数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 163-172

Constrained Sums

岩本 誠一 (Seiichi IWAMOTO)

九州大学 経済学部 経済工学科

1 はじめに

動的計画法 [1] は重要な逐次最適化法としてよく知られているが、その基本的な考え方が単に最適化問題ばかりでなく広く非最適化問題にも応用されることは（最適化そのものの重要さの影に隠れて）あまり知られていないようである。尤も、最適化問題と非最適化問題の境界をどこに引くかは大変難しい問題である。事実、動的最適化問題において決定（制御）空間を一点集合にとれば、それは最適化問題であるが、非最適化問題にもなっている。動的計画法の由来は、Bellman が自叙伝 [2, 1984,p.203] で述べているように、本来 "that is dynamic programming without optimization" にある。Sniedovich [6] は第 3 部エピローグ第 14 章 "What Then Is Dynamic Programming?" において抽象動的計画モデルの具体例として 6 つの非最適化問題

1. オーストラリア兎の問題　〈フィボナッチ列・線形差分式〉
2. 実数列 $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ を読み込んで、値 $z^* := \max_{1\le n\le k} y_n^2 - \min_{1\le n\le k} y_n^2$ を出力するプログラムを書く　〈結合演算〉
3. 独立同一確率変数列の和 $S_k := \Sigma_{n=1}^{k} X_n$ の分布関数をその共通確率分布関数 $p(\cdot)$ を用いて表す　〈コンボリューション〉
4. グラフの precedence 行列からその transitive closure を計算する　〈ブール行列の積〉
5. 正整数係数の一次方程式の可解性の判定　〈論理再帰式〉
6. ハノイの塔の問題　〈ゲーム・パズル〉

を挙げて、動的計画法による（広義の）関数方程式を導いて解決できることを示している。他方、Iwamoto [3] は多重積分に対して動的計画的方法で再帰式を導いて積分値を求めている。そこでは基本的には最適化演算子 $\mathrm{opt}_{a\le x\le b}$ を積分演算子 $\int_{a\le x\le b} dx$ にどの程度置き換えられるかがポイントになっている。元来、積分は和の連続型（または極限型）である。

この報告では逆に積分の離散型として多重和を考える。これも**最適化を含まない動的計画**である。条件付き多重和についても動的計画的な再帰式によって計算できることを示す。ここでは 総和演算子 $\Sigma_{x=a}^{b}$ が離散型最適化演算子 $\mathrm{opt}_{a\le x\le b}$ と同様な役割りを果たしている。

2 基本原理と反復式

さて、問題と基本原理、それに基本となる反復式を述べよう。n次元整数空間 $\boldsymbol{Z}^n$内の領域上で定義された実数値関数のn重和の再帰式による計算を考える。

領域 $D \subset \boldsymbol{Z}^n$ は空でなく**有界**とし、 $f : D \to \boldsymbol{R}^1$ を任意の関数とする。このとき 領域の各要素に対する関数値の総和を求める問題

$$\text{sum} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{over} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \tag{1}$$

を考える。この問題を多重和の型

$$\sum\sum\cdots\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2}$$

またはより簡単に

$$\sum_{x\in D} f(x) \tag{3}$$

で表す。

この問題の典型的な一つに有限状態空間 S 上の推移確率 $p(y|x)$ をもつマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ からの統計量 $g(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ の期待値

$$\sum\sum\cdots\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S\times S\times\cdots\times S} g(x_0, x_1, \cdots, x_n)p(x_1|x_0)p(x_2|x_1)\cdots p(x_n|x_{n-1})$$

の再帰的計算がある。

なお、式 (1),(2),(3) に対応する連続型は以下の多重積分になっている：

$$\text{integrate} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{over} \quad D \subset \boldsymbol{R}^n$$

$$\int\int\cdots\int_D f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$\int_D f(x)dx.$$

ただし、 $\boldsymbol{R}^n$ はn次元ユークリッド空間である。

さて、多重和計算の基本原理は、次に示すように、条件付き最適化の基本原理【多変数関数の最適値の繰り返し計算】(Sniedovich [6, Chap. 2 Fundamentals]) と表現上全く同じである。

定理 1 (条件付き和の原理)

$$\sum_{y\in Y,}\sum_{z\in Z(y)} q(y, z) = \sum_{y\in Y}\{\sum_{z\in Z(y)} q(y, z)\}.$$

従って、多重和(2)は、領域 $D \subset \boldsymbol{Z}^n$ を1次元整数空間 $\boldsymbol{Z}^1$ 上にn回射影して得られる条件付き区間

$$D_1,\ D_2(x_1),\ \cdots,\ D_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) \subset \boldsymbol{Z}^1$$

