

非線形周期型境界値問題に対する SOR 法の最適加速係数

大阪女子大学 石原 和夫 (Kazuo Ishihara)

1. SOR 法. $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ とし, $D, -L, -U$ は A の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $J = D^{-1}(L + U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を J の固有値, ω を加速係数, $H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$, $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$, $\delta(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$, とする. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の SOR 法は $\mathbf{x}_{k+1} = H_\omega \mathbf{x}_k + \omega(D - \omega L)^{-1}\mathbf{b}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ となる。

補題 1 [1, 8]. (i) A が convergent ($\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$.
(ii) $\rho(A) = 1$ とする. A が semiconvergent ($\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ が存在) $\Leftrightarrow \gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear.

仮定 1. A が consistently ordered かつ 2-cyclic である.
仮定 2. $\det A = 0$ かつ J の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である.

補題 2 [8]. A は仮定 1 を満たす正則行列, J の固有値はすべて実数で $\rho(J) < 1$ とする. $\Rightarrow H_\omega$ は convergent ($\rho(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$ は $\rho(H_{\omega_{opt}}) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_\omega)$ となる.

補題 3 [1, 2]. A は仮定 1 と 2 を満たす特異行列, J の固有値はすべて実数で $\rho(J) = 1$ とする. $\Rightarrow H_\omega$ は semiconvergent ($\gamma(H_\omega) < 1$, $0 < \omega < 2$), $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}}$ は $\gamma(H_{\omega_{opt}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_\omega)$ となる. $\mathbf{b} \in \text{Im} A$ の時, \mathbf{x}_k は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解に収束する。

2. 差分方程式. 次のような周期型非線形微分方程式の境界値問題を考える.

$$(1) \quad \begin{cases} y''(x) = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = y(b), & y'(a) = y'(b). \end{cases}$$

ここで $f(x, y)$, $f_y(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \geq 0$ は連続とする. $f_y(x, y) \equiv 0$ ならば解の一意性は失われるが, $f_y(x, y) \geq K > 0$ (K は定数) ならば, 解は一意に存在する. (1) の差分解を構成するため, $[a, b]$ を n 等分し, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + (i-1)h$, $0 \leq i \leq n+1$ を mesh type I とする.

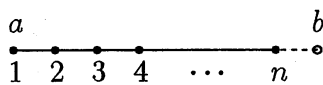


Fig.1. Mesh type I.

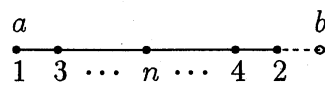


Fig.2. Mesh type II.

(1) を中心差分により近似し, $y(x_i)$ の近似解を v_i , $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ とすれば (1) の差分方程式 $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ は次のようになる.

$$(2) \quad \begin{cases} F_i(\mathbf{v}) \equiv -v_{i+1} + 2v_i - v_{i-1} + h^2 f(x_i, v_i) = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ v_1 = v_{n+1}, & v_0 = v_n. \end{cases}$$

$f_y(x, y) \equiv 0$ の時, (2) は特異な連立 1 次方程式 $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ として表され, $f_y(x, y) \geq K > 0$ の時は差分解 $\mathbf{v}_* = (v_{*,1}, v_{*,2}, \dots, v_{*,n})^t$ は一意に存在する. (2) に対する SOR 法は

$$(3) \quad v_{i,k+1} = v_{i,k} - \omega \frac{F_i(v_{1,k+1}, \dots, v_{i-1,k+1}, v_{i,k}, \dots, v_{n,k})}{\frac{\partial F_i}{\partial v_i}(v_{1,k+1}, \dots, v_{i-1,k+1}, v_{i,k}, \dots, v_{n,k})}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となる. その時, 次の局所収束定理 (Yamamoto [9]) が得られる.

定理 1(local convergence [9]). $f_y(x, y) \geq K > 0$ とする. SOR 法 (3) は $0 < \forall \omega < 2$ で \mathbf{v}_* に局所収束する.

定理 2(global convergence). $M \geq f_y(x, y) \geq K > 0$ とする. 任意の \mathbf{v}_0 に対して SOR 法 (3) が $0 < \forall \omega < \omega^*$ で \mathbf{v}_* に収束するような $0 < \omega^* \leq 2$ が存在する. h が十分小さい時は $\omega^* \approx 2$. また $f(x, y) \equiv q(x)y + r(x)$ の時は $\omega^* = 2$.

