数理解析研究所講究録
944巻 1996年 50-58

制約付き最適化問題に対する 非単調SQP法について

東京理大　工　　矢部　博 (Yabe Hiroshi)
数理システム　　山下　浩 (Yamashita Hiroshi)

1 はじめに

次の制約条件付き最適化問題

$$\text{(CP)} \qquad \begin{array}{lll} \text{minimize} & f(x), \quad x \in R^n, & \\ \text{subject to} & g_j(x) = 0, \ j \in J_E, & g_j(x) \geq 0, \ j \in J_I, \end{array}$$

を考える．ただし，$J_E = \{1, 2, ..., m'\}, J_I = \{m'+1, ..., m\}, f : R^n \to R, g_j : R^n \to R, \ j \in J_E \cup J_I$, である．この問題を解くための有効な数値解法として逐次2次計画法（SQP法）がよく知られており，大域的収束性や局所的な収束速度が活発に研究されてきた [1]．しかしながら，いくつかの問題点が指摘されている．代表的な問題点のひとつとして，l_1型正確なペナルティ関数をメリット関数とする直線探索法では Maratos 効果と呼ばれる現象が生じて，最適解の近傍でステップ幅1が採用されず，その結果として超1次収束性が妨げれらることが以前から指摘されている [10]．要するに，大域的収束性と局所的に速い収束性の両立が難しくなってしまう．この問題の解決策として，これまでに Chamberlain et al. [3], Mayne and Polak [11], Fukushima [4], Panier and Tits [12], Bonnans et al. [2] などの研究があるが，バックトラックをしたり，各反復で2次計画部分問題を2回解いたりするなど，必ずしも簡便なテクニックとはいえない．

そこで本稿では，非単調な直線探索を利用した簡便な数値解法を提案する。非単調直線探索法は，無制約最小化問題に対して有望視されている ([5],[6],[7])．我々は，Grippo らとは異なる非単調直線探索法を提案し，これを SQP 法に組み込む（こうした SQP 法を，非単調 SQP 法 (nonmonotone SQP method) と呼ぶ）ことによって上記のテクニックよりももっと簡便に Maratos 効果が回避できることを示す．その結果として，非単調 SQP 法が大域的および局所的超1次収束することが保証される．

2 SQP法のアルゴリズムと Maratos 効果

アルゴリズムを述べる前に，まず，いくつかの記号を定義する．問題 (CP) に対する Lagrange 関数 $L(x, y)$ は，

$$L(x, y) = f(x) - y^t g(x) = f(x) - \sum_{j \in J_E} y_j g_j(x) - \sum_{j \in J_I} y_j g_j(x)$$

で定義される．ただし，$y \in R^m$は Lagrange 乗数ベクトルである．問題 (CP) の最適性条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件，以下略して KKT 条件) は，次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&(2.1) & \nabla_x L(x,y) &= 0, \\
&(2.2) & g_j(x) &= 0, \quad j \in J_E, \\
&(2.3) & y_j g_j(x) &= 0, \quad g_j(x) \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in J_I.
\end{aligned}
$$

以下では，KKT 条件を満足する対のひとつを (x^*, y^*) とする．

ＳＱＰ法の大域的収束性を保証するための手段として，直線探索法が用いられる．これは，２次計画部分問題から得られた探索方向に沿って適当なメリット関数の値を下げる作業のことで，代表的なメリット関数は l_1型正確なペナルティ関数である [9], [13]．以下に l_1型正確なペナルティ関数 $F(x;\rho)$ と $F(x+d;\rho)$ の 1 次近似関数 $F_l(x,d;\rho)$ を定義する:

$$
\begin{aligned}
F(x;\rho) &= f(x) + \rho \left(\sum_{j \in J_E} |g_j(x)| + \sum_{j \in J_I} |\min(0, g_j(x))| \right), \\
F_l(x,d;\rho) &= f(x) + \nabla f(x)^t d + \rho \left(\sum_{j \in J_E} |g_j(x) + \nabla g_j(x)^t d| \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j \in J_I} |\min(0, g_j(x) + \nabla g_j(x)^t d)| \right),
\end{aligned}
$$