上の繰り返し和として計算できる：

$$\sum_{x\in D} f(x) = \sum_{x_1\in D_1}\sum_{x_2\in D_2(x_1)}\cdots\sum_{x_n\in D_n(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{4}$$

この繰り返し計算は次のように再帰式に書ける。

定理 2 $f_n = f$ とし、以下

$$f_{m-1}(x_1, \cdots, x_{m-1}) = \sum_{x_m \in D_m(x_1,\cdots,x_{m-1})} f_m(x_1, \cdots, x_m) \quad 1 \leq m \leq n \tag{5}$$

を定義すると、求める和は f_0 で与えられる：

$$f_0 = \sum_{x \in D} f(x). \tag{6}$$

これが基本になる反復式である。実際、この反復式が多重和 (2) の標準的な繰り返し計算である。このことは Σ を opt に置き換えてもそのまま成り立ち、最適化と同様な再帰式（繰り返し計算）が成り立つ。

以下、$\boldsymbol{N}$ は自然数全体とし、n 個の関数 $f_m : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}^1$ $(1 \leq m \leq n)$ と定数 $k \in \boldsymbol{N}$ が与えられているとする。

3 繰り返し和

この節では、**加法型** と **乗法型**の二つの関数の多重和を考える。まず、和分作用素 $\sum$ の線形性

$$\sum_{x \in D} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \sum_{x \in D} f(x) + \beta \sum_{x \in D} g(x) \tag{7}$$

に注意しておく。ただし、α, β は定数。

3.1 加法型関数

加法型関数に対しては条件付き和の原理は次のようになる：

定理 3 $a < b$ は整数、$\varphi, \psi : \{a, a+1, \ldots, b\} \to \boldsymbol{Z}^1$ は $\varphi(y) \leq \psi(y)\ \forall y$ なる任意の関数で

$$\begin{aligned} q(y,z) &= g(y) + \beta(y) h(y,z) \\ D &= \{(y,z) \,|\, a \leq y \leq b,\ \ \varphi(y) \leq z \leq \psi(y)\,\} \end{aligned}$$

とする。このとき、次の等式が成り立つ：

$$\sum\sum_{(y,z) \in D} [g(y) + \beta(y) h(y,z)] = \sum_{y=a}^{b} [g(y)(\psi(y) - \varphi(y) + 1) + \beta(y) \sum_{z=\varphi(y)}^{\psi(y)} h(y,z)\,].$$

これは二重積分 ([3, Theorem 6]) に対応する離散型である。まず、多重和

$$\sum\sum \cdots \sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D} [\, f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)\,] \tag{8}$$

を考えよう。ここに

$$D = \{1, 2, ..., k\}^n \subset \boldsymbol{N}^n.$$

この D は最大型関数を条件式に用いて次のように表されることに注意しよう：

$$D = \{\,(x_1, x_2, ..., x_n) | \bigvee_{m=1}^{n} x_m \le k,\ x_m = 1, 2, \ldots, k, \quad 1 \le m \le n\}.$$

以下、これを**矩形型領域**という。 さて、任意の $n \ge 1$ に対して部分問題

$$\begin{aligned} v^n &= \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} \cdots \sum 1 \\ u^n &= \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} \cdots \sum [\, f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)\,] \end{aligned}$$

を定義すると、再帰式

$$v^1 = \sum_{x=1}^{k} 1 \tag{9}$$

$$v^n = \sum_{x=1}^{k} v^{n-1} \tag{10}$$

および

$$u^1 = \sum_{x=1}^{k} f_1(x)$$

$$u^n = \sum_{x=1}^{k} [u^{n-1} + f_n(x) v^{n-1}] \tag{11}$$

が成立する。式 (9),(10) は解 $v^n = k^n$ をもつから、再帰式 (11) は次になる：

$$u^n = k u^{n-1} + k^{n-1} \sum_{x=1}^{k} f_n(x).$$

これを解くと、問題 (8) の求める和の値は

$$u^n = k^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{x=1}^{k} f_m(x)$$

になる。

次に、**加法型領域**

$$G = \{\,(x_1, x_2, ..., x_n) | \sum_{m=1}^{n} x_m \le k,\ x_m = 1, 2, \ldots, k-n+1, \quad 1 \le m \le n\}$$

上の多重和

$$\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G} \sum \cdots \sum [\, f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)\,] \tag{12}$$

を考える。ただし、 $n \leq k$. この問題に対しては、任意の $1 \leq n \leq c \leq k$ について部分問題

$$\begin{aligned} v^n(c) &= \sum \cdots \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in E} 1 \\ u^n(c) &= \sum \cdots \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in E} [\, f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \,] \end{aligned}$$

