

可能性測度による組合せ最適化問題

—— ファジィ最短経路問題への適用 ——

大阪大学大学院工学研究科 伊藤 健 (Takeshi Itoh)

大阪大学大学院工学研究科 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)

Abstract

最短経路問題において、ネットワーク内で定義される距離は定数である。しかし、そのようなことは実社会において稀である。本研究においては、そのような距離をファジィ理論で扱う L - R ファジィ数として問題を設定する。経路の距離に対してはファジィ目標を導入し、経路の距離がある値以下となる可能性が最大であるものを最適（最短）とみなし定式化を行う。また、その解法として、Dijkstra のアルゴリズムを応用した方法を提案する。

1 はじめに

意思決定のための要因が不確実な場合、そのような要素を確率的変動を伴うものとして定式化を行うことが多い。たしかに、確率変数を導入することで適当な解が得られることもあるが、単なる情報量の不足により不確実性が生じているような場合には、それらを確率変数ではなくファジィ数として扱うことが妥当と思われる。そこで、我々は従来の組合せ最適化問題にファジィ要素を取り入れ、いくつかのファジィ組合せ最適化問題を提案してきた [5] [6]。

本研究では、ファジィ最短経路問題を扱う。最短経路問題において、ネットワーク中の各枝に設定される距離は定数であるが、現実には、都市間を移動する進行速度や所要時間が時刻、日付、天候等により影響を受けるため、そのような距離をファジィ化することが考えられる。我々は各枝の距離をファジィ数により表現し、ファジィ理論で様相性を議論する際に用いる可能性測度を利用することにより、可能性計画問題として定式化を行う。

2 定式化

対象とするネットワークをグラフ $G(N, E)$ で表し、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はノード集合、 E は枝集合で e_{ij} ($i, j \in N, i \neq j$) なるノード i, j を結ぶ枝により構成されるものとする。ただし、ノード 1 は始点（出発点）、ノード n はターミナルノードとし、各枝 e_{ij} には距離 \tilde{D}_{ij}

が設定されており、これらは次のようなメンバシップ関数により制限される正の L - R ファジィ数として定義する。

$$\mu_{\tilde{D}_{ij}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_{ij} - x}{\alpha_{ij}}\right) & (x \leq m_{ij}, \alpha_{ij} > 0) \\ R\left(\frac{x - m_{ij}}{\beta_{ij}}\right) & (x \geq m_{ij}, \beta_{ij} > 0) \end{cases}$$

ただし、 L は $L(0) = 1$; $L: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ なる減少関数とし、 R も同様の関数とする。したがって、 \tilde{D}_{ij} のメンバシップ関数は m_{ij} において頂点をとる単峰型となる。また、 \tilde{D}_{ij} を $\tilde{D}_{ij} = (m_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})_{LR}$ で表現すれば、 \tilde{D}_{ij} と $\tilde{D}_{jk} = (m_{jk}, \alpha_{jk}, \beta_{jk})$ の拡張和 $\tilde{D}_{ij} \oplus \tilde{D}_{jk}$ は

$$\tilde{D}_{ij} \oplus \tilde{D}_{jk} = (m_{ij} + m_{jk}, \alpha_{ij} + \alpha_{jk}, \beta_{ij} + \beta_{jk})_{LR}$$

となる [2]。

本定式化の意図は、始点から終点までのすべての経路のうち、その距離がある値 A 以下となる可能性が最大となるものを選択することである。そのために、次のようなファジィ目標 G を設定する。

G : 「経路の距離はだいたい A 以下である。」

したがって、 G のメンバシップ関数は例えば

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < A) \\ \frac{B - x}{B - A} & (A \leq x \leq B) \\ 0 & (x > B) \end{cases}$$

と考えることができる (図1参照)。

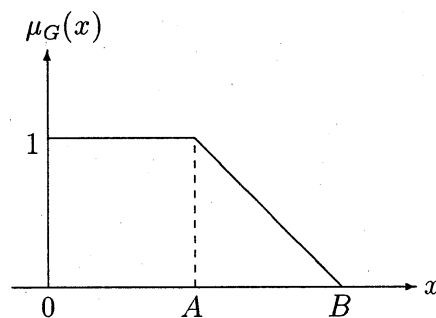


図1 ファジィ目標 G のメンバシップ関数

経路の距離は、その経路を構成する枝の距離によって決定されるものとし、ファジィ距離の拡張和として定義する。このとき、ノード 1 からノード i への経路集合を P_i 、その要素 p に対する距離を $\tilde{D}(p)$ とし、次のような可能性測度最大化に基づく問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \Pi_{\tilde{D}(p)}(G) \\ & \text{s.t.} && \Pi_{\tilde{D}(p)}(G) = \sup_x \min\{\mu_{\tilde{D}(p)}(x), \mu_G(x)\} \\ & && p \in P_n \end{aligned}$$