ただし，ρは正のペナルティパラメータである．また，$F_l(x,d;\rho)$ と $F(x;\rho)$ の差を

$$
\Delta F_l(x,d) = F_l(x,d;\rho) - F(x;\rho)
$$

とおく．

SQP 法のアルゴリズムは，以下のように記述できる．

[SQP 法のアルゴリズム]

Step 0. 初期点 $x_0 \in R^n$，対称な初期行列 $G_0 \in R^{n \times n}$，およびパラメータ $0 < \theta < 1/2$ を与える．$k = 0$ とおく．

Step 1. 次の QP 部分問題 QP(x_k, G_k) を解いて，探索方向 d_kと対応する Lagrange 乗数ベクトル y_{k+1}を求める:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} && \frac{1}{2} d^t G_k d + \nabla f(x_k)^t d, \\
&\text{subject to} && g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d = 0, \ j \in J_E, \quad g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d \geq 0, \ j \in J_I.
\end{aligned}
$$

Step 2. もし (x_k, y_{k+1}) が問題 (CP) の KKT 条件を満たすならば停止し，さもなければ Step 3 へ行く．

Step 3. Armijo の直線探索基準

$$
(2.4) \qquad F(x_k + \alpha_k d_k; \rho) \leq F(x_k;\rho) + \theta \alpha_k \Delta F_l(x_k, d_k)
$$

を満足するステップ幅α_kを決定し，$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ とおく．

Step 4. 行列 G_kを更新して $G_{k+1} \in R^{n\times n}$を作り，$k=k+1$ とおいて Step 1 へ行く．□

上記のアルゴリズムの Step 1 から得られる探索方向を特徴づけるには，ＱＰ部分問題に対する KKT 条件が利用される．

$$
\begin{aligned}
&(2.5) & G_k d_k + \nabla f(x_k) - \sum_{j\in J_E \cup J_I} (y_{k+1})_j \nabla g_j(x_k) &= 0, & \\
&(2.6) & g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d_k &= 0, & j \in J_E, \\
&(2.7) & (y_{k+1})_j (g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d_k) &= 0, & j \in J_I, \\
&(2.8) & g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d_k \ge 0, \quad (y_{k+1})_j &\ge 0, & j \in J_I.
\end{aligned}
$$

式 (2.6), (2.8) から

$$
(2.9) \qquad F_l(x_k, d_k; \rho) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t d_k
$$

を得るので，

$$
\begin{aligned}
(2.10) \qquad & \Delta F_l(x_k, d_k) \\
& \le - \left(d_k^t G_k d_k + (\rho - \|y_{k+1}\|_\infty) \left(\sum_{j\in J_E} |g_j(x_k)| + \sum_{j\in J_I} |\min(0, g_j(x_k))| \right) \right)
\end{aligned}
$$

と評価される．したがって，行列 G_kの非負定値性や$\rho > \|y_{k+1}\|_\infty$を仮定すれば，$(x_k, y_{k+1})$が（ＣＰ）のＫＫＴ点でない限り$\Delta F_l(x_k, d_k) < 0$ が言えるので，探索方向 d_kがメリット関数の降下方向になり，Armijo の基準を満足するステップ幅が選べることが保証される（後述の仮定Ｇや仮定Ｌを参照のこと）．

ＳＱＰ法は，Newton 法の考え方に基づいた数値解法なので，局所的に速い収束を達成するためには，$\alpha_k = 1$ が選ばれることが望ましい [8]．他方，大域的収束性を保証するためにメリット関数の減少を課したわけだが，そのために$\alpha_k = 1$ が採用されないことがあり得る．この現象が Maratos 効果と呼ばれるもので，以下にその例をあげておく．

（Maratos 効果の例）[13]
次の最小化問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} && f(x) = -x_1 + 10(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\
&\text{subject to} && g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

この問題の最適解は $(x_1^*, x_2^*) = (1, 0)^t$である．$k$回目の反復における近似解と近似行列を $x_k = (\cos\theta, \sin\theta)^t$，$G_k = \nabla_x^2 L(x^*, y^*) = I$とする．ここで，$x_k$は実行可能解であり，近似行列 G_kは最適解における Lagrange 関数のヘッセ行列に一致する．このとき，ＱＰ部分問題は

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} && \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2) + d_1(-1 + 20\cos\theta) + 20 d_2 \sin\theta, \\
&\text{subject to} && d_1 \cos\theta + d_2 \sin\theta = 0
\end{aligned}
$$

