

代理制約法の非凸計画問題への適用

岩崎 彰典・白髪 利晴[†]・太田垣 博一^{††}
仲川 勇二^{†††}・成久 洋之^{††††}

岡山理科大学情報処理センター

[†]岡山理科大学大学院工学研究科電子工学専攻

^{††}岡山理科大学工学部電子工学科

^{†††}関西大学総合情報学部

^{††††}岡山理科大学工学部情報工学科

1 まえがき

代理制約 (surrogate constraints) という考え方は, Glover[1]により, 初めて数理解析分野に取り入れられた. 代理制約法は, 代理乗数 (surrogate multiplier) を用いて与えられた問題 (原問題) を代理問題 (surrogate problem) と呼ぶ 1 次元問題に書き直す. この代理問題の厳密解は原問題の目的関数の上限値を与える. 代理双対問題 (surrogate dual problem) は, この上限値を最小にするような代理乗数の最適化問題として定式化される. Luenberger [2] は, 原問題が準凸な非線形計画問題であれば, 代理乗数を最適化すれば, 代理双対問題の解は原問題の最適解と一致することを示した.

我々は, 代理制約法を組合せ最適化問題である多次元非線形ナップザック問題へ適用することを試みる. 代理制約法を組合せ最適化問題へ適用すると多くの場合代理ギャップが存在する. このとき代理双対問題の解は実行可能解とならない. そこで, 我々は代理双対問題の解が実行可能解とならない場合, 最適化された代理乗数をもつ代理問題の実行可能領域を実行可能解が見つかるまで順次縮小する方法により, 実行可能な近似解を得るヒューリスティック解法を考案した [7][8]. 本方法により, 品質の良い上限値と, 品質の良い下限値を与える近似解を得ることができる.

1 制約の非線形計画問題は, 変数の定義域を離散化し非線形ナップザック問題へ変換することにより, 非線形計画問題の目的関数が非凸で微分不可能であっても, 非線形ナップザック問題を厳密に解くことにより離散化に伴う誤差内で大域的最適解を求めることができることが報告されている [6]. 複数の制約をもつ非線形計画問題を離散化して変換された多次元非線形ナップザック問題を厳密に解くことはかなり難しいが, その代理双対問題の解, もしくはヒューリスティックに求めた実行可能な近似解のいずれかは, 原問題の大域的最適解の近傍に存在すると考えられる. いずれかの解の近傍に探索領域を縮小すれば, 解の精度を上げることが可能である.

本手法により, 原問題が非凸な非線形計画問題でも, 大域的最適解の近傍を探索できることを, 計算機実験によって確かめる.

2 非線形計画問題とその代理双対問題

変数分離可能な非線形計画問題 [NLP] は次のように定式化される.

[NLP]

$$\text{maximize } f(x) = \sum_{n \in N} f_n(x_n), \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_m(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} g_{mn}(x_n) \leq b_m \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad (2)$$

$$x_n \in \mathcal{A}_n, \quad (3)$$

ここで, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots, N\}$ は変数 x の添字集合, $\mathcal{A}_n \subset \mathbf{R}$, m は制約式の番号, b_m は各制約式に対する制約許容量である.

問題 [NLP] に対する代理双対問題 [SD] は次式で定式化される.

$$\text{minimize } \text{opt}[S(u)], \quad (4)$$

$$u \in U, \quad (5)$$

但し, $\text{opt}[P']$ は問題 $[P']$ の最適値,

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{M-1})^T \in \mathbf{R}^{M-1}, \quad (6)$$

$$U = \{u \in \mathbf{R}^{M-1} : \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 1, u \geq 0\}, \quad (7)$$

とする. ここで導入された u は代理乗数と呼ばれ, また $[S(u)]$ は代理問題と呼ばれて次式で与えられる.

$[S(u)]$

$$\text{maximize } f(x), \quad (8)$$

$$\text{subject to } \varphi(u, x) \leq \beta(u), \quad (9)$$

$$x \in \mathcal{A}, \quad (10)$$

但し,

$$\varphi(u, x) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m \{g_m(x) - g_M(x)\} + g_M(x), \quad (11)$$

$$\beta(u) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m (b_m - b_M) + b_M, \quad (12)$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_N, \quad (13)$$

とする.