次に最適加速係数の存在を考える. 解 \mathbf{v}_* における (3) の convergence factor $R_1(\mathbf{v}_*)$ を

$$R_1(\mathbf{v}_*) \equiv \sup \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_*\|^{1/k}; \{\mathbf{v}_k\} \in B \right\}$$

と定義する. ここで, B は (3) により生成され, \mathbf{v}_* に収束するすべての $\{\mathbf{v}_k\}$ の集合である. また, \mathbf{v}_* の近傍 V が存在し, $\forall \mathbf{v}_0 \in V$ に対して (3) が well-defined で, \mathbf{v}_* に収束する時, \mathbf{v}_* は (3) の attraction point という. mesh type I では (2) のヤコビアン行列 $F'(\mathbf{v})$ は仮定 1 を満足しないので次のような mesh type II の分割を考える.

$$x_0 = a - h, \quad x_{n+1} = b, \quad x_i = \begin{cases} a + (j - 1)h, & \text{if } i = 2j - 1, \\ b - jh, & \text{if } i = 2j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

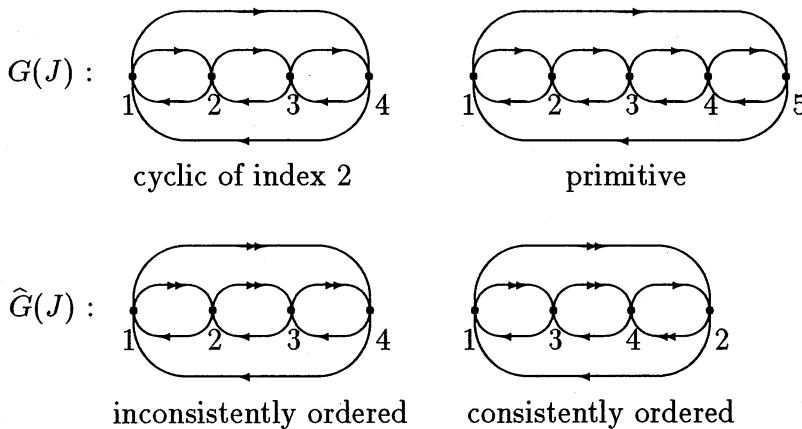


Fig.3. グラフ $G(J)$, $\hat{G}(J)$.

定理 3. $f_y(x, y) \equiv 0$ とする. n は偶数, mesh type II の時, A は仮定 1, 2 を満足し, A に対する SOR 反復行列 $H_\omega^{(0)}$ は semiconvergent ($\gamma(H_\omega^{(0)}) < 1, 0 < \omega < 2$) で $\omega_{\text{opt}}^{(0)} = \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}$ は $\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}^{(0)}}^{(0)}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_\omega^{(0)})$ となる.

定理 4. $f_y(x, y) \geq K > 0$ とする. n は偶数, mesh type II の時, $F'(\mathbf{v}_*) = D - L - U$ は仮定 1 を満足し, \mathbf{v}_* は (3) の attraction point となり, $H_\omega(\mathbf{v}_*)$ は convergent ($\rho(H_\omega(\mathbf{v}_*)) < 1, 0 < \omega < 2$) で, SOR 法 (3) は $R_1(\mathbf{v}_*)$ を最小にする次のような最適加速係数 ω_{opt} が存在する.

$$R_1(\mathbf{v}_*) = \rho(H_\omega(\mathbf{v}_*)), \quad \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}, \quad \rho(H_{\omega_{\text{opt}}}(\mathbf{v}_*)) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_\omega(\mathbf{v}_*)),$$

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2 + f_{y,\max} h^2}\right)^2}} \leq \omega_{\text{opt}} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2 + f_{y,\min} h^2}\right)^2}}.$$

ここで $H_\omega(\mathbf{v}_*)$ は $F'(\mathbf{v}_*)$ に対する SOR 反復行列, $J = D^{-1}(L + U)$,

$$f_{y,\min} = \min_{1 \leq i \leq n} f_y(x_i, v_{*,i}), \quad f_{y,\max} = \max_{1 \leq i \leq n} f_y(x_i, v_{*,i}).$$

さらに, $h = \frac{b-a}{n}$ が十分小ならば, $\omega_{\text{opt}} \approx \omega_{\text{opt}}^{(0)} = \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}$.

数値例は講演時に示す.

参考文献

- [1] Berman, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.
- [2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 6 (1985), 555 - 566.
- [3] Ishihara, K., Successive overrelaxation method with projection for finite element solutions of nonlinear radiation cooling problems, Computing 38 (1987), 117-132.
- [4] Ishihara, K., Projected successive overrelaxation method for finite element solutions to the Dirichlet problem for a system of nonlinear elliptic equations, J. Comput. Appl. Math., 38 (1991), 185 - 200.
- [5] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), 385 - 393.
- [6] Ishihara, K. and Yamamoto, M., On the optimum SOR iterations for finite difference approximation to periodic boundary value problems, Math. Japon., 41 (1995), 199 - 209.
- [7] Oretaga, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, 1970.
- [8] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962.
- [9] Yamamoto, T., On nonlinear SOR-like methods. II, to appear.