}^2$) をみたす。このとき

$$\begin{aligned} \phi^\circ = \phi &\Leftrightarrow {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} M \\ &\Leftrightarrow A = {}^t D, B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ とおく。条件 $\phi^\circ = \phi$ から,

$$(**) \Leftrightarrow a_2\tau_1 + (a_4 - a_1)\tau_2 - a_3\tau_3 + b(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + c = 0.$$

従って

$$\phi = \tau B + D = \begin{pmatrix} -b\tau_2 + a_1 & b\tau_1 + a_3 \\ -b\tau_3 + a_2 & b\tau_2 + a_4 \end{pmatrix},$$

$$\text{Tr } \phi = a_1 + a_4,$$

$$\begin{aligned} \det \phi &= -b\{a_2\tau_1 + (a_4 - a_1)\tau_2 - a_3\tau_3 + b(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3)\} + a_1a_4 - a_2a_3 \\ &= a_1a_4 - a_2a_3 + bc. \end{aligned}$$

これより, ϕ の特性多項式は

$$T^2 - (a_1 + a_4)T + (a_1a_4 - a_2a_3 + bc)$$

となる。また, その判別式 Δ は次式で与えられる:

$$\Delta := (a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3 + bc) = (a_4 - a_1)^2 - 4a_2(-a_3) - 4bc.$$

以上のことから, 次の結果が得られる:

Proposition 2.2 \mathbf{O}_Δ を実 2 次体 K の整環 (order) で, 判別式 Δ であるものとするとき,

$$\exists \psi : \mathbf{O}_\Delta \longrightarrow \text{End}(A_\tau) \quad \Leftrightarrow \quad \tau \in H_\Delta$$

H_Δ の各点は, singular relation $a\tau_1 + b\tau_2 + \tau_3 = 0$, $b^2 - 4a = \Delta$, $b = 0$ or 1 . をみたす $\tau \in \mathfrak{h}_2$ で代表されることが示される。

Proposition 2.3 ([6]) $\tau \in \mathfrak{h}_2$ が判別式 $\Delta = 5$ の singular relation

$$-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0,$$

をみたすとき, Π 上の 2 次曲線 D で, 5 点

$$(34), (14), (33), (22), (24)$$

を通り, l_6 (Figure 1 を参照) と接するものが存在する。逆に, この様な 2 次曲線があれば τ は $\Delta = 5$ に対する singular relation をみたす。

PROOF. 前半の主張を示す。上で見た様に, $-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ の形の relation から 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

に対応する A_τ の自己準同型 α が生ずる。 α の特性多項式は $T^2 - T - 1 = 0$ である。ここで,

$$\alpha(\{(34), (14), (33), (22), (24), (11)\}) = \{(42), (44), (31), (21), (43), (11)\},$$

から, 右辺の集合は $\Theta_{(31)} \cap A_\tau[2]$ と一致し,

$$\alpha^* \Theta_{(31)} \cap A_\tau[2] = \{(34), (14), (33), (22), (24), (11)\},$$

となる。 D を, (11) から Π への射影による $\phi(\alpha^* \Theta_{(31)})$ の像の閉包とすると,

$$D \cap \{(ij) \text{ in Figure 1}\} = \{(34), (14), (33), (22), (24)\},$$

と先の注意より D は l_6 と接することがわかる。すると, 交点数の計算から

$$(2\Theta, \alpha^* \Theta_{(31)}) = (2\Theta_{(31)}, \alpha^* \Theta_{(31)}) = 2\text{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\alpha^2) = 6, \quad K = \mathbf{Q}(\sqrt{5}).$$

これより (ϕ の次数が 2 だから), $\phi(\alpha^* \Theta_{(31)})$ は次数 3 の曲線であることがわかる。 Π 上の直線 ℓ を, ℓ が D の generic points で (transversal に) 交わる様にとる。また, ℓ と (11) を含む \mathbf{P}^3 内の超平面 H をとる。このとき

$$\begin{aligned} (D, \ell) = \#\{D \cap \ell\} &\leq \#\{H \cap \phi(\alpha^* \Theta_{(31)})\} \setminus \{(11)\} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

