

被覆面の調和次元

大同工大 瀬川重男 (Shigeo Segawa)
京都産大・理 正岡弘照 (Hiroaki Masaoka)

1. W を Heins[8]の意味の end (末端)とする: 即ち, W は零境界の開 Riemann 面の相対 compact でない部分領域で, 相対境界 $\partial W (\neq \emptyset)$ は有限個の互いに素な解析閉曲線からなり, W の理想境界成分は唯1つである. W 上の非負値調和函数で ∂W で境界値0をもつものの族を $\mathcal{P}(W)$ とする:

$$\mathcal{P}(W) = \{u \in C(\overline{W}) : \Delta u = 0, u \geq 0, u|_{\partial W} = 0\}.$$

$h \in \mathcal{P}(W) - \{0\}$ が minimal であるとは, $0 \leq u \leq h$ をみたす任意の $u \in \mathcal{P}(W)$ に対して $u = ch$ となる定数 $c \geq 0$ が存在することである. $a \in W$ に対して, $\mathcal{Q}(W; a) = \{h \in \mathcal{P}(W) : h \text{ は minimal, } h(a) = 1\}$ とおく. $\mathcal{Q}(W; a)$ の濃度 $\#\mathcal{Q}(W; a)$ を W の調和次元と呼び, $\dim \mathcal{P}(W)$ と表すことにする:

$$\dim \mathcal{P}(W) = \#\mathcal{Q}(W; a).$$

明らかに, $\dim \mathcal{P}(W)$ は a の取り方に依らない. 最も簡単な end の例は, $W = \{0 < |z| < 1\}$ ($\partial W = \{|z| = 1\}$)である. このとき, $\mathcal{P}(W) = \{c \log(1/|z|) : c \geq 0\}$, 即ち $\dim \mathcal{P}(W) = 1$ である.

W の Martin 境界のうち相対境界 ∂W に対応する部分は ∂W と同一視できる. したがって, W の Martin 境界のうち理想境界に対応する部分を $\Delta = \Delta^W$ とすると, W の Martin compact 化 W^* は $W^* = W \cup \partial W \cup \Delta$ と表される. さらに Δ の minimal 点全体を $\Delta_1 = \Delta_1^W$ とおくとき, Martin 理論に依れば

$$(1) \quad \dim \mathcal{P}(W) = \#\Delta_1$$

である ([3, CN-CR] 参照). これより, $1 \leq \dim \mathcal{P}(W) \leq \aleph$ である. $\dim \mathcal{P}(W) = n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\dim \mathcal{P}(W) = \aleph_0$ および $\dim \mathcal{P}(W) = \aleph$ のそれぞれをみたす W の例が存在する ([8, HE], [9, KR], [15, SE], [14, NK-SA], [7, CN-CR] 参照).

2. $D = \{0 < |z| < 1\}$ とする. 上で見たように, D は, $\partial D = \{|z| = 1\}$ を相対境界とみなして, 最も単純な end であり, その調和次元は1である. 以下では, D の m 葉非有界被覆面である end の調和次元について調べる. $\{0 < |z| \leq \infty\}$ の m 葉非有界被覆面 ($1 < m < \infty$)で理想境界成分が唯1つである Riemann 面を R とする. この R と R から $\{0 < |z| \leq \infty\}$ へ

の射影 π に対し、 $W = \pi^{-1}(D)$ とおくと、 W は end である。このような end W の全体を \mathcal{E}_m と表す。任意の $W \in \mathcal{E}_m$ に対して

$$(2) \quad 1 \leq \dim \mathcal{P}(W) \leq m$$

が成立する ([8, HE]).

$0 < b_{n+1} < a_n < b_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ をみたす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して

$$G = D - \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

とおく。 G の copy G_1, \dots, G_m に対し、 G_i 上の $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ の上岸と G_{i+1} 上の $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ の下岸を貼り合わせて (mod. m) 得られる D の m 葉非有界被覆面を V とすると、 $V \in \mathcal{E}_m$ である。この V の調和次元は次のように決定される ([15, SE], [12, M-SE], [11, M]).

定理 1. (i) $z = 0$ が G の非正則境界点のとき、 $\dim \mathcal{P}(V) = m$.

(ii) $z = 0$ が G の正則境界点のとき、 $\dim \mathcal{P}(V) = 1$.

