数理解析研究所講究録
944 巻 1996 年 265-272

積分方程式法による応力拡大係数の数値計算

島根大学 総合理工学部 若野 功 (Isao Wakano)

1 序

二次元平面 R^2 内に C^∞ 級のパラメータ表示を持つ自分自身とは交わらない曲線 Σ を考える. 領域 $\Omega_\Sigma := \mathrm{R}^2 \setminus \overline{\Sigma}$ を等方で均質な弾性体, 曲線 Σ を亀裂面として, 亀裂の両面 Σ^+, Σ^- に対称な表面力 $g = (g_1, g_2)^T$ を与えるトラクション問題を考える.

$$L(u) = \lambda \triangle u + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div} u = 0 \quad in \quad \Omega_\Sigma, \tag{1.1}$$

$$T(u)^\pm = (\sigma_{1j}(u)^\pm n_j, \sigma_{2j}(u)^\pm n_j)^T = g \quad on \quad \Sigma. \tag{1.2}$$

ここで, $u = (u_1, u_2)^T$ は変位, $\sigma_{ij}(u) = \lambda \partial u_k / \partial x_k \delta_{ij} + \mu(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ は応力, λ, μ は Lamé 定数である. また $n = (n_1, n_2)^T$ は Σ^- 側に立つ単位法線ベクトルとする.

一般にこのような亀裂問題の解は亀裂先端で特異性を持つとされている. 亀裂先端からの距離を r とすると変位場は $r^{1/2}$ の項を含み, 応力場が $r^{-1/2}$ で発散する. この応力場の発散項の係数が応力拡大係数と呼ばれていて破壊力学において重要なパラメータの一つである. この特異性についての数学的に厳密な議論は直線亀裂の場合にしかなされていなかった (Grisvard [1]). 本稿では項数の都合で結果を述べるだけにとどめざるを得ないが, 以下に定義する弾性ポテンシャルを用いると曲線亀裂の場合にも直線亀裂と同様の変位場の表示式を得ることができる.

亀裂 Σ 上で定義された関数 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ を密度関数とする重層弾性ポテンシャル

$$W(\varphi) = -\int_\Sigma (T_y E(y,x))^T \varphi(y) ds_y, \quad x \in \Omega_\Sigma \tag{1.3}$$

で表されるトラクション問題の解を求めることを考える. $E(x,y)$ は線形弾性方程式の基本解行列で, その成分は

$$E_{ij}(x,y) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \left\{ (\lambda + 3\mu) \log \frac{1}{|x-y|} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^2} \right\}$$

である. $T_y E(y,x)$ は $E(y,x)$ の第 j 列ベクトルを $E_j(y,x)$ と表すときトラクション作用素 T_y を $E_j(y,x)$ に作用させたものを第 j 列として作られる行列である. すなわち

$$E(y,x) = (E_1(y,x), E_2(y,x))$$

$$T_y E(y,x) = (T_y E_1(y,x), T_y E_2(y,x))$$

重層弾性ポテンシャルに関して次の性質が重要である [2].

補題 1 $\varphi \in C^0(\Sigma)^2$ **に対して** $W(\varphi)$ **は以下の条件を満たす.**

$$L(W(\varphi)) = 0 \quad in \quad \Omega_\Sigma, \tag{1.4}$$

$$W(\varphi)^+ - W(\varphi)^- = \varphi, \tag{1.5}$$

$$T(W(\varphi))^+ = T(W(\varphi))^-. \tag{1.6}$$

補題 1 の (1.6) 式が成り立つので以後 $TW(\varphi)^\pm$ が亀裂両面での値であることを示す上付き添字 $\pm$ は省略する.

補題 (1) を考慮すると次の問題が解ければ, その解 φ を密度とする重層弾性ポテンシャル $W(\varphi)$ によってトラクション問題の解が与えられることになる.

問題 1 **与えられた** g **に対して**

$$TW(\varphi) = g \quad on \quad \Sigma$$

を満たす φ **を求める.**

次節でこの方程式に対して Nedelec [3] に準ずる方法で解析を行って得られた結果として表面力 g を与える空間および解 φ を探す空間を適当に設定することでこの問題が一意的な解を持つこと, 表面力 g に対する仮定を強めることで解 φ の亀裂先端での漸近形が得られることについて述べる.

これに続いて密度関数 φ の漸近形から $W(\varphi)$ で与えられる変位場の亀裂先端での表示式を求めた結果を示し, 密度関数の係数と応力拡大係数の関係を示す.