となる．これを解いて得られる探索方向 d_kと新しい近似解は

$$
d_k = \begin{pmatrix} \sin^2\theta \\ -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}, \quad x_{k+1} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin^2\theta \\ \sin\theta - \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}
$$

なので，x_kにおけるメリット関数値と x_k+d_kにおけるメリット関数値は，それぞれ

$$\begin{aligned} F(x_k;\rho) &= -\cos\theta, \\ F(x_k+d_k;\rho) &= -\cos\theta+(9+\rho)\sin^2\theta \end{aligned}$$

となる．よって，$\rho \geq 0$ なので，$\theta = 0$ でない限り

$$F(x_k+d_k;\rho) > F(x_k;\rho)$$

が成り立ち，近似解が十分に最適解に近くても$\alpha_k = 1$ に対してメリット関数が減少しないことがわかる．したがって，超 1 次収束性が保証されない．□

3　非単調ＳＱＰ法

前節の例で Maratos 効果を示した．これはメリット関数である l_1型正確なペナルティ関数が微分可能でないことによる．したがって，この関数をメリット関数に選ぶ限りＳＱＰ法をそのまま使用すれば Maratos 効果が問題になる．そこで，大域的収束性を保存しながら，いかにして$\alpha_k = 1$ が採用される機会を増やすかが大きな課題になる．

本節では，この課題に対する解決策として，非単調ＳＱＰ法を提案する．アルゴリズムを述べる前に，次のような残差ベクトルを定義する．

$$r(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,y) \\ \sum_{j\in J_E} |g_j(x)| + \sum_{j\in J_I} |\min(0,g_j(x))| \\ y^t g(x) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

ＱＰ部分問題を解いて得られる Lagrange 乗数は，不等式条件に関しては $(y_{k+1})_j \geq 0,\ j \in J_I$ が成り立つので，$r(x_k, y_{k+1}) = 0$ を満たす (x_k, y_{k+1}) が KKT 点になることに注意されたい．

我々が提案する非単調ＳＱＰ法は 2 種類あり，それらを（Ａ），（Ｂ）とすれば，次のように記述できる．

[非単調 SQP 法 (A) のアルゴリズム]

Step 0. 初期点 $x_0 \in R^n$，対称な初期行列 $G_0 \in R^{n\times n}$，およびパラメータ$\delta_0 > 0, 0 < \theta < 1/2, 0 < \nu < 1$ を与える．$\omega_0 = F(x_0;\rho), k = 0$ とおく．

Step 1 と Step 2 は従来のＳＱＰ法と同じ．

Step 3. もし

$$\|r(x_k,y_{k+1})\| \leq \delta_k, \quad F(x_k+d_k;\rho) < \omega_k$$

ならば，$x_{k+1} = x_k + d_k$，$\delta_{k+1} = \nu\|r(x_k,y_{k+1})\|$ とおいて以下の手順を実行する．さもなければ，Step 4 へ行く．

Case (i) もし $F(x_{k+1};\rho) \leq F(x_k;\rho) + \theta\Delta F_l(x_k,d_k)$ ならば，$\omega_{k+1} \in [F(x_k;\rho), F(x_0;\rho)]$ とおいて Step 5 へ行く．

Case (ii) さもなければ，$\omega_{k+1} \in [F(x_{k+1};\rho), F(x_0;\rho)]$ とおいて Step 5 へ行く．

Step 4. Armijo の直線探索基準 (2.4) を満足するステップ幅α_kを決定し，$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$，$\omega_{k+1} = \omega_k$，$\delta_{k+1} = \delta_k$とおく．

Step 5. 行列 G_kを更新して $G_{k+1} \in R^{n\times n}$を作り，$k = k+1$ とおいて Step 1 へ行く．□

[非単調 SQP 法 (B) のアルゴリズム]

Step 0. 初期点 $x_0 \in R^n$，対称な初期行列 $G_0 \in R^{n\times n}$，およびパラメータ$\delta_0 > 0$, $0 < \theta' \leq \theta < 1/2$, $0 < \beta < 1$, $0 < \nu < 1$ を与える．$\omega_0 = F(x_0;\rho)$, $k = 0$ とおく．

Step 1 と Step 2 は従来のＳＱＰ法と同じ.