これの [15],[12],[11] における証明では、 G が実軸に関して対称であることと V の被覆変換群が $\{G_1, \dots, G_m\}$ に transitive に作用していることが本質的に使われている。しかしながら、 G のこのような性質が定理 1 を成立せしめるための本質的条件ではないことは直感的に明らかであろう。本論の主目的は、この直感が正当であることを示すことである。実際、 \mathcal{E}_m に属する end に対して細位相の言葉を使った調和次元の特徴付け (定理 2) を与え、さらにそれから定理 1 を含む形の具体的な結果 (定理 3, 4 および 5) を導く。

3. 定理 2 を述べるための準備から入る。開 Riemann 面 F , F 上の正值優調和函数 s と F の部分集合 E に対して、 balayage ${}^F\hat{R}_s^E$ は

$${}^F\hat{R}_s^E(z) = \liminf_{\zeta \rightarrow z} \inf \{u(\zeta) : u \text{ は } F \text{ で正值優調和かつ } E \text{ で } u \geq s\}$$

で定義される (balayage の基本性質については、 [1, BL-HA], [2, BR], [5, HL] 参照)。被覆面においては、次の事実は基本的ではあるが有用である ([12, M-SE] 参照)。

補題 1. \tilde{F} を開 Riemann 面 F の非有界被覆面、 π を \tilde{F} から F への射影とする。このとき、 F の部分集合 E と F 上の正值優調和関数 s に対して、

$$(3) \quad {}^{\tilde{F}}\hat{R}_{s \circ \pi}^{\pi^{-1}(E)} = {}^F\hat{R}_s^E \circ \pi.$$

次に、 thinness と minimal thinness の定義を述べる ([2, BR] 参照)。

定義 1. \mathbb{C} の部分集合 E が $a \in \mathbb{C}$ で thin であるとは ${}^F\hat{R}_{g_a}^E \neq g_a$ が成立することとする、ここで、 $F = \{|z - a| < 1\}$, $g_a(z) = \log(1/|z - a|)$ である。さらに、 $N(\subset \mathbb{C})$ が a の細近傍であるとは $a \in N$ かつ $\mathbb{C} - N$ が a で thin であることとする。

R を正境界の Riemann 面とし、 R の Martin 境界の minimal 点全体を $\Delta_1(R)$ と表す。 R の

Martin compact 化 R^* の各点 p に対して, p に極をもつ R 上の Martin 核を k_p とする.

定義 2. R の部分集合 E が $p \in (\Delta_1(R))$ で **minimally thin** であるとは ${}^R\hat{R}_{k_p}^E \neq k_p$ が成立することとする. さらに, R の部分集合 N に対して, $N \cup \{p\}$ が p の **minimal 細近傍** であるとは $R - N$ が p で **minimally thin** であることとする.

次の補題は thinness または minimal thinness について調べる際に重要な役割を果たす ([6, NA] 参照).

補題 2. 定義 1 (または 2) において, 閉集合 E が a (または p) で **thin** (または **minimally thin**) ならば, $F - E$ (または $R - E$) の唯 1 つの component において ${}^F\hat{R}_{g_a}^E < g_a$ (または ${}^R\hat{R}_{k_p}^E < k_p$) が成立する.

各 $W \in \mathcal{E}_m$ に対し, W から D への射影を π_W で表す. $M \cup \{0\}$ が $z = 0$ の細近傍となるような D の領域 M の族を \mathcal{M} とする. $W \in \mathcal{E}_m$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し, $\pi_W^{-1}(M)$ の component の個数を $n_W(M)$ で表す. このとき, W の調和次元 $\dim \mathcal{P}(W)$ は次のように決定される:

定理 2. 任意の $W \in \mathcal{E}_m$ に対して, $\dim \mathcal{P}(W) = \max_{M \in \mathcal{M}} n_W(M)$.

次の系 1 及び 2 は, 定理 2 と (2) から容易に従う.

系 1. $W \in \mathcal{E}_m$ とする. $n_W(M) = m$ となる $M \in \mathcal{M}$ が存在すれば $\dim \mathcal{P}(W) = m$ である.

系 2. $W \in \mathcal{E}_m$ とする. すべての $M \in \mathcal{M}$ に対して $n_W(M) = 1$ ならば $\dim \mathcal{P}(W) = 1$ である.