ここで、 $\Pi_{\tilde{D}(p)}(G)$ はファジィ目標 G に対する可能性測度であり、下の図2のように解釈できる。

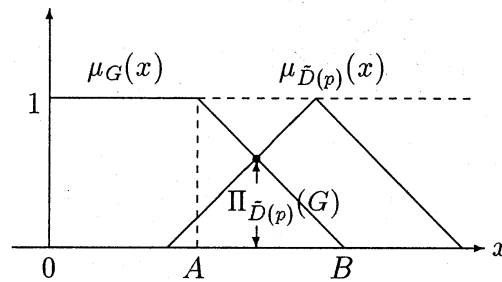


図2 ファジィ目標 G に対する可能性測度

つまり、経路集合 P_n のうちファジィ目標 G の可能性測度を最大にする要素（経路） p を最適経路と見なす。

3 解法

枝に設定されている距離は正の L - R ファジィ数であるから、非負である。したがって、ある経路に枝を追加すると、実際の距離は増加することはあっても、減少することはない。ゆえに、経路を構成する枝の数が増加するにつれ、その距離はファジィ目標で言及されている A の値に近づき、超えてゆく。つまり、可能性測度は減少することになり（図3参照）、次の定理1は明らかである。

定理1

メンバーシップ関数が非増加関数として表されるファジィ目標（事象） G について、

$$\Pi_{\tilde{D}(p)}(G) \geq \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{ij}}(G) \quad (p \in P_i)$$

である。ただし、 j はノード i に隣接するノードを示す。

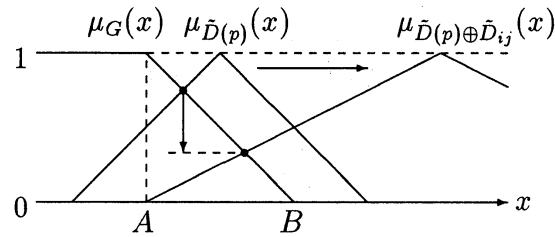


図3 枝の追加による可能性測度の変化

定理1は次のように解釈することができる。

補題2

ある経路のファジィ目標 G に対する可能性測度は、そのいかなる部分経路よりも小さい。

本研究では、解法アルゴリズムにおいて、**Dijkstra**のアルゴリズム[1]を利用する。すなわち、経路のファジィ目標に対する可能性測度を **Dijkstra**法の距離に対応させ、 \min の手続きを \max に置き換える。補題2が成立するので、このような応用の正当性が保証されるには、次のような命題が成り立つ必要がある。

命題3

あるノードに対する最適経路について、そのいかなる部分経路も、それ自身、最適経路である。

上の命題はノードによって真偽が異なる。例えば、ノード j に対する最適経路 p_j^* を、その経路内でノード j に隣接するノード i までの経路 p_i^* と枝 e_{ij} に分割して考える。いま、ノード i までの最適経路が p_i^* ではなく、 \hat{p}_i として別に存在すると仮定すれば

$$\Pi_{\tilde{D}(p_i^*)}(G) < \Pi_{\tilde{D}(\hat{p}_i)}(G)$$

である。経路の距離はファジィ数であるので、その値について大小関係が存在することもあれば、存在しないこともある[4]。つまり、ある経路の距離について、メンバシップ関数の中央値が他の経路のそれより大きい場合でも、曖昧さの程度が大きければ、どちらが大きい一概には決定できない。

- (i) p_i^* と \hat{p}_i に大小関係が存在するとき
仮定より

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{D}(p_i^*) \oplus \tilde{D}_{ij}}(G) &< \Pi_{\tilde{D}(\hat{p}_i) \oplus \tilde{D}_{ij}}(G) \\ \Leftrightarrow \Pi_{\tilde{D}(p_j^*)}(G) &< \Pi_{\tilde{D}(\hat{p}_i) \oplus \tilde{D}_{ij}}(G) \end{aligned}$$

j までの経路で最適とされている p_j^* よりも測度の値が大きい経路 $\hat{p}_i + e_{ij}$ が存在することとなり、矛盾。

(ii) p_i^* と \hat{p}_i に大小関係が存在しないとき

ファジィ目標 G についての可能性測度の値は、経路の距離に対するメンバシップ関数の左斜面とファジィ目標 G のメンバシップ関数との交点に対応するので (図2参照)、各々に枝 e_{ij} を加えることにより、測度の大小関係が逆転する恐れがある (図4参照)。