Step 3. もし

$$F(x_k + d_k;\rho) - \omega_k \leq \beta(F(x_k;\rho) - \omega_k) + \theta'\Delta F_l(x_k, d_k)$$

ならば，$x_{k+1} = x_k + d_k$とおいて以下の手順を実行する．さもなければ，Step 4 へ行く．

Case (i) もし $F(x_{k+1};\rho) \leq F(x_k;\rho) + \theta\Delta F_l(x_k, d_k)$ ならば，$\omega_{k+1} = F(x_k;\rho)$ とおいて Step 5 へ行く．

Case (ii) さもなければ，$\omega_{k+1} = F(x_{k+1};\rho)$ とおいて Step 5 へ行く．

Step 4. Armijo の直線探索基準 (2.4) を満足するステップ幅α_kを決定し，$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$，$\omega_{k+1} = \omega_k$，$\delta_{k+1} = \delta_k$とおく．

Step 5. 行列 G_kを更新して $G_{k+1} \in R^{n\times n}$を作り，$k = k+1$ とおいて Step 1 へ行く．□

上記のアルゴリズムでは，従来の Maratos 効果を回避するＳＱＰ法の改訂版 [2],[3],[4],[11],[12] のように，補助的な点での関数値やその勾配を評価したり，あるいは付加的な部分問題を解いたり，バックトラッキングをしたりする必要がないことに注意されたい．

4　大域的収束性

前節で提案した非単調ＳＱＰ法（Ａ),（Ｂ）の大域的収束性を保証するために，以下の条件を仮定する．

仮定 G

(G1) Dを R^nの凸な有界閉集合としたとき，関数 fと g_jは Dで連続的微分可能である．

(G2) 各反復でＱＰ部分問題 QP(x_k, G_k) が解けて，有界な探索方向 d_kが生成される．

(G3) 点列 $\{x_k\}$ と $\{x_k + d_k\}$ が集合 Dに含まれる．

(G4) 行列 $\{G_k\}$ は非負定値対称，かつ，一様有界である．

(G5) ペナルティパラメータは$\rho \geq \|y_k\|_\infty + \tau$を満足する．ただし，$\tau$は正の定数である．

まず，仮定 (G4), (G5) および (2.10) から

(4.1) $$\Delta F_l(x_k, d_k) \leq 0.$$

となる．なお，有限の kに対して$\Delta F_l(x_k, d_k) = 0$ が成り立つことと (x_k, y_{k+1}) が（ＣＰ）のＫＫＴ点であることが同値であることを注意しておく．以下では，有限回の反復で（ＣＰ）のＫＫＴ点が得られないものとして議論する．

以上の仮定のもとで，従来のＳＱＰ法が大域的収束することが Powell[13] によって示されている．

[補助定理１]
仮定Ｇが成り立つとき，ＳＱＰ法で生成される探索方向は

$$\liminf_{k\to\infty} \|G_k^{1/2} d_k\| = 0$$

を満足し，かつ，生成される点列 $\{(x_k, y_{k+1})\}$ のすべての集積点は問題（ＣＰ）の KKT 点になる．□

非単調ＳＱＰ法に対して，次の定理が得られる．

[定理１]
仮定Ｇのもとで，以下のことが成り立つ．

(1) 点列 $\{x_k\}$ が非単調ＳＱＰ法 (A) で生成されるならば，$\{(x_k, y_{k+1})\}$ のすべての集積点は問題（ＣＰ）の KKT 点である．

(2) 点列 $\{x_k\}$ が非単調ＳＱＰ法 (B) で生成されるならば，$\{(x_k, y_{k+1})\}$ のすべての集積点は問題（ＣＰ）の KKT 点である．□

証明の方針は，(1) においては

$$\lim_{i\to\infty} \|r(x_{k_i}, y_{k_i+1})\| = 0$$

となる部分列 $\{k_i\}$ が存在することを示す．また，(2) においては，

$$L_l(x_k, d) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t d - \sum_{j\in J_E \cup J_I} (y_{k+1})_j (g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d)$$

と定義したとき

(4.2) $$\lim_{k\to\infty} \Delta F_l(x_k, d_k) = 0$$

および，

(4.3) $$L(x_k, y_{k+1}) = L_l(x_k, d_k) + d_k^t G_k d_k \geq L_l(x_k, d_k) = F_l(x_k, d_k; \rho)$$