Luenberger [2] は, 問題 [NLP] が準凸問題であれば, u を最適化することにより, 代理双対問題の最適解が問題 [NLP] の最適解に一致することを示した. 問題 [K] が準凸問題でなく代理双対問題の解が問題 [NLP] の解に一致しないとき, 代理ギャップが存在するという. ここで, 集合 \mathcal{A}_n を $\mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}, \dots, a_{nK_n}\}$ のように離散化された問題は, 多次元非線形ナップザック問題 [K] と呼ばれ, 複数制約を持つ多重選択ナップザック問題と等価な問題となる.

3 代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用

多次元非線形ナップザック問題 [K] のような離散最適化問題に代理制約法を適用した場合、代理ギャップが存在して代理双対問題 [SD] の解が問題 [K] の実行可能解となるとは限らない。しかし、問題 [K] の実行可能解の集合を \mathcal{X}^K 、代理問題 [S(u)] の実行可能解の集合を $\mathcal{X}^S(u)$ とすれば、

$$\mathcal{X}^K \subseteq \mathcal{X}^S(u) \quad (14)$$

が成立するので、代理問題 [S(u)] の厳密解 $x^S \in \mathcal{X}^S(u)$ は問題 [K] の上限値 $f(x^S)$ を与える。我々は、モジュラアプローチ (MA) [4, 5] によって代理問題を厳密に解き、COP (Cutting-off Polyhedron) アルゴリズム [3] によってその解が与える上限値を最少にするように u を最適化する。問題規模が小さい場合にこの手法に適用すれば、かなりの頻度で上限値と最適値が一致することが示されている [7]。しかし、その解は実行可能であるとは限らないので、以下の方法で代理問題の実行可能領域を縮小し、実行可能解を探索する。

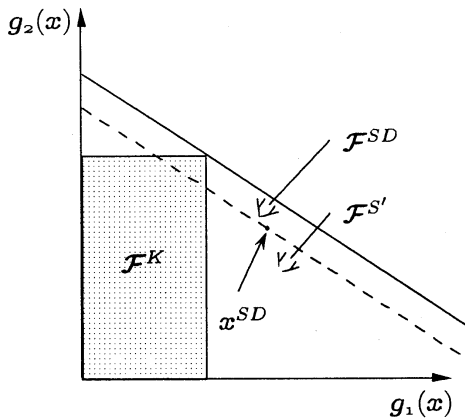


図1 問題 [K] の実行可能領域 \mathcal{F}^K
代理問題 [S(u^{SD})] の実行可能領域 \mathcal{F}^{SD}
及び縮小された代理問題の実行可能領域 $\mathcal{F}^{S'}$

2 制約の場合、図1に示すように、原問題 [K] の実行可能領域を \mathcal{F}^K 、最適な u を u^{SD} 、 u^{SD} から作成される代理問題 [S(u^{SD})] の実行可能領域を \mathcal{F}^{SD} 、その厳密解を x^{SD} とする。もし、 x^{SD} が原問題で実行不可能ならば次式が成立する。

$$x^{SD} \notin \mathcal{F}^K \text{ and } x^{SD} \in \mathcal{F}^{SD} \quad (15)$$

そこで、

$$\beta' = \sum_{m=1}^{M-1} u_m^{SD} \left\{ \sum_{n \in \mathcal{N}} g_{nm}(x_n^{SD}) - \sum_{n \in \mathcal{N}} g_{nM}(x_n^{SD}) \right\} + \sum_{n \in \mathcal{N}} g_{nM}(x_n^{SD}), \quad (16)$$

とすれば、 $\beta' \leq \beta(u^{SD})$ となるので、縮小された実行可能領域をもつ代理問題 [S'(u^{SD})] を生成することができる。

[S'(u^{SD})]

$$\text{maximize } f(x) \quad (17)$$

$$\varphi(u^{SD}, x) < \beta', \quad x \in \mathcal{A}. \quad (18)$$

(17)式の厳密解を x' とすれば, (18)式は制約式に等号を含んでいないので $x' \neq x^{SD}$ が必ず成立し, x' の与える目的関数値は x^{SD} の与える目的関数値に等しいか小さくなる. そこで, (16)式の x^{SD} を x' で置き直して実行可能領域を順次縮小する操作を, 実行可能解が得られるまで繰り返すことにより実行可能な近似解を得ることができる. この手法は, x' と縮小された代理問題の実行可能領域の境界との間に問題の離散性によるギャップが存在し, このギャップを刻み幅として実行可能領域を縮小していくため, かなり高速に良い近似解 (および近似解の与える下限値) を得ることが期待できる. 我々は, 計算機実験によって代理双対問題を解いて得られる上限値と近似解の与える下限値との差を評価し, 本手法によって品質の良い近似解が得られることを報告している [8].