4. 定理 2 の証明のために, 次の補題 3, 4 を用意する. 1 で述べたように $W \in \mathcal{E}_m$ の Martin compact 化は $W \cup \partial W \cup \Delta_1^W$ と表される. 簡単のために, $\pi = \pi_W$, $g(z) = \log \frac{1}{|z|}$ とおく.

補題 3. p_1 を Δ_1^W の 1 点, N を W の領域で $N \cup \{p_1\}$ が p_1 の **minimal 細近傍** となるものとする. このとき, $\pi(N) \in \mathcal{M}$ となる.

証明. (1) と (2) より, $\Delta_1^W = \{p_1, \dots, p_n\}$ ($n \leq m$) とおける. p_i に極をもつ W 上の Martin 核を k_i とおく. 補題 2 より, N で

$$(4) \quad {}^W\hat{R}_{k_1}^{W-N} < k_1$$

が成立する. 各 k_i に対して, $g \circ \pi \geq ck_i$ をみたす定数 $c > 0$ が存在することは容易にわかる. これと Martin 積分表現定理から,

$$(5) \quad g \circ \pi = \sum_{i=1}^n c_i k_i.$$

をみたす正数列 c_1, \dots, c_n の存在がわかる. これと (3) と balayage の基本性質から

$${}^D\hat{R}_g^{D-\pi(N)} \circ \pi = {}^W\hat{R}_{g \circ \pi}^{W-\pi^{-1}(\pi(N))} \leq {}^W\hat{R}_{g \circ \pi}^{W-N} = \sum_{i=1}^n c_i {}^W\hat{R}_{k_i}^{W-N} \leq \sum_{i=1}^n c_i k_i = g \circ \pi.$$

したがって, (4) より, N で

$$D\hat{R}_g^{D-\pi(N)} \circ \pi < g \circ \pi,$$

即ち, $\pi(N)$ で $D\hat{R}_g^{D-\pi(N)} < g$ となる. D 上の balayage と $\{|z| < 1\}$ 上の balayage が等しいことに注意すれば, これは $\pi(N) \cup \{0\}$ が $z = 0$ の細近傍であること, 即ち $\pi(N) \in \mathcal{M}$ を意味する. \square

補題 4. $M \in \mathcal{M}$ とする. このとき, $\pi^{-1}(M)$ の任意の連結成分 N に対して, 点 $p \in \Delta_1^W$ で $N \cup \{p\}$ が p の minimal 細近傍となるものがある.

証明. 補題 3 の証明と同様に, $\Delta_1^W = \{p_1, \dots, p_n\}$ および (5) をみたす正数列 c_1, \dots, c_n が存在するとしてよい. 補題 2 より, M で $\hat{R}_g^{D-M} < g$ となる. したがって, (3), (5) 等により $\pi^{-1}(M)$ で

$$\sum_{i=1}^n c_i {}^W\hat{R}_{k_i}^{W-\pi^{-1}(M)} = {}^W\hat{R}_{g \circ \pi}^{W-\pi^{-1}(M)} = D\hat{R}_g^{D-M} \circ \pi < g \circ \pi = \sum_{i=1}^n c_i k_i$$

となる. それ故, N で ${}^W\hat{R}_{k_\nu}^{W-\pi^{-1}(M)} \neq k_\nu$ となるような $\nu \in \{1, \dots, n\}$ が存在する. 一方, balayage の基本性質より, N で ${}^W\hat{R}_{k_\nu}^{W-\pi^{-1}(M)} = {}^W\hat{R}_{k_\nu}^{W-N}$ となることがわかる. 結局, N で ${}^W\hat{R}_{k_\nu}^{W-N} \neq k_\nu$, 即ち, $N \cup \{p_\nu\}$ は p_ν の minimal 細近傍となる. \square

定理 2 の証明. まず, $\dim \mathcal{P}(W) = n$ とする. (1) より, $\Delta_1^W = \{p_1, \dots, p_n\}$ とおける. 各 p_i に対し $N_i \cup \{p_i\}$ が p_i の minimal 細近傍となるような互いに素な W の領域列 N_1, \dots, N_n がとれる. 補題 3 より各 N_i に対して $\pi(N_i) \in \mathcal{M}$ であり, したがって $\bigcap_{i=1}^n \pi(N_i) \cup \{0\}$ は 0 の細近傍となる. さらに $\pi(\bigcup_{i=1}^n \partial N_i)$ は 0 で thin だから, 補題 2 より $\bigcap_{i=1}^n \pi(N_i) - \pi(\bigcup_{i=1}^n \partial N_i)$ の component M で $M \in \mathcal{M}$ となるものが存在する. このとき, 各 i に対して $O_i \subset N_i$ となるような $\pi^{-1}(M)$ の component O_i がとれる. 明らかに O_1, \dots, O_n は互いに素であるから, $n_W(M) \geq n$, したがって $\max_{M \in \mathcal{M}} n_W(M) \geq \dim \mathcal{P}(W)$ となる.