が成り立つことを示す．これらは文献 [13] の式 (2.5),(2.11),(2.12),(2.17) に相当するので，[13] の定理１の証明と同様にして上記の結果が証明できる．

5 大域的収束から局所的超１次収束へ

本節では，非単調ＳＱＰ法（Ａ），（Ｂ）が大域的収束性を保存し，かつ，Maratos 効果を起こすことなく局所的超１次収束することを示す．そのために，仮定Ｇに代わって次の仮定を課す．

仮定 L

(L1) Dを R^nの凸な有界閉集合としたとき，関数 fと g_jは Dで２回連続的微分可能である．

(L2) 各反復で，ＱＰ部分問題 $\mathrm{QP}(x_k, G_k)$ が解ける．

(L3) 点列 $\{(x_k, y_{k+1})\}$ は (x^*, y^*) に収束する．

(L4) (x^*, y^*) において，等式条件と効いている不等式条件の勾配が線形独立で，さらに，最適性の２次の十分条件と狭義相補条件が成り立つ．

(L5) $J^* = \{j \in J_I | g_j(x^*) = 0\}$ としたとき，$A(x_k)$ はその行ベクトルが $\nabla g_j(x_k)^t$ $(j \in J_E \cup J^*)$ から成る行列とする．このとき，行列 G_kは正定値対称および一様有界で，さらに，適当な正の定数ζが存在して，$A(x_k)v = 0$ を満たす任意のベクトル $v \in R^n$ に対して $v^t G_k v \geq \zeta \|v\|^2$が成り立つ．

(L6) ペナルティパラメータは$\rho \geq \|y_k\|_\infty + \tau$を満足する．ただし，$\tau$は正の定数である．

(L7) 探索方向 d_kは次式を満足する．

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|x_k + d_k - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0.$$

仮定Ｌのもとでは，x^*で効いている不等式制約条件が同定出来るので，一般性を失うことなく，問題（ＣＰ）を解くＳＱＰ法は次の等式条件付き最小化問題を解くＳＱＰ法と同じ振る舞いをすると考えてよい．

$$\text{(ECP)} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x), \quad x \in R^n, \\ \text{subject to} & g_j(x) = 0,\ j \in J_E, \quad g_j(x) = 0,\ j \in J^*. \end{array}$$

以下では，y_{k+1}を改めてＱＰ部分問題から得られる Lagrange 乗数とする．また，ＱＰ部分問題に対する KKT 条件は

$$G_k d_k + \nabla f(x_k) - \sum_{j \in J_E \cup I^*} (y_{k+1})_j \nabla g_j(x_k) = 0, \tag{5.1}$$

$$g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^t d_k = 0, \quad j \in J_E \cup J^* \tag{5.2}$$

で表される．ただし，仮定 (L3), (L4) より $(y_{k+1})_j > 0$ $(j \in J^*)$ である．また，関数 $L(x, y)$, $F(x; \rho)$, $F_l(x + d; \rho)$ は次のように書き換えられる;

$$L(x, y) = f(x) - \sum_{j \in J_E} y_j g_j(x) - \sum_{j \in J^*} y_j g_j(x), \tag{5.3}$$

$$F(x;\rho) = f(x) + \rho \left(\sum_{j \in J_E} |g_j(x)| + \sum_{j \in J^*} |\min(0, g_j(x))| \right), \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} F_l(x,d;\rho) = {} & f(x) + \nabla f(x)^t d + \rho \left(\sum_{j \in J_E} |g_j(x) + \nabla g_j(x)^t d| \right. \\ & \left. + \sum_{j \in J^*} |\min(0, g_j(x) + \nabla g_j(x)^t d)| \right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

なお，仮定 (L1)–(L6) のもとで，(L7) が成り立つための必要十分条件が

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|P_k(G_k - \nabla_x^2 L(x^*, y^*))d_k\|}{\|d_k\|} = 0 \tag{5.6}$$

であることが文献 [13] で示されている．ただし，

$$P_k = I - A(x_k)^t (A(x_k)A(x_k)^t)^{-1} A(x_k) \tag{5.7}$$

である．

十分に反復回数が大きいときに常にステップ幅が 1 になることを示すためには，次の 2 つの補助定理が本質的に役に立つ．まず補助定理 2 では，ステップ幅 1 が，$(k-1)$ 回目の反復で Armijo 基準を満たさなくても，次の k回目の反復で Armijo 基準を満足することが保証される．さらに補助定理 3 で，このとき x_{k+1}におけるメリット関数値が必ず x_{k-1}におけるメリット関数値よりも低くなることが保証される．