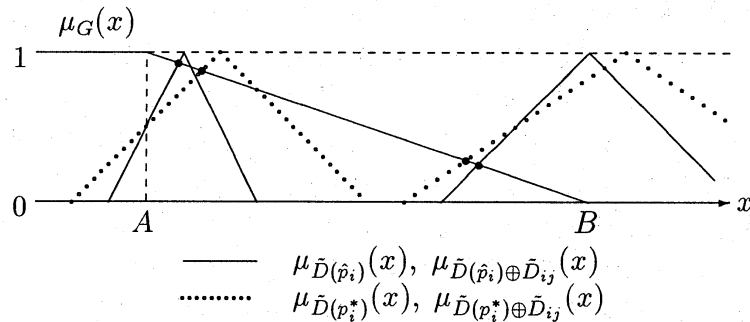


図4 測度に関する大小の逆転

したがって、(i) の様な場合には命題3は成立するが、(ii) の様な場合には、ノード i までは \hat{p}_i が最適で、その隣接ノードの j については、 i を経由する p_j^* が最適となることが起こりえるので、必ずしも命題3は成立しない。

命題3に対する絶対性の欠如を考慮し、Dijkstra法を拡張することにより、次のような最適経路探索アルゴリズムを提案する。

Algorithm

Step 0 テンポラリーラベル l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 等の設定。ただし、始点はすでにパーマネントラベル l_1^* を有する。

$$l_i = \begin{cases} \Pi_{D_{1i}}(G) & (e_{1i} \in E) \\ -\infty & (e_{1i} \notin E) \end{cases}$$

$$S(i) = \{ \text{ノード } i \text{ に隣接するノード (終点以外)} \}$$

$$Par(i) = \begin{cases} \{e_{1i}\} & (e_{1i} \in E) \\ \phi & (e_{1i} \notin E) \end{cases}$$

Step 1 $l_k = \max_i l_i$ なる k を選択する。

l_k をパーマネントラベル l_k^* とし、このときの始点からの経路を p_k^* とする。

終点 n にパーマネントラベル l_n^* があれば終了。

Step 2 p_k^* 上の k の隣接点を m とし、

$$Par(k) = Par(k) \cup \{p + e_{mk} | p \in Par(m)\}$$

$$\cup \{p + e_{ik} | i \in S(k) \setminus \{m\}, p \in Par(i), p_k^* \text{ と大小関係が成立しない} \}$$

Step 3 $i \in S(k) \setminus \{l^*\}$ をもつノード } について

$$l_i = \max (l_i, \Pi_{\bar{D}(p_k^*) \oplus \bar{D}_{ki}}(G), \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{ki}}(G)) \quad p \in Par(k)$$

Step 1へ。

4 おわりに

ファジィ最短経路問題に関する研究は幾つか存在する。[2]においては、最適とされる経路を求めるときにノード間の枝の存在性が無視されるため、解として得られた最短経路が実在しないことがある。[3]はそのような問題点を改善し、最短とされる経路については距離と可能性の要因による非劣解を求めている。本研究においても基本的には Dijkstra のアルゴリズムを拡張することにより、得られた経路は必ず存在するが、経路に対応するファジィ数間で大小関係が成立しない場合には解の候補として残しておき、最終的にそれらの中からファジィ目標に対する可能性測度の値が最大となるものを選んでいく。したがって、非劣解の集合から可能性測度を重みとして最適解を選択しているとも解釈できる。

今後の課題としては、経路に枝を追加することにより、測度の大きさが逆転しても成立する単調性に似た性質を見だし、アルゴリズムの簡略化を図る必要がある。さらに、本研究においては1種類のファジィ目標のみを設定しているため、経路を構成する枝の数が少ない段階では、その可能性測度の値が1となる経路が複数現れ計算時間を増大させる恐れがある。

なお、この研究は文部省科学研究費一般 C07680462 によるものであることを付記しておく。

参考文献

- [1] E.W.Dijkstra, "A note on two problem in connection with graphs", Numerische Mathematics 1 (1959).
- [2] D.Dubois & H.Prade, "Fuzzy sets and systems", Academic Press, New York (1980).
- [3] C.M.Klein, "Fuzzy shortest paths", Fuzzy Sets and Systems 39 (1991).
- [4] 中島, 竹田, 石井, "ファジィ理論入門", 裳華房 (1994).
- [5] T.Itoh & H.Ishii, "An approach to the fuzzy spanning tree problem by maximizing the possibility measure", Proceedings of APORS'94 (1995).
- [6] 伊藤, 石井, "必然性測度に基づくファジィスパニングツリー問題の一解法", 日本OR学会論文誌 (掲載予定).