次に, $M \in \mathcal{M}$ を任意にとり $m = n_W(M)$ および $\pi^{-1}(M)$ の連結成分全体を $\{N_1, \dots, N_m\}$ とおく. 補題 4 より, 各 N_i に対して $N_i \cup \{p_i\}$ が p_i の minimal 細近傍となるような点 $p_i \in \Delta_1^W$ が存在する. N_1, \dots, N_m は互いに素であるから, p_1, \dots, p_m は互いに相異なり $\#\Delta_1^W \geq m$, したがって (1) より $\dim \mathcal{P}(W) \geq m$ となる. M は任意であったから $\dim \mathcal{P}(W) \geq \max_{M \in \mathcal{M}} n_W(M)$ を得る. \square

5. ここでは, \mathcal{E}_m に属する end で定理 1 の V よりも一般的な具体例について, 定理 2 (または系 1 および 2) を使ってその調和次元を調べる.

$\{I_n\}_{1 \leq n < \infty}$ および $\{J_n\}_{1 \leq n < \nu}$ ($1 \leq \nu \leq \infty$) を D 内の互いに交わらない閉線分の列で $z = 0$ のみに集積するものとし, さらに

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad J = \bigcup_{n=1}^{\nu} J_n, \quad S = D - I - J$$

とおく. そこで, 次の 2 条件をみたす $W \in \mathcal{E}_m$ 全体を $\mathcal{F}_m(I, J)$ で表す:

(i) W の任意の分岐点は I_n または J_n の端点の上であり, 各 I_n の端点の上には分岐度 $m-1$ の

W の分岐点がある,

(ii) $W - \pi_W^{-1}(I \cup J) = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ (disjoint union, S_1, \dots, S_m は S のcopy).

以下では, $\mathcal{F}_m(I, J)$ に属する endの調和次元を調べる. 手始めに次を示す:

定理 3. $W \in \mathcal{F}_m(I, J)$ とする. $I \cup J$ が $z = 0$ でthinならば, $\dim \mathcal{P}(W) = m$ である.

これは最初に [12, M-SE]において証明されたものであるが, こゝでは系1を使った極めて短い別証を与える. また, 定理3から定理1の(i)が直ちに導かれることを注意する.

定理3の証明. 仮定より $S = D - I - J$ は \mathcal{M} に属し, 条件(ii)より $n_W(S) = m$ となる. したがって, 系1より $\dim \mathcal{P}(W) = m$ である. \square

半直線 $\{\arg z = \alpha\}$ を l_α とおく. また, thinでないことを**thick**と呼ぶ.

定理 4. $W \in \mathcal{F}_m(I, J)$, $I \subset l_\alpha$ とする. このとき, I が $z = 0$ でthickでありかつ J が $z = 0$ でthinならば, $\dim \mathcal{P}(W) = 1$ である.

上で $J = \emptyset$, $\alpha = 0$ として, 定理1の(ii)が得られることを注意する. 定理4および5の証明には次の事実が使われる(例えば, [5, HL] 参照).

補題5. D の閉部分集合 E に対して $E' = \{|z| : z \in E\}$ とおく. このとき, E が $z = 0$ でthinならば E' も $z = 0$ でthinである.