最後に $W(\varphi)$ を用いて定義される双一次形式に対して有限要素解析を行った結果を示す. そこでは Strang-Fix [4] で使われた特異要素を用いて数値解の誤差評価を行い, 密度関数と応力拡大係数に対して $\|\varphi^h - \varphi\|_{1/2,00} \le C|\varphi_R|_1 h^{1/2}, |K^h_{i,j} - K_{i,j}| \le C|\varphi_R|_1 h^{1/2}$ という誤差評価を得た.

重層弾性ポテンシャル $W(\varphi)$ を用いることのメリットは

1. 密度 φ が亀裂開口 $u^+ - u^-$ に相当するという物理的な意味を持つ（補題 1 (1.5)）. φ の特異項の係数と応力拡大係数が非常に単純な関係式を満たしφ に対する数値計算で応力拡大係数の近似値が得られる.

2. $W(\varphi)$ からからつくられる双一次形式に対し有限要素法を適用すれば誤差評価の処方箋どおりに数値解の誤差評価が得られる.

ことである.

実際の計算を行うとき, とくに特異要素を用いる場合は行列要素を求めることが非常に煩わしいが, 一度有限要素法の枠組にあてはめてしまえば理論的に誤差を評価できる点をメリットとして強調してよいと考えられる. その理由は, 通常の有限要素法を亀裂を含んだ領域の問題に適用すると, そのような領域で定義されたソボレフ空間の性質が良くないために誤差解析が困難だからである.

2 亀裂開口変位

問題 1 の解の存在, 一意性と解の亀裂先端での漸近形について述べる. 次の双一次形式を用いて解の存在と一意性を示すことができる.

$$< TW(\varphi), \psi >:= -\int_{\Sigma} TW(\varphi)\psi ds_y, \quad \varphi, \psi \in C_0^{\infty}(\Sigma)^2. \tag{2.1}$$

亀裂 Σ の両端点を $\partial\Sigma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ とし, $x \in \Sigma$ に対して $d(x, \partial\Sigma) := min(d(x, \gamma_1), d(x, \gamma_2))$ ($d(x, y)$ は R^2 における二点 x, y 間の距離) とするとき, 次のように定義される空間 $H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2$ で問題 1 の解を求めることができる.

$$H_{00}^{1/2}(\Sigma) = \left\{\psi \in H^{1/2}(\Sigma); \int_{\Sigma} d(x, \partial\Sigma)^{-1}|\psi(x)|^2 ds_x < +\infty\right\},$$

$$H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2 = H_{00}^{1/2}(\Sigma) \times H_{00}^{1/2}(\Sigma).$$

$\psi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ に対するノルムを $\|\psi\|_{1/2,00}^2 = \|\psi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} d(x, \partial\Sigma)^{-1}|\psi(x)|^2 ds_x$ で定義し,

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2$ に対するノルムを $\|\varphi\|_{1/2,00}^2 = \sum_{i=1}^{2} \|\varphi_i(x)\|_{1/2,00}^2$ で定義する.[5], [6]

$\psi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ は連続性を持たないが,

$$\int_{\Sigma} d(x, \partial\Sigma)^{-1}|\psi(x)|^2 ds_x < \infty$$

により Σ の端点で弱い意味で 0 になっていると解釈できる. この空間で解を求めることは, 亀裂の開口が亀裂端点では閉じているという物理的な要請に対応している.

解の存在証明には次の定理が本質的である.

定理 1 **双一次形式 (2.1) は $H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2 \times H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2$ 上の双一次形式に拡張され, 次の不等式が成り立つ.**
定数 α, β が存在して, 任意の $\varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ に対して

$$|< T_x W(\varphi), \psi >| \leq \alpha\|\varphi\|_{1/2,00}\|\psi\|_{1/2,00}, \tag{2.2}$$

$$< T_x W(\varphi), \varphi > \geq \beta\|\varphi\|_{1/2,00}^2. \tag{2.3}$$

すなわち, 双一次形式 $< TW(\cdot), \cdot >$ は $H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2$ において連続かつ強圧的となる. この事実と Lax-Milgram の補題から解の存在と一意性が導かれる.

定理 2 任意の $g \in \{H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2\}'$ に対して

$$< TW(\varphi), \psi > = < g, \psi >, \quad \forall \psi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2 \tag{2.4}$$

を満たす $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2$ が一意的に存在する.