を定義する。ここに

$$E = \{\, (x_1, x_2, ..., x_n) | \sum_{m=1}^{n} x_m \leq c,\ x_m = 1, 2, \ldots, c-n+1, \quad 1 \leq m \leq n \}.$$

このとき、再帰式

$$v^1(c) = \sum_{x=1}^{c} 1 \quad c \geq 1 \tag{13}$$

$$v^n(c) = \sum_{x=1}^{c-n+1} v^{n-1}(c-x) \quad c \geq n \tag{14}$$

および

$$u^1(c) = \sum_{x=1}^{c} f_1(x) \quad c \geq 1$$

$$u^n(c) = \sum_{x=1}^{c-n+1} [u^{n-1}(c-x) + f_n(x) v^{n-1}(c-x)] \quad c \geq n \tag{15}$$

が成り立つ。式 (13),(14) は §5.1 で解 $v^n(c) = {}_cC_n$ をもつことが示されるから、再帰式 (15) は次になる：

$$u^n(c) = \sum_{x=1}^{c-n+1} [u^{n-1}(c-x) + {}_{c-x}C_{n-1} f_n(x)].$$

したがって、問題 (12) の和は $u^n(k)$ で与えられる。

3.2 乗法型関数

まず、矩形型領域上 D 上での乗法型関数の多重和問題

$$\sum \sum \cdots \sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D} [\, f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \cdots \times f_n(x_n) \,] \tag{16}$$

については、加法型と同様にすると、再帰式

$$\begin{aligned} u^1 &= \sum_{x=1}^{k} f_1(x) \\ u^n &= \sum_{x=1}^{k} [u^{n-1} \times f_n(x)] \end{aligned}$$

が成立し、問題 (16) の和の値は次になる：

$$u^n = \prod_{m=1}^{n} \sum_{x=1}^{k} f_m(x).$$

次に、加法型領域上 G 上での問題

$$\sum\sum\cdots\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G} [\, f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \cdots \times f_n(x_n)\,] \tag{17}$$

の再帰式は

$$\begin{aligned} u^1(c) &= \sum_{x=1}^{c} f_1(x) \quad\quad c \geq 1 \\ u^n(c) &= \sum_{x=1}^{c-n+1} [u^{n-1}(c-x) \times f_n(x)] \quad\quad c \geq n \end{aligned}$$

になる。問題 (17) の和は $u^n(k)$ で与えられる。

4　パラメータを含む再帰式

この節では**結合型関数**の多重和の繰り返し計算には1次元実変数パラメータを導入することによって再帰式が導かれることを示す。これは不変埋没原理 ([4],[5]) の一つの応用である。

さて、空でない $R \subset \boldsymbol{R}^1$ 上の二項関係 $\circ : R \times R \to R$ は結合的とし、R は左単位元 e :

$$e \circ x = x \quad \forall x \in R$$

を含むとする。さらに、$(n+1)$ 個の関数 $f_m : \boldsymbol{Z}^1 \to R\,(1 \leq m \leq n)$, $g : R \to R$ が与えられているとする。

4.1　矩形型領域

さて、矩形型領域 D 上での結合型関数の関数の多重和問題

$$\sum\sum\cdots\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D} g(f_1(x_1) \circ f_2(x_2) \circ \cdots \circ f_n(x_n)) \tag{18}$$

を考える。任意の $n \geq 1$ と $\lambda \in R$ に対して部分問題

$$u^n(\lambda) = \sum\cdots\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in D} g(\lambda \circ f_1(x_1) \circ \cdots \circ f_n(x_n))$$

を定義すると、再帰式

$$\begin{aligned} u^1(\lambda) &= \sum_{x=1}^{k} g(\lambda \circ f_1(x)) \\ u^n(\lambda) &= \sum_{x=1}^{k} u^{n-1}(\lambda \circ f_n(x)) \quad\quad \lambda \in R \end{aligned}$$

が成り立ち、問題 (18) の求める和の値は $u^n(e)$ で与えられる。

4.2 加法型領域

加法型領域 G 上での問題

$$\sum\sum\cdots\sum_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G} g(f_1(x_1)\circ f_2(x_2)\circ\cdots\circ f_n(x_n)) \tag{19}$$

の再帰式は

$$u^1(c;\lambda)=\sum_{x=1}^{c} g(\lambda\circ f_1(x)) \quad c\geq 1,\quad \lambda\in R$$
$$u^n(c;\lambda)=\sum_{x=1}^{c-n+1} u^{n-1}(c-x;\lambda\circ f_n(x)) \quad c\geq n,\quad \lambda\in R$$