定理4の証明. $\alpha = 0$ として一般性を失わない. 系2より, 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $n_W(M) = 1$, 即ち $\pi_W^{-1}(M)$ が連結, となることを示せばよい. $E = (D - M) \cup J$ とおくと, $D - M$ も J も $z = 0$ でthinであるから E も $z = 0$ でthinである. したがって, 補題5より E' は $z = 0$ でthinである. これと仮定から $I - E'$ は $z = 0$ でthickである. 故に, $r \in I - E'$ となる r が存在する. $C = \{|z| = r\}$ とおくと, これは $C \subset M$, $C \cap J = \emptyset$ かつ $C \cap I$ が唯1点のみからなることを意味する. $C \subset M$ より $\pi_W^{-1}(C) \subset \pi_W^{-1}(M)$ となる. さらに, $C \cap J = \emptyset$, $C \cap I$ が唯1点のみからなることおよび条件(i)(I_n の端点の上には $m - 1$ の分岐点がある)を考え合わせれば, $\pi_W^{-1}(C)$ が連結であることが証明される(cf. e.g. [13, M-SE]). $\pi_W^{-1}(C) \subset \pi_W^{-1}(M)$ および M と $\pi_W^{-1}(C)$ の連結性から $\pi_W^{-1}(M)$ の連結性が容易に導かれる. 実際, M の連結性から, $\pi_W^{-1}(M)$ の任意の2点 a, b のそれぞれと $\pi_W^{-1}(C)$ を結ぶ M 内の連続曲線が存在する. 故に, $\pi_W^{-1}(C)$ の連結性から a と b を結ぶ M 内の連続曲線の存在がわかる. \square

定理 5. $W \in \mathcal{F}_m(I, J)$, $I \subset l_\alpha$, さらに $J \subset D - \{|\arg z - \alpha| < \varepsilon\}$ をみたす正数 ε が存在するとする. このとき, I と $l_\alpha - I$ が共に $z = 0$ でthickならば, $\dim \mathcal{P}(W) = 1$ である.

証明の前に, 上の“ $l_\alpha - I$ が $z = 0$ でthick”という仮定を落とせないことを注意しておく. 定理5の証明には次のDeny[4, D]の結果が必要である.

補題6. U を $z = 0$ の細近傍とする. このとき, $\{|z| = 1\}$ のpolar部分集合 Z で次の条件をみたすものがある: $l_\theta \cap Z = \emptyset$ をみたす任意の l_θ に対して, $l_\theta \cap \{|z| < \rho\} \subset U$ となるような正数 $\rho = \rho_\theta$ が存在する.

定理5の証明. $\alpha = 0$ として一般性を失わない. 前の定理の証明と同様に, 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $\pi_W^{-1}(M)$ が連結であることを示せばよい. 補題6より, $l_\beta \cap \{|z| < \rho\} \subset M$, $l_\gamma \cap \{|z| < \rho\} \subset M$ かつ $-\varepsilon < \beta < 0 < \gamma < \varepsilon$ をみたす $\rho (> 0)$, β, γ が存在する. 補題5より, $\{|z| : z \in D - M\}$ は $z = 0$ で thin である. これと仮定から, $0 < t < s < \rho$, $s \in I$, $t \in l_0 - I$ かつ $\{|z| = s\} \cup \{|z| = t\} \subset M$ をみたす s, t がとれる.

$$C = \{se^{i\theta} : \beta < \theta < \gamma\} \cup \{re^{i\beta} : t \leq r \leq s\} \cup \{te^{i\theta} : \beta < \theta < \gamma\} \cup \{re^{i\gamma} : t \leq r \leq s\}$$

とおくと, C は M 内の閉曲線であるから $\pi_W^{-1}(C) \subset \pi_W^{-1}(M)$ となる. また, β, γ, s, t の取り方と条件 (i) から, $\pi_W^{-1}(C)$ が連結であることを証明できる. $\pi_W^{-1}(C) \subset \pi_W^{-1}(M)$ および M と $\pi_W^{-1}(C)$ の連結性から $\pi_W^{-1}(M)$ の連結性が結論されるのは, 定理4の証明と同様である. \square

6. 2でみたように, 任意の $W \in \mathcal{E}_m$ に対して $1 \leq \dim \mathcal{P}(W) \leq m$ である. また, 定理1より $\dim \mathcal{P}(W) = 1$ または m となる $W \in \mathcal{E}_m$ が存在する. 最後に, 定理2の今1つの応用として, $1 < n < m$ をみたす任意の自然数 n に対して, $\dim \mathcal{P}(W_n) = n$ となる $\text{end } W_n \in \mathcal{E}_m$ の具体例を与える.

