数理解析研究所講究録
945巻 1996年 30-34

ミニマックス関数の方向微分と非線形計画問題の感度解析

白石俊輔* (Shunsuke SHIRAISHI)

1 序

次のパラメトリックな非線形計画問題を考える。

$$(P_x) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize}_y & f(x,y) \\ \text{subject to} & g_i(x,y) \leq 0, \quad \text{for } i=1,\cdots,m \end{array}$$

ただし $f, g_1 \ldots, g_m : \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ とし、$x \in \mathbf{R}^k$ をパラメータと考える。ここでは最適値関数

$$h(x) = \inf_y \{ f(x,y) \mid g_i(x,y) \leq 0, i = 1 \ldots m \}.$$

の片側方向微分 $h'(x_0; d) = \lim_{t \to 0^+} [h(x_0 + td) - h(x_0)]/t$ を知ろうという感度解析問題を取り扱う。そこでラグランジュ関数 $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x,y)$ を導入すると、最適値関数 $h(x)$ はミニマックス関数の形に書き改められることに注目する：

$$h(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \sup_{\lambda \geq 0} L(x,y,\lambda).$$

General な形のミニマックス関数の方向微分については Correa と Seeger[3] が詳しく調べているので、彼らの結果を最適値関数に適用することによって感度解析をしようというのが我々の狙いである。ミニマックス関数は計画数学に屡々登場するマックス型関数 $S(x) = \sup_{y \in Y} f(x,y)$, を拡張した物である。実際 $L(x,y,\lambda)$ がλについてコンスタントである時がマックス型関数になる。マックス型関数の方向微分に関する結果として最も有名なのは Danskin による次の結果であろう。

定理 1 *[4] Yはコンパクト集合で $x \to f_x(x,y)$ が連続であれば $S(x)$ は方向微分可能で*

$$S'(x;d) = \max_{y \in M(x)} f_x(x,y)d \tag{1}$$

が成立する。但し、$f_x(x,y)$ は fの x に関する偏微分を表わし、解集合写像を $M(x) = \{y \in Y \mid f(x,y) = S(x)\}$ で表わす。

*富山大学経済学部, 富山市五福 3190, shira@eco.toyama-u.ac.jp

この結果は現在ではかなりのレベルにまで一般化が進んでおり、そこでは定理1に現れたYのコンパクト性は解集合写像 $x \rightrightarrows M(x)$ の半連続性 [7] に、$f_x(x, y)$ の連続性は fの方向微分の半連続性に置き換えられている。Correa と Seeger はこの定理をミニマックス関数に対して拡張した。大雑把な言い方をすれば、ミニマックス関数は

1. L の方向微分の半連続性

2. 集合値写像 $x \rightrightarrows Y(x), \Lambda(x)$ の半連続性

3. 双対性
$$\inf_{y \in \mathbf{R}^n} \sup_{\lambda \geq 0} L(x, y, \lambda) = \sup_{\lambda \geq 0} \inf_{y \in \mathbf{R}^n} L(x, y, \lambda)$$

といった要件を満足すれば方向微分可能となり、(1) と同様の公式が成り立つ。ここで $Y(x) = \{y \mid \sup_\lambda L(x, y, \lambda) = h(x)\}, \Lambda(x) = \{\lambda \mid inf_y L(x, y, \lambda) = h(x)\}$ とする。

定理 2 *[3]* $Y(x)$ と$\Lambda(x)$ の半連続性、L の方向微分の半連続性及び双対性があれば、$h(x)$ は方向微分可能で、

$$h'(x; d) = \inf_{y \in Y(x)} \sup_{\lambda \in \Lambda(x)} L'(x, y, \lambda; d) \qquad (2)$$

が成立する。但し、$L'_x(x, y, \lambda; d) = \lim_{t \to 0^+}[L(x + td, y, \lambda) - L(x, y, \lambda)]/t$ である。

この定理で一番大変なのは双対性を調べることだと考えられる。そこで以下では双対性を保証するのに、一般的なミニマックス定理 [9] を使うやり方と、関数の invex 性 [10] を仮定する場合について言及する。

2 ミニマックス定理を用いた双対性

古典的なミニマックス定理が述べることは次のことである。

定理 3 *[6, 9]* YとΛはそれぞれコンパクト凸集合とする。また関数$L : Y \times \Lambda \to \mathbf{R}$ は *convex-concave* であるとする。このとき、

$$\min_{y \in Y} \max_{\lambda \in \Lambda} L(y, \lambda) = \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{y \in Y} L(y, \lambda)$$

が成立する。

(P_x) が凸計画問題であればこの定理が直ちに適用できるように思われる。しかし YとΛにコンパクト性が必要なことからこのままではだめである。そこで Correa と Seeger がとった方法というのが L の方にコンパクト性を肩代りする条件：inf-compactness を設けることであった。この方法を詳しく調べて見ると L の

convex-concave 性というのは本質的ではなく要は各 x について定理 3が主張する双対性：

$$\min_{y\in Y}\max_{\lambda\in\Lambda} L(x,y,\lambda) = \max_{\lambda\in\Lambda}\min_{y\in Y} L(x,y,\lambda) \tag{3}$$