[補助定理 2]
十分に大きな kに対して，もし $x_k = x_{k-1} + d_{k-1}$, $x_{k+1} = x_k + d_k$で，かつ，

$$F(x_k;\rho) > F(x_{k-1};\rho) + \theta \Delta F_l(x_{k-1}, d_{k-1})$$

ならば，

$$F(x_{k+1};\rho) \le F(x_k;\rho) + \theta \Delta F_l(x_k, d_k)$$

が成り立つ．□

[補助定理 3]
十分に大きな kに対して，もし $x_k = x_{k-1} + d_{k-1}$, $x_{k+1} = x_k + d_k$ ならば，

$$F(x_{k+1};\rho) < F(x_{k-1};\rho) \tag{5.8}$$

が成り立つ．□

以上の補助定理を利用すれば，最終的にアルゴリズム（A），（B）の Step 3 の条件が毎回満足されることが証明でき，その結果として常にステップ幅が 1 になることが示される．このことをまとめれば，次の定理を得る．

[定理 2]
仮定Ｌのもとで以下のことが成り立つ．

(1) 非単調ＳＱＰ法（A）で生成される点列は，十分に大きな kに対して常に $x_{k+1} = x_k + d_k$ を満足し，したがって，最適解に超 1 次収束する．

(2) 非単調ＳＱＰ法（B）で生成される点列は，十分に大きな kに対して常に $x_{k+1} = x_k + d_k$ を満足し，したがって，最適解に超 1 次収束する．□

参考文献

[1] P.T.Boggs and J.W.Tolle, Sequential quadratic programming, in *Acta Numerica 1995*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, pp.1-51.

[2] J.F.Bonnans, E.R.Panier, A.L.Tits and J.L.Zhou, Avoiding the Maratos effect by means of a nonmonotone line search II: Inequality constrained problems – feasible iterates, *SIAM J. on Numerical Analysis*, 29 (1992), pp.1187-1202.

[3] R.M.Chamberlain, M.J.D.Powell, C.Lemarechal and H.C.Pedersen, The watchdog technique for forcing convergence in algorithms for constrained optimization, *Mathematical Programming Study*, 16 (1982), pp.1-17.

[4] M.Fukushima, A successive quadratic programming algorithm with global and superlinear convergence properties, *Mathematical Programming*, 35 (1986), pp.253-264.

[5] L.Grippo, F.Lampariello and S.Lucidi, A nonmonotone line search technique for Newton's method, *SIAM J. on Numerical Analysis*, 23 (1986), pp.707-716.

[6] L.Grippo, F.Lampariello and S.Lucidi, A truncated Newton method with nonmonotone line search for unconstrained optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 60 (1989), pp.401-419.

[7] L.Grippo, F.Lampariello and S.Lucidi, A class of nonmonotone stabilization methods in unconstrained optimization, *Numerische Mathematik*, 59 (1991), pp.779-805.

[8] S.P.Han, Superlinearly convergent variable metric algorithms for general nonlinear programming problems, *Mathematical Programming*, 11 (1976), pp.263-282.

[9] S.P.Han, A globally convergent method for nonlinear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 22 (1977), pp.297-309.

[10] N.Maratos, *Exact penalty function algorithms for finite dimensional and optimization problems*, Ph.D.Thesis, Imperial College of Science and Technology, University of London, London, U.K., 1978.

[11] D.Q.Mayne and E.Polak, A superlinearly convergent algorithm for constrained optimization problems, *Mathematical Programming Study*, 16 (1982), pp.45-61.

[12] E.R.Panier and A.L.Tits, Avoiding the Maratos effect by means of a nonmonotone line search I: General constrained problems, *SIAM J. on Numerical Analysis*, 28 (1991), pp.1183-1195.

[13] M.J.D.Powell, Variable metric methods for constrained optimization, in *Mathematical Programming: The State of the Art, Bonn 1982*, A.Bachem, M.Grötschel and B.Korte, eds., Springer-Verlag, Berlin, 1983, pp.288-311.