さらに, 表面力 g をより狭い空間に限定すると, 疑微分作用素を用いた解析により φ の亀裂端点での漸近形が得られる.

定理 3 Σ の両端を γ_1, γ_2 とする. γ_j からの亀裂上の点への距離を r_j と表し, η_j を γ_j の近傍で 1, もう一方の亀裂先端の近傍で 0 となる C^∞ 級の関数とする. $g \in H^{1/2}(\Sigma)^2$ のとき

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{2} \begin{pmatrix} k_{2,m} \\ k_{1,m} \end{pmatrix} \sqrt{r_m}\eta_m(r_m) + \varphi_R(x), \quad \varphi_R \in H_{00}^{3/2}(\Sigma)^2$$

$H_{00}^{3/2}(\Sigma)$ は一階導関数が $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ に属す関数の全体であり, ソボレフの埋蔵定理より連続性を持つ. したがって補題 1 より φ が亀裂開口変位 $u^+ - u^- = W(\varphi)^+ - W(\varphi)^-$ に対応するものであることが保証される.

3 応力拡大係数

直線亀裂の場合の亀裂先端近傍での変位の表示式は数学的に厳密な論法のもとで次のようになることが示されている. [1]

定理 4 亀裂 Σ が線分のとき, 注目する亀裂先端を原点, 亀裂が x_1 軸の負の部分に含まれるように座標軸をとり, x_1 軸の正の方向が $\theta = 0$ となるように極座標 $(r, \theta), -\pi < \theta < \pi$ をとる. このとき, 原点近傍での変位の表示式は

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_1}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \\ \sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \end{pmatrix} + \frac{K_2}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(\kappa + 2 + \cos\theta) \\ -\cos\frac{\theta}{2}(\kappa - 2 + \cos\theta) \end{pmatrix} + u_R \tag{3.1}$$

となる. u_R は定数項と $\sqrt{r}$ より高次の項から成る.

曲線亀裂の場合は $W(\varphi)$ の亀裂先端近傍での漸近形を計算することで同様の表示式が得られる.

定理 5 亀裂先端 γ_1 に注目して, 亀裂 Σ は x_1 軸の負の部分に接するようにγ_1 での亀裂の接線方向に x_1 軸をとる. この座標系で φ が

$$\varphi=\sum_{m=1}^{2}\begin{pmatrix} k_{2,m} \\ k_{1,m} \end{pmatrix}\sqrt{r_m}\eta_m(r_m)+\varphi_R(x), \quad \varphi_R\in H_{00}^{3/2}(\Sigma)^2.$$

と表されているとき, $K_i(i=1,2)$ を $K_i=k_{i,1}\times G\sqrt{2\pi}/(\kappa+1)$ と定めると $W(\varphi)$ は γ_1 の近傍で式 (3.1) の右辺と同じ漸近形を持つ. γ_2 に注目する場合も同様である.

4 数値解の収束証明

Strang-Fix [4] による特異性の取り扱いに則って, 問題2の有限要素解析による近似誤差の解析を行う. 解の表示で用いた cutoff 関数 $\eta_j(j=1,2)$ を用いて特異要素を導入すると有限要素法の誤差解析の処方箋に従って誤差評価を行うことができる. 曲線亀裂の場合も直線の場合と本質的な違いはないので, ここでは簡単のため直線亀裂の場合を考える. 以下, 亀裂 Σ は x_1 軸上の区間 $(-a,a)$ とする. 区間 Σ を n 個に分割し両端点 $x_0=\gamma_1=(-a,0), x_n=\gamma_2=(a,0)$ を含め $n+1$ 個の分点 $\{p_k\}_{k=0}^{n}$ をとり, 最大分割幅 $\max_{k=1,\ldots,n}|p_k-p_{k-1}|$ を h とおく. cutoff 関数を

$$\eta_1(x_1)=\begin{cases} 1, & -a<x_1<-3a/4, \\ 0, & -a/2<x_1<a. \end{cases} \quad \eta_2(x_1)=\begin{cases} 1, & 3a/4<x_1<a, \\ 0, & -a<x_1<a/2. \end{cases}$$

とし, 以下のように近似空間を構成する.

$$\varphi_l(p_k)=\delta_{k,l}, \quad k=0,\ldots,n, l=1,\ldots,n-1$$

満たす一次要素の空間を

$$V_R^h:=\left\{\sum_{l=1}^{n-1}a_l\varphi_l(x)\right\}$$

とし,

$$V_S:=\{a_0\eta_1(r_1)\sqrt{r_1}+a_n\eta_2(r_2)\sqrt{r_2}\}$$

を特異要素の空間とする. $V_h:=V_S\cup V_{R,h}$ とおき, 近似解を $(V^h)^2$ で求める.