便宜上, $\mathcal{E}_1 = \{D\}$ とおく. 定理1と $\dim \mathcal{P}(D) = 1$ より, $\dim \mathcal{P}(V_1) = n - 1$ となる $\text{end } V_1 \in \mathcal{E}_{n-1}$ および $\dim \mathcal{P}(V_2) = 1$ となる $\text{end } V_2 \in \mathcal{E}_{m-n+1}$ が存在する. D 内の閉線分の列 $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ で $I = \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ が $z = 0$ で thin でありかつ $\pi_{V_1}^{-1}(I)$ (または $\pi_{V_2}^{-1}(I)$) の上には V_1 (または V_2) の分岐点が無いものとする. さらに, V_1 (または V_2) 上の閉線分 I_{1j} (または I_{2j}) で $\pi_{V_1}(I_{1j}) = I_j$ (または $\pi_{V_2}(I_{2j}) = I_j$) となるものを取り, V_1 と V_2 を, $\bigcup_{j=1}^\infty I_{1j}$ と $\bigcup_{j=1}^\infty I_{2j}$ において交差状に貼り合わせて得られる D の被覆面を W_n とすると, $W_n \in \mathcal{E}_m$ は明らかである. $\dim \mathcal{P}(W_n) = n$ を示す. 定理2より $n_{V_1}(M) = n - 1$ となる $M \in \mathcal{M}$ が存在する. I は $z = 0$ で thin だから, $M - I$ の連結成分 M' で $M' \in \mathcal{M}$ となるものが存在する. $n_{V_1}(M') = n - 1$ かつ $n_{V_2}(M') = 1$ であることより, $n_{W_n}(M') = n$ となることがわかる. 故に, 定理2より $\dim \mathcal{P}(W_n) \geq n$ である. また, 定理2より任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $n_{V_1}(M) \leq n - 1$ かつ $n_{V_2}(M) = 1$ であり, これより $n_{W_n}(M) \leq n$ がわかる. したがって, 定理2より $\dim \mathcal{P}(W_n) \leq n$ となる.

References

[*] Potential 論または理想境界に関するもの

[1, BL-HA] J. BLIEDTNER AND W. HANSEN, *Potential Theory*, Springer, 1986.

[2, BR] M. BRELOT, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. 175(1971), Springer.

[3, CN-CR] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA, *Ideale Ränder der Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.

- [4,D] J. DENY, *Un théorème sur les ensembles effilés*, Ann. Univ. de Grenoble, Sect. sci. Math. Phys., **23**(1948), 139-142.
- [5,HL] L. HELMS, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.
- [6,NA] L. NAÏM, *Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183-281.
- [**] 調和次元に関するもの
- [7,CN-CR] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA, *Über einige Probleme von M. Heins*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **4**(1959), 277-281.
- [8,HE] M. HEINS, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.
- [9,KR] Z. KURAMOCHI, *An example of a null-boundary Riemann surface*, Osaka Math. J., **6**(1954), 83-91.
- [10,KS] Y. KUSUNOKI, *On Riemann's period relations on open Riemann surfaces*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math., **21**(1956), 1-22.
- [11,M] H. MASAOKA, *Harmonic dimension of covering surfaces II*, Kodai Math. J., **18**(1995), 487-493.
- [12,M-SE] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.
- [13,M-SE2] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, preprint.
- [14,NK-SA] M. NAKAI AND L. SARIO, *Harmonic and relative harmonic dimensions*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math., **10**(1985), 419-432.
- [15,SE] S. SEGAWA, *A duality relation for harmonic dimensions and its applications*, Kodai Math. J., **4**(1981), 508-514.
- [16,SE] S. SEGAWA, *Harmonic dimension and extremal length*, Kodai Math. J., **17**(1994), 256-261.
- [17,SH] H. SHIGA, *On harmonic dimensions and bilinear relations on open Riemann surfaces*, J. Math. Kyoto Univ., **21**(1981), 861-879.
- [***] end 上での $\Delta u = Pu$ または楕円型微分方程式の正值解に関するもの
- [18,HY] K. HAYASHI, *Les solutions positives de l'équation $\Delta u = Pu$ sur une surface de Riemann*, Kōdai Math. Sem. Rep., **13**(1961), 20-24.
- [19,KA] M. KAWAMURA, *Picard principle for finite densities on some end*, Nagoya Math. J., **67**(1977), 35-40.
- [20,KA-SE] M. KAWAMURA AND S. SEGAWA, *P-Harmonic dimensions on ends*, Nagoya Math. J., **132**(1993), 131-139.
- [21,NK] M. NAKAI, *Picard principle and Riemann theorem*, Tôhoku Math. J., **28**(1976), 277-292.