が任意のコンパクト凸集合 Y と Λ に対して成立することが主張できればよいことが分かる。[3, Section 3]　そしてミニマックス定理の進展 [9] のおかげで多種多様なものがこれに適用でき非凸計画問題に対しても双対性が成立することを確かめることができる。

定理 4 $f, g_1 \ldots, g_m$ は一様連続、f は *inf-compact* でありスレーター条件 $\exists \bar{y}$ *with* $g_i(x_0, \bar{y}) < 0, i = 1 \ldots m$ が成り立っているとする。さらに各 x について任意のコンパクト凸集合 $Y \subset \mathbf{R}^n$ と $\Lambda \subset \mathbf{R}^m_+$ に対して（*3*）式が成立しているとしよう。このとき x_0 に十分近い各 x について双対性：

$$\min_{y\in\mathbf{R}^n}\max_{\lambda\geq 0} L(x,y,\lambda) = \max_{\lambda\geq 0}\min_{y\in\mathbf{R}^n} L(x,y,\lambda)$$

が成立する。

3　関数の invex 性の下での双対性

ここでは摂動パラメータが RHS(right hand sided) の場合：

$$(P_x^{RHS}) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize}_y & f(y) \\ \text{subject to} & g_i(y) \leq x_i, \quad \text{for } i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

を取り扱う。まず関数の invex 性 [10] について述べよう。$F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を局所リプシツで Clarke 正則 [2] な関数とする。F が invex 関数であるとは写像 $\eta : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が存在して次の invex 不等式を満たすときをいう：

$$F(y) - F(u) \geq F'(u; \eta(y,u)), \text{ for each } y, u \in \mathbf{R}^n,$$

関数の invex 性についての最も重要な事柄は大域的最小点と停留点とが一致することにある。この性質のおかげで (P_x^{RHS}) にたいするラグランジュ双対性が凸計画問題の場合と同様に示すことができる。勿論ここでは $L(x,y,\lambda) = f(y) + \sum_{i=1}^m \lambda_i\{g_i(y) - x_i\}$ である。

定理 5 $f, g_1 \ldots, g_m$ が同一の η に対し *invex* 不等式を満たしている *invex* 関数であるとする。また f は *inf-compact* な大域的リプシツ関数でさらにスレーター条件 $\exists \bar{y}$ *with* $g_i(\bar{y}) < 0, i = 1 \ldots m$ が成り立っているとする。このとき *0* に十分近い各 x について双対性：

$$\min_{y\in\mathbf{R}^n}\max_{\lambda\geq 0} L(x,y,\lambda) = \max_{\lambda\geq 0}\min_{y\in\mathbf{R}^n} L(x,y,\lambda)$$

が成立する。

4 感度解析結果

定理 2と前 2 節から得られる感度解析結果についてまとめよう。

定理 6 定理 *4*の仮定の下でさらに

(H1) $t \in \mathbf{R}_+ \to L'_x(x_0 + td, y; d)$ は上半連続である。

(H2) $(t, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \to L'_x(x_0 + td, y; d)$ は下半連続である。

という条件を仮定すると最適値関数 h は方向微分可能であって、

$$h'(x_0; d) = \inf_{y \in Y(x_0)} \sup_{\lambda \in \Lambda(x_0)} L'_x(x_0, y, \lambda; d),$$

が成立する。

(P_x^{RHS}) に関してはそのラグランジュ関数の形から仮定 (H1) は不要になる。

定理 7 定理 *5*の仮定の下でさらに *(H2)* が成立しているとしよう。この時 h は方向微分可能であって、

$$h'(0; d) = \inf_{y \in Y(0)} \sup_{\lambda \in \Lambda(0)} L'_x(0, y, \lambda; d),$$

が成立する。

5 結び

ミニマックス関数によるアプローチにより非線形計画問題の感度解析をシンプルな形で論じることができたように思う。しかしながら非凸計画問題に適用するために若干人為的な条件を付加してしまったため定理 6,7ともに凸計画問題に対して得られている結果 [5] をカバーするに至らなかった事は残念である。この点が今後の課題である。

References

[1] Clarke F.H., *Math.O.R.*, 1(1976), pp.165-174.

[2] Clarke F.H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, (1983).

[3] Correa R. and Seeger A., *Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl.*, 9(1985), pp.13-22.

[4] Danskin J.M., The Theory of Max-Min, Springer, (1967).

[5] Hogan W.W., *Oper. Res.*, 21(1973), pp.188-209.

[6] Kakutani S., *Duke Mathematical Journal*, Vol.18, pp.457-459, 1941.

[7] Penot J.-P., in *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* 86 *Optimization theory and Algorithms*, Hiriart-Urruty J.-B., Oetly W. and Stoer J. (Eds),(1983) Dekker

[8] Shiraishi S., "Sensitivity analysis of nonlinear programming problems via minimax-functions", Working Paper No.152, Faculty of Economics, Toyama University, (1995)

[9] 高橋渉、「非線形関数解析学」近代科学社 (1988)

[10] Tanaka Y., Fukushima M. and Ibaraki T., *J.M.A.A.*, 144(1989), pp.342-355

論文 [8] の ps ファイルが http://www.toyama-u.ac.jp/˜shira/に貼り付けてあります。