になり、問題 (19) の和は $u^n(k;e)$ になる。

5 例題

この節では、実パラメータ λ を導入して埋めこむ必要のない例と、その必要がある例をそれぞれ示して、再帰式を解くことによって多重和の値を求める。

5.1 加法型領域上の線形関数

ここでは加法型関数の不等式で表される領域上の線形関数の多重和

$$\begin{aligned} &\text{sum} \quad \sum_{m=1}^{n} a_m x_m \\ &\text{over} \quad (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad \sum_{m=1}^{n} x_m \leq k \\ &\qquad\quad (\mathrm{ii})_\mathrm{n} \quad x_m\in\{1,2,\ldots,k-n+1\} \qquad 1\leq m\leq n \end{aligned} \tag{20}$$

を考える。ただし、パラメータ $\{a_m\}$ は実数で、$n\leq k$ は正整数。このとき、任意の $1\leq n\leq c$ に対して、部分問題

$$v^n(c) = \sum\cdots\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in F} 1 \tag{21}$$
$$u^n(c) = \sum\cdots\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in F}\sum_{m=1}^{n} a_m x_m$$

を定義する。ここに

$$F=\{\,(x_1,...,x_n)|\sum_{m=1}^{n} x_m\leq c,\ x_m=1,2,\ldots,\quad 1\leq m\leq n\}.$$

このとき、再帰式

$$v^1(c)=\sum_{x=1}^{c} 1 \quad c\geq 1$$
$$v^n(c)=\sum_{x=1}^{c-n+1} v^{n-1}(c-x) \quad c\geq n \tag{22}$$

および

$$u^1(c) = \sum_{x=1}^{c} a_1 x \quad c \geq 1$$

$$u^n(c) = \sum_{x=1}^{c-n+1} [u^{n-1}(c-x) + a_n x v^{n-1}(c-x)] \quad c \geq n \tag{23}$$

は帰納的に解けて

$$v^n(c) = {}_cC_n := \frac{c!}{(c-n)!n!} \tag{24}$$

$$u^n(c) = (\sum_{m=1}^{n} a_m)\, {}_{c+1}C_{n+1} \qquad c \geq n \tag{25}$$

になる。したがって、問題 (20) の和は次になる：

$$u^n(k) = (\sum_{m=1}^{n} a_m)\, {}_{k+1}C_{n+1}$$

注 1　さて、問題：加法型不等式

$$\sum_{m=1}^{n} x_m \leq k,\ x_m = 1, 2, \ldots, k-n+1, \quad 1 \leq m \leq n \tag{26}$$

は $\boldsymbol{Z}^n$ 内にいくつの解 $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ をもつか？ ただし $n \leq k$
を考える。この問題の解は $v^n(k) = {}_kC_n$ 個あることが次のように分かる。すなわち、解集合

$$G = \{\, (x_1, ..., x_n) | \sum_{m=1}^{n} x_m \leq k,\ x_m = 1, 2, \ldots, k-n+1, \quad 1 \leq m \leq n \} \subset \boldsymbol{Z}^n$$

と集合

$$K = \{\, 1, 2, \ldots, k\, \}$$

から異なる n 個 $\{\, k_1, k_2, \ldots, k_n\}$（ただし、$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq k$）を選ぶ組合せの全体との間に一対一の対応

$$\begin{aligned} x_1 &:= k_1 \\ x_2 &:= k_2 - k_1 \\ &\cdots \\ x_n &:= k_n - k_{n-1} \end{aligned}$$

が存在するからである。

注 2 $c = k$ に対する式 (22),(24) より、次が成り立つ：

$${}_kC_n = \sum_{m=n-1}^{k-1} {}_mC_{n-1} \qquad n \leq k. \tag{27}$$

5.2 徐加法型領域上の最大型関数

徐加法型関数で定まる不等式領域上の最大型関数の多重和を考えよう（この積分版については [3, pp.37] 参照）：

$$\mathrm{P}(n;k)\ :\qquad \begin{array}{ll} \text{sum} & x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \\ \text{over} & \text{(i)}\ \ \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{x_m}{x_1 x_2 \cdots x_{m-1}} \le k \\ & \text{(ii)}\ \ x_m \in \{1, 2, \ldots\} \qquad 1 \le m \le n. \end{array} \tag{28}$$

ただし、$k\ (\ge n)$ は正整数。問題 $\mathrm{P}(n;k)$ では n と k はそれぞれ変数の個数および右辺定数を表すが、以下の再帰式導出では変化している。