が成立する。従って, D は 2 次曲線であり, 主張の条件をみたす。 \square

この結果から初等幾何学により, H_5 の "modular equation" が計算できる。まず, 一般性を失うことなく, (1) に於ける l_6 の方程式は $z = 0$ (i.e. $a_6 = \infty$) であると仮定する。

Theorem 2.4 ([6]) 種数 2 の曲線 C が方程式

$$(5) \quad Y^2 = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_5)$$

で与えられるとする。このとき, $Jac(C)$ が判別式 $\Delta = 5$ の実乗法を持つ (即ち, $(Jac(C), \Theta_C) \in H_5$) ための必要十分条件は, 等式 $F_5(a_1, a_2, \dots, a_5) = 0$ が成立することである:

$$(6) \quad F_5(a_1, \dots, a_5) \\ := 4\{a_1^2(a_3 - a_4) + a_2^2(a_4 - a_5) + a_3^2(a_5 - a_1) + a_4^2(a_1 - a_2) + a_5^2(a_2 - a_3)\} \\ \times \{a_1^2(a_3 - a_4)a_2a_5 + a_2^2(a_4 - a_5)a_3a_1 + \dots + a_5^2(a_2 - a_3)a_1a_4\} \\ - \{a_1^2(a_3 - a_4)(a_2 + a_5) + a_2^2(a_4 - a_5)(a_3 + a_1) + \dots + a_5^2(a_2 - a_3)(a_1 + a_4)\}^2$$

□

Humbert は同様に H_8 ($\Delta = 8$) の "modular equation" も計算している。結果のみ記すと以下の通り:

Proposition 2.5 ([6]) $\Delta = 8$ の singular relation は $-2\tau_1 + \tau_2 = 0$ に簡約できる。このとき Π 上の 2 次曲線 D で, 4 点

$$(32), (34), (42), (44)$$

を通り, l_2, l_4 (Figure 1 を参照) と接するものが存在する。逆に, この様な 2 次曲線があれば τ は $\Delta = 4$ または 8 に対する singular relation をみたくす。

Theorem 2.6 ([6]) 種数 2 の曲線 C が方程式

$$(7) \quad Y^2 = X(X - b_1)(X - b_2)(X - b_3)(X - b_4)$$

で与えられるとする。このとき, $Jac(C)$ が判別式 $\Delta = 8$ の実乗法を持つ (即ち, $(Jac(C), \Theta_C) \in H_8$) ための必要十分条件は, 等式 $F_8(b_1, b_2, b_3, b_4) = 0$ が成立することである:

$$F_8(b_1, b_2, b_3, b_4) \\ := 4b_1b_2b_3b_4\{(b_1 + b_3)(b_2 + b_4) - 2(b_1b_3 + b_2b_4)\}^2 - \{(b_2 - b_4)^2(b_1 - b_3)^2(b_1b_3 + b_2b_4)^2\}$$

3 Poncet の閉形定理 と Griffith-Harris の結果

次の問題は, 方程式 $F_5(a_1, a_2, \dots, a_5) = 0$ および $F_8(b_1, b_2, \dots, b_4) = 0$ を各々解くことである。実 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}), \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ に属する Hilbert modular 曲面は何れも有理曲面であることが知られているから, これらは \mathbf{C} 上では 2 個の自由パラメータを用いて解ける筈である。しかし, これを直接強引に解くことは容易ではない。次節で扱う様に我々は, 曲線 C のみならず, 実乗法に対応する $Jac(C)$ の自己準同型の定義体をも問題にするので, より構造的な考察が必要である。まず, 前節の Humbert の結果を双対的に述べると, 「Poncet の閉形定理」が表面に現れることに注意する。種数 2 の曲線 C に対して, C から 2 次曲線への次数 2 の map $\varphi: C \rightarrow D_1$ を与えておく。このとき, D_1 を射影直線 \mathbf{P}^1 と同一視して, φ の 6 個の分岐点 $Q_1, Q_2, \dots, Q_6 \in D_1$ の \mathbf{P}^1 での座標を a_1, \dots, a_6 とすれば, C は方程式 (2) で与えられる。このとき, Proposition 2.3 は次と同値である:

Proposition 3.1 ([6]) $JacC$ が $\Delta = 5$ の実乗法を持つ為の条件は, $Q_6 \in D_1$ をを通り, かつ 5 角形 $Q_1Q_2 \dots Q_5$ に内接する 2 次曲線 D_2 が存在することである。但し, 6 点の順序は適当に選ぶものとする。