問題 2 与えられた $g\in H^{1/2}(\Sigma)^2$ に対して

$$<TW(\varphi^h),\psi^h>=<g,\psi^h>, \quad \forall\psi^h\in(V^h)^2$$

を満足する $\varphi^h \in (V^h)^2$ を求める.

定理 6 φ, φ^h と h に依存しない定数Cが存在して,

$$\|\varphi^h - \varphi\|_{1/2,00} \le C|\varphi_R|_1 h^{1/2} \tag{4.1}$$

$$|K^h_{i,j} - K_{i,j}| \le C|\varphi_R|_1 h^{1/2} \tag{4.2}$$

が成立する. $|\psi|_1$ は $|\psi|_1^2 = \int_{-a}^{a} |\psi'(x)|^2 dx$ で定義されるセミノルムである.

証明:

1. $\|\varphi^h - \varphi\|_{1/2,00}$ の評価.

(4.1),(4.2) と Céa の補題から

$$\|\varphi^h - \varphi\|_{1/2,00} \le C \inf_{\psi^h \in V_h^2} \|\psi^h - \varphi\|_{1/2,00} \tag{4.3}$$

が成り立つ. 特に ψ^h の特異項を φ_S 自身にとると

$$\inf_{\psi^h \in V_h^2} \|\psi^h - \varphi\|_{1/2,00} \le \inf_{\psi^h = \varphi_S + \psi^h_R, \psi^h_R \in (V^h_R)^2} \|\psi^h - \varphi\|_{1/2,00} = \inf_{\psi^h_R \in (V^h_R)^2} \|\psi^h_R - \varphi_R\|_{1/2,00}$$

である. ここで, 一次要素による補間作用素を

$$\begin{array}{rccc} \Pi^h : & H^{3/2}_{00}(\Sigma) & \to & V^h_R \\ & \varphi_R & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_R(p_i)\varphi_i(x) \end{array}$$

と表すと

$$\inf_{\psi^h_R \in V^h_R} \|\psi^h_R - \varphi_R\|_{1/2,00} \le \|\Pi^h \varphi_R - \varphi_R\|_{1/2,00}$$

となり, $(V^h_R)^2$ の元による $\varphi_R \in H^{3/2}_{00}(\Sigma)^2$ の補間の誤差評価のみを行なえばよい. まず $\psi \in H^{3/2}_{00}(\Sigma)^2 \subset H^1(\Sigma)^2$ に対してψ に依存しない定数 C_1 が存在して

$$\|\Pi^h \psi - \psi\|_{H^k(\Sigma)} \le C_1 |\psi|_1 h^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

が成り立つので, ソボレフ空間の補間不等式から

$$\begin{aligned} \|\Pi^h \varphi_R - \varphi_R\|_{H^{1/2}(\Sigma)} &\le C_2 \|\Pi^h \varphi_R - \varphi_R\|^{1/2}_{L^2(\Sigma)} \|\Pi^h \varphi_R - \varphi_R\|^{1/2}_{H^1(\Sigma)} \\ &\le C_3 |\varphi_R|_1 h^{1/2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

が得られる. 次に

$$\|d(x, \partial\Sigma)^{-1/2}(\Pi^h \varphi_R(x) - \varphi_R(x))\|_{L^2(\Sigma)} = \int_{-a}^{a} d(x, \partial\Sigma)^{-1} |\Pi^h \varphi_R(x) - \varphi_R(x)|^2 dx \tag{4.5}$$

を評価する.

$$\begin{aligned}|\Pi^h\varphi_R(x)-\varphi_R(x)|^2 &= |\int_{-a}^{x}(\Pi^h\varphi_R-\varphi_R)'(t)\mathrm{d}t|^2\\ &\le \int_{-a}^{x}1^2\mathrm{d}t\int_{-a}^{x}|(\Pi^h\varphi_R-\varphi_R)'(t)|^2\mathrm{d}t\\ &\le |\varphi_R-\Pi_h\varphi_R|_1^2\cdot(x+a)\\ &\le C_1|\varphi_R|_1 h\cdot(x+a)\end{aligned}$$