さて、任意の $1 \le m \le n$ に対して部分問題

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(m;c)\ :\qquad v^m(c) &= \sum_{(x_1,\cdots,x_m)\in F}\!\!\cdots\sum 1 \qquad c \in S_m \\ \mathrm{P}(m;c,\lambda)\ :\qquad u^m(c;\lambda) &= \sum_{(x_1,\cdots,x_m)\in F}\!\!\cdots\sum \lambda \vee x_1 \vee \cdots \vee x_m \\ & \qquad\qquad c \in S_m, \quad \lambda \in \Lambda_m \end{aligned}$$

を定義する。ここに

$$F = \{\,(x_1, x_2, ..., x_m) \mid \sum_{l=1}^{m} \frac{x_l}{x_1 x_2 \cdots x_{l-1}} \le c,\ x_l = 1, 2, \ldots,\ 1 \le l \le m\}$$

$$\Lambda_n = \{1\}, \quad \Lambda_{n-1} = \{1,\, 2,\, \ldots,\, k-1\}$$

$$\Lambda_m = \{1,\, 2,\, \ldots, \mathrm{J}^{n-m-1}(k) - 1\,\} \quad 1 \le m \le n-2$$

J^l は

$$\mathrm{J}(k) = \mathrm{I}(\frac{k^2}{2}) \qquad \mathrm{I}(x)\ \text{は実数}\, x\, \text{の整数部分}$$

の l 回の合成である。

さらに、集合 $\{S_n,\ S_{n-1},\ S_{n-2}, \cdots, S_2,\ S_1\}$ を次のように後ろ向き再帰的に定義する：

$$\begin{aligned} & S_n = \{k\} \\ & S_{n-1} = \{\, x(k-x) \mid x = 1, 2, \ldots, \mathrm{I}(k/2)\,\} \\ & S_{n-2} = \{\, x(i-x) \mid i \in S_{n-1},\ x = 1, 2, \ldots, \mathrm{I}(i/2)\,\} \\ & \quad \vdots \\ & S_m = \{\, x(i-x) \mid i \in S_{m+1},\ x = 1, 2, \ldots, \mathrm{I}(i/2)\,\} \\ & \quad \vdots \\ & S_1 = \{\, x(i-x) \mid i \in S_2,\ x = 1, 2, \ldots, \mathrm{I}(i/2)\,\}. \end{aligned}$$

このとき、再帰式

$$v^1(c) = \sum_{x=1}^{c} 1 \qquad c \in S_1$$

$$v^m(c) = \sum_{x=1}^{c-1} v^{m-1}(x(c-x)) \qquad c \in S_m,\ \ 2 \le m \le n$$

および

$$u^1(c\,;\lambda) = \sum_{x=1}^{\mathrm{I}(c)}[\lambda \vee x] \qquad c \in S_1,\ \ \lambda \in \Lambda_1$$
$$u^m(c\,;\lambda) = \sum_{x=1}^{c-1} u^{m-1}(x(c-x)\,;\lambda \vee x) \quad c \in S_m,\ \ \lambda \in \Lambda_m,\ \ 2 \le m \le n$$

が成立する。問題 (28) の和は $u^n(k;1)$ で与えられる。
特に、3変数で右辺定数が5の問題

$$\mathrm{P}(3;5)\ :\qquad \begin{array}{ll} \text{sum} & x \vee y \vee z \\ \text{over} & \text{(i)}\ \ x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{xy} \le 5 \\ & \text{(ii)}\ \ x, y, z \in \{1, 2, \ldots\} \end{array} \tag{29}$$

は上述の再帰式を解いて、和の値は $u^3(5) = 406$ になる。このとき、条件 (i),(ii) を満たす点 (x, y, z) の総数は $v^3(5) = 90$ である。
なお、対応する最適化問題

$$\mathrm{R}(3;5)\ :\qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & x \vee y \vee z \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{xy} \le 5 \\ & \text{(ii)}\ \ x, y, z \in \{1, 2, \ldots\} \end{array}$$

は、λ を用いて埋め込まずに、再帰式を直接解くこと（すなわち、いわゆる動的計画法）によって、次の最適解が得られる：$(x^*, y^*, z^*) = (2, 3, 9), (3, 3, 9)$ のとき、最大値 9.

References

[1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] R.E Bellman, *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.

[3] S. Iwamoto, Iterative integral versus dynamic programming, Computers Math. Applic. **21**(1991), 23-39.

[4] S. Iwamoto, Associative dynamic programs, J. Math. Anal. Appl., to appear.

[5] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[6] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.