一般に、平面上の 2 次曲線 D_1 上に頂点を持つ n 角形 $Q_1Q_2\dots Q_n$ に対して、これに内接する別の 2 次曲線 D_2 が存在するとき、この n 角形を「Poncelet の n 角形」という。

Theorem 3.2 (「Poncelet の閉形定理」) 平面上の二つの 2 次曲線 D_1, D_2 に対して Poncelet の n 角形が一つでも存在すれば連続的に無限個存在する。

この初等幾何的な定理の背後に楕円関数・楕円曲線が潜んでいることは、Jacobi, Cayley 等、古くから多くの数学者に知られていたようである。ここでは、この問題に現代の代数幾何学から光を当てて止めをさした、Griffith-Harris の結果を紹介する。それは次節への準備でもある。

平面上の二つの 2 次曲線 D_1, D_2 が与えられたとする。このとき、 $D_2^* := D_2$ の双対とは、 D_2 の接線の集合であって、これも 2 次曲線となる。

Lemma 3.3 ([2]) D_1, D_2 が一般の位置にある (異なる 4 点で交わる) とする。このとき

$$E := \{(x, \xi) \mid x \in D_1, \xi \in D_2^*\}$$

は \mathbb{C} 上の種数 1 の曲線である。

PROOF. 射影 $E \rightarrow D_1, (x, \xi) \mapsto x$ を考えると、これは次数 2 の morphism で、分岐点は丁度 D_1, D_2 に他ならない。よって、 E は $D_1 \cong \mathbb{P}^1$ の 4 点分岐の 2 重被覆となるから、種数 1 の曲線である。□

これより、 E の一点を選んで原点として、 E を楕円曲線とみなせる。 $x \in D_1$ を一般点とし、 x から D_2 への接線を ξ, ξ' とし、 ξ' と D_1 の交点を x, x' とする。このとき、 $\text{map } \tau : (x, \xi) \mapsto (x', \xi')$ は E から E への morphism を定める。次は直ちに判る:

Lemma 3.4 ([2]) $\tau : E \rightarrow E$ は固定点を持たない。従って、平行移動である: $\exists a \in E, \tau(x) = x + a$

□

閉形定理を証明しよう。 D_1, D_2 に対して Poncelet の n 角形 $Q_1Q_2\dots Q_n$ があるとする。このとき、 $\xi_i := Q_iQ_{i+1} \in D_2, (i = 1, 2, \dots, n)$ となる。但し、 $Q_{n+1} = Q_1, \xi_n := Q_nQ_1$ 。 $(Q_1, \xi_1) \in E$ に τ を n 回適用すると、自身に戻る。一方 Lemma 3.4 より

$$Q_1, \xi_1) = \tau^n(Q_1, \xi_1) = (Q_1, \xi_1) + na$$

従って、 $na = 0$ 。即ち、平行移動 τ を与える $a \in E$ は E の n 等分点である。このとき、明らかに D_1 の任意の点 Q_1 から出発しても τ を n 回適用すると、自身に戻る。これが定理の主張である。□

4 Mestre の仕事

4.1 楕円曲線の 5-isogeny $\Rightarrow \Delta = 5$ の実乗法を持つ曲線

前々節で、 $Jac(C)$ が判別式 $\Delta = 5$ の実乗法を持つ種数 2 の曲線 C を与えることと、Poncelet の 5 角形を構成することがほぼ同値であることを示し、前節ではこれが更に、楕円曲線の 5 等分点を与えることに帰着することを見た。この節では、逆に、楕円曲線の 5 等分点から元の曲線 C が再構成されることを示し、一巡の考察を完結させる。

次のデータから出発する。 $E = E_1$ を体 k 上の楕円曲線とし、

$$\varphi: E_1 \longrightarrow E_2 := E_1/G, \quad G = \langle r \rangle \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$$

を k 上定義された次数 5 の isogeny とする。 $x_i: E_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ ($i = 1, 2$) を原点に極をもつ位数 2 の関数とする。従って、次数 5 の有理関数 $u(x)$ が存在して、 $u \circ x_1 = x_2 \circ \varphi$ となる。また変数 t に対して $E_1(k(t))$ の点 q_t を $u(x_1(q_t)) = t$ となる様に選んでおく。