となることに注意する. (4.5) を $(-a,-a+h),(-a+h,a-h),(a-h,a)$ に分けて評価する. まず

$$\begin{aligned}&\int_{-a}^{-a+h} d(x,\partial\Sigma)^{-1}|\Pi^h\varphi_R(x)-\varphi_R(x)|^2\mathrm{d}x\\ &\quad\le |\Pi^h\varphi_R-\varphi_R|_{1,\Sigma}^2\int_{-a}^{-a+h} d(x,\partial\Sigma)^{-1}(x+a)^2\mathrm{d}x\le C_4|\varphi_R|_1^2 h.\end{aligned}$$

同様にして

$$\int_{a-h}^{a} d(x,\partial\Sigma)^{-1}|\Pi^h\varphi_R(x)-\varphi_R(x)|^2\mathrm{d}x\le C_5|\varphi_R|_1^2 h.$$

そして

$$\begin{aligned}&\int_{-a+h}^{a-h} d(x,\partial\Sigma)^{-1}|\Pi^h\varphi_R(x)-\varphi_R(x)|^2\mathrm{d}x\\ &\quad\le \max_{-a+h\le x\le a-h} d(x,\partial\Sigma)\int_{-a+h}^{a-h}|\Pi^h\varphi_R(x)-\varphi_R(x)|^2\mathrm{d}x\\ &\quad\le C_6h^{-1}\|\Pi^h\varphi_R-\varphi_R\|_{L^2(\Sigma)}^2\le C_7|\varphi_R|_1^2 h\end{aligned}$$

となるので,

$$\|d(x,\partial\Sigma)^{-1/2}(\Pi^h\varphi_R-\varphi_R)\|_{L^2(\Sigma)}\le C_8|\varphi_R|_1 h^{1/2} \tag{4.6}$$

という評価が得られる.(4.4),(4.6) と $H_{00}^{1/2}(\Sigma)^2$ のノルムの定義より φ_h に対する誤差評価が得られる.

2. $|K_{1,1}^h-K_{1,1}|$ の評価

区間 $(-a,-3a/4)$ で

$$\varphi_h-\varphi=\varphi_{h,S}-\varphi_S+\varphi_{h,R}-\varphi_R$$

の第二成分には

$$(K_{1,1}^h-K_{1,1})\sqrt{r_1}=\varphi_2^h(x)-\varphi_2(x)+\varphi_{R,2}(x)-\varphi_{R,2}^h(x)$$

の関係がある. 両辺の絶対値を区間 $(-a,-3a/4)$ で積分し Schwarz の不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
&|K_{1,1}^h - K_{1,1}| \int_{-a}^{-3a/4} \sqrt{r_1}dx \\
\leq\ & \int_{-a}^{-3a/4} |\varphi_2^h(x) - \varphi_2(x)|dx + \int_{-a}^{-3a/4} |\varphi_{R,2}(x) - \varphi_{R,2}^h(x)|dx \\
\leq\ & \left(\int_{-a}^{-3a/4} 1^2 dx\right)^{1/2} \left[\left(\int_{-a}^{-3a/4} |\varphi_2^h(x) - \varphi_2(x)|^2 dx\right) + \left(\int_{-a}^{-3a/4} |\varphi_{R,2}(x) - \varphi_{R,2}^h(x)|^2 dx\right)\right].
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
|K_{1,1}^h - K_{1,1}| &\leq C\left(\|\varphi^h - \varphi\|_{L^2} + \|\varphi_R^h - \varphi_R\|_{L^2}\right) \\
&\leq 2C\|\varphi^h - \varphi\|_{1/2,00}
\end{aligned}
$$

他の $K_{i,j}^h$ の誤差評価も全く同様である.

参考文献

[1] P. Grisvard. *Singularities in Boundary Value Problems.* Research Notes in Applied Mathematics. RMA 22. 1992. Springer-Verlag.

[2] C. Constanda : *A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation*, Longman Scientific & Technical,1990.

[3] J.C. Nedelec : *Le potenitel de double couche pour les ondes élastique* , Internal report n^o 99 of Centre de Mathḿatiques appliquées, Ecole Polytechnique, France, 1983.

[4] G. Strang , G.J. Fix : *An Analysis of the Finite Element Method* Prentice-Hall, Inc. , Englewood Fliffs, N. J. 1973.

[5] J.L.Lions , E.Magenes : *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Volume I* , Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

[6] P. Grisvard : *Elliptic Porblems in Nonsmooth Domains*, Pitman,1985.