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 = E_1/G \\ x_1 \downarrow & & \downarrow x_2 \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{u} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

そこで、曲線 $C_{\varphi,t}$ を次式で定める:

$$(10) \quad C_{\varphi,t}: \quad Y^2 = u(X) - t$$

このとき、各 $s \in G$ に対して、 $x_s := x_1(q_t + s) \in \mathbf{P}^1$ とおくと、

$$u(x_s) = u \circ x_1(q_t + s) = x_2 \circ \varphi(q_t + s) = x_2 \circ \varphi(q_t) = t$$

よって、 $(x_s, 0) \in C_{\varphi,t}$ また、 $x_s = x_{s'}$ ($= a$ とおく) ならば

$$\operatorname{div}(x_1 - a) = [q_t + s] + [q_t + s'] - 2[O_{E_1}]$$

となるから Abel の定理より、 $2q_t + s + s' = O_{E_1}$ 、 $2q_t \in G$ 、 よって $(t, 0) \in E_1[2]$ となる。従って、 $t \in \bar{k}$ を $(t, 0) \notin E_1[2]$ なる様に選ぶ限り、

$$x = x_1: C_{\varphi,t} \longrightarrow \mathbf{P}^1$$

は丁度 6 点 $((x_s, 0), s \in G$ 及び無限遠点) で分岐する \mathbf{P}^1 の 2 重被覆となるから $C_{\varphi,t}$ は種数 2 の曲線となる。また以上のことから、 $C_{\varphi,t}$ の方程式を正規化して

$$(11) \quad C_{\varphi,t}: \quad Y^2 = \prod_{s \in G} (X - x_1(q_t + s))$$

とできることがわかる。右辺の 5 次多項式は $k(t)$ に係数をもつ。

4.2 代数対応による実乗法の構成

この様に、楕円曲線 E_1 の座標を用いて種数 2 の曲線を表現できる。このアイデアを押し進めると、 $\Delta = 5$ の実乗法を C の代数対応として表現することが容易に可能となる。

定義. $\psi \in \operatorname{End}(\operatorname{Pic}(C_{\varphi,t}))$ を

$$\psi: (x, y) = (x_1(q), y) \mapsto (x_1(q+r), y) + (x_1(q-r), y) \quad (q \in E_1)$$

で定める。

Theorem 4.1 ([9]) 上記の ψ の $\operatorname{Pic}^0(C_{\varphi,t})$ への制限は次式をみたす:

$$(12) \quad \psi^2 + \psi = \operatorname{Id}.$$

PROOF. 定義から直ちに, $\psi^2 + \psi - Id$ の作用は

$$\psi^2 + \psi - Id: (x_1(\mathbf{q}), y) \mapsto \sum_{s \in G} (x_1(\mathbf{q} + s), y)$$

で与えられることが判る。一方, (11) で与えられる曲線上任意の点を $(x_1(\mathbf{q}_0), y_0)$ ($\mathbf{q}_0 \in E_1$) とするとき, X の 5 次方程式 $u(X) - t = y_0$ の 5 根が $\{x_1(\mathbf{q}_0 + s) \mid s \in G\}$ となることから, 関数 $y - y_0$ の因子は

$$\operatorname{div}(y - y_0) = \sum_{s \in G} [(x_1(\mathbf{q}_0 + s), y_0)] - 5[(\infty, \infty)]$$

となる。即ち,

$$\sum_{s \in G} [(x_1(\mathbf{q}_0 + s), y_0)] \sim 5[(\infty, \infty)] \quad (\text{線型同値})$$

ここで, $\mathbf{q}_0 \in E_1$ は任意であるから結局

$$\sum_{s \in G} [(x_1(\mathbf{q}_0 + s), y_0)] \sim \sum_{s \in G} [(x_1(\mathbf{q} + s), y)] \quad (\text{線型同値})$$

従って, $\psi^2 + \psi - Id$ は $\operatorname{Pic}^0(C_{\phi,t})$ 上では零射となる。□

この結果を用いて, ψ の方程式を計算できる。以下では $k = \mathbf{Q}$ とする。楕円曲線の 5-isogeny は modular 曲線 $X_1(5) \cong \mathbf{P}^1$ で parametrize される。即ち, Tate による次の方程式が知られている:

$$(13) \quad E_1: \quad y^2 + (1-s)xy - sy = x^3 - sx^2 \quad (s \text{ は自由 parameter})$$

ここで, $\mathbf{r} := (0, 0) \in E_1$ は位数 5 の点である。これより, $G = \langle \mathbf{r} \rangle$ とおいて isogeny $\varphi: E_1 \rightarrow E_2 := E_1/G$ を考えると,

$$u(X) = X + \frac{s(s-1)}{X} + \frac{s^2}{X^2} + \frac{s^2(s+1)}{X-s} + \frac{s^4}{(X-s)^2}$$

変数・パラメータを $X \rightarrow -sX$, $\sqrt{-1}X(X-s)Y/s^2 \rightarrow Y$, $t \rightarrow 3-t-3s$ と変更すると, $C_{\phi,t}$ の新しい方程式

$$(14) \quad C_{s,t}: \quad Y^2 = sX^5 - (s+t-3)X^4 + (s^2-3s+5-2t)X^3 - tX^2 + (s-3)X - 1$$

を得る。このモデルで代数対応 $\psi \leftrightarrow X_\psi \subset C_{\phi,t} \times C_{\phi,t}$ の方程式を計算すると, 次の様な簡明な結果を得る。

$$(15) \quad X_\psi: \quad \begin{aligned} s(X_1X_2)^2 - (s-1)(X_1X_2) + (X_1+X_2) + 1 &= 0, \\ Y_1 &= Y_2 \end{aligned}$$

$C_{s,t}$ は二つの自由パラメータ s, t を含む。これは実 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ に属する Hilbert modular 曲面が有理曲面であることと対応している。一方, (15) には t が現れない。これは, Hilbert modular 曲面が既知のものより精密な moduli 的構造を持つことを示唆すると思われる。最後に, 方程式 (14), (15) は共に, $\mathbf{Q}(s, t)$ 上で定義され, 従ってパラメータ s, t に有理数を代入すれば, \mathbf{Q} 上の曲線 $C(s, t)$ を得るのみならず, $\operatorname{Jac}(C(s, t))$ は $\operatorname{GL}(2)$ -type になることを注意する。これより, §1 で述べた modular conjecture 等を実例で検証することも原理的には可能である。実際にいくつかの例について数値的に modular conjecture が検証出来ている。

参考文献

- [1] G.v.d. Geer : Hilbert modular surface. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [2] P.Griffith, and J.Harris: On Cayley's Explicit solution to Poncelet's porism, Enseigne.Math. II, Ser.24 (1978).
- [3] K. Hashimoto : Explicit form of quaternion modular embeddings, to appear in Osaka Math.J.
- [4] K.Hashimoto and N.Murabayashi: Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two, Tohoku Math.J. 47 (1995), 271-296.
- [5] R. W. H. T. Hudson : Kummer's quartic surface. Cambridge University Press, 1990.
- [6] G. Humbert : Sur les fonctions abéliennes singulières, Œuvres de G. Humbert 2, pub. par les soins de Pierre Humbert et de Gaston Julia, Paris, Gauthier-Villars (1936), 297-401.
- [7] J.Igusa : Arithmetic variety of moduli for genus two, Ann of Math.72 (1960), 612-649.
- [8] A. Krazer : Lehrbuch der Thetafunktionen, Chelsea, New York, 1970.
- [9] F.Mestre : Familles de courbes hyperelliptiques multiplications réelles, Arithmetic Algebraic Geometry, Birkhäuser, (1991), 193-208.
- [10] D. Mumford : Abelian varieties. Oxford University Press, London, 1970.
- [11] F.Oort, and H.J.M.Bos : ポンスレの閉形定理 (上野健爾 訳), 数学セミナー 1986.5 - 1986.8
- [12] G. Shimura : Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton Univ. Press, 1971.
- [13] J.Tate : Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math., 2 (1966),134-144.

謝辞. 研究集会の後で, 愛知工大の 柳井裕道氏から文献 [11] の存在を知らせて頂いた。ここに改めてお礼を申し上げます。