4 離散化された非凸非線形計画問題への適用

準凸な非線形計画問題を離散化して変換された多次元非線形ナップザック問題は, その代理双対問題の解が実行可能となり, 離散幅の範囲内で非線形計画問題の大域的最適解に一致する.

非凸な非線形計画問題を離散化して変換された多次元非線形ナップザック問題に代理制約法を適用した場合, 一般に代理ギャップが存在し, 代理双対問題の解は実行可能とならないことが多い. しかしながら, 本ヒューリスティック解法を行うことにより実行可能な近似解が得られる. 多くの場合, 代理双対問題を解いて得られた解とヒューリスティック解のいずれかは非線形計画問題の大域的最適解の近傍に存在する. 離散化の幅以内で鋭いピークを持つ大域的最適解が本ヒューリスティック解法で探索されない領域に存在して, 実行可能領域内に局所的な目的関数のピークを持つ場合は原問題の大域的最適解を得ないケースが考えられるが, そのようなケースは実際には極めてまれであると思われる. 必要に応じ代理双対問題を解いて得られた解とヒューリスティック解の近傍に探索領域を縮小すれば, 非線形計画問題の大域的最適解の精度を上げることができる.

5 計算機実験

はじめに, 準凸な非線形計画問題の例として Rosen-Suzuki の問題を離散化し, 代理制約法によって解いた. この場合, 問題が準凸であるので代理双対問題の解は実行可能となり, 離散化の幅の範囲で原問題の最適解に一致することを確認した.

非凸な非線形計画問題として次の問題を考える.

$$\text{maximize} \quad f(x) = 2 \sin^2 x_1 + x_2 \sin^2 x_2, \quad (19)$$

$$\text{subject to} \quad g_m(x) = \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} \leq 1, \quad (20)$$

$$0 \leq x_n \leq 10. \quad (21)$$

問題の定義域を 100 分割, すなわち離散化の幅を 0.1 とした. 制約式 (20) において, a, b を変えて実行可能領域を変化させて次の 3 つ場合について実験を行った.

- A) 代理ギャップが存在しない場合
- B) 最適解が実行可能領域の内側にある場合

C) 最適解が実行可能領域の境界上にある場合

A) の場合, Rosen-Suzuki の問題と同様に代理双対問題の解が原問題の大域的最適解の近傍に存在する. B) C) の場合について解いた結果をそれぞれ図 2, 図 3 に示す. ここで, 色の濃さは図中に示す目的関数値を表し, x^{SD} , x^* はそれぞれ代理双対問題の解, ヒューリスティックな解を表す. また, B), C) どちらのケースになっているかは制約許容量をどのくらい使い果たしているかで判断することができる. C) の場合について, x^* の近傍に変数の定義域を縮小し, 同様に 100 分割して解いた結果を図 4 に示す. この場合, 代理ギャップが存在せず, 代理双対問題の解が実行可能な精度の良い解になっている.

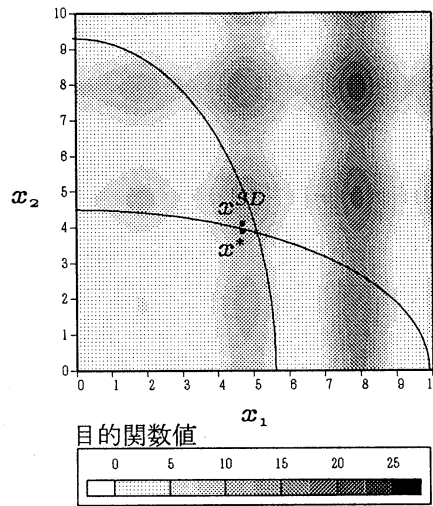
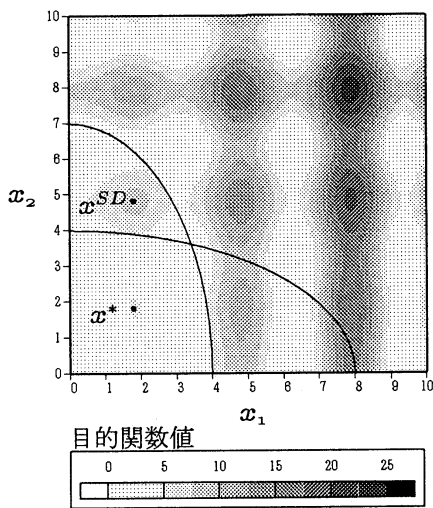


図 2 最適解が実行可能領域の内部にある場合

図 3 最適解が実行可能領域の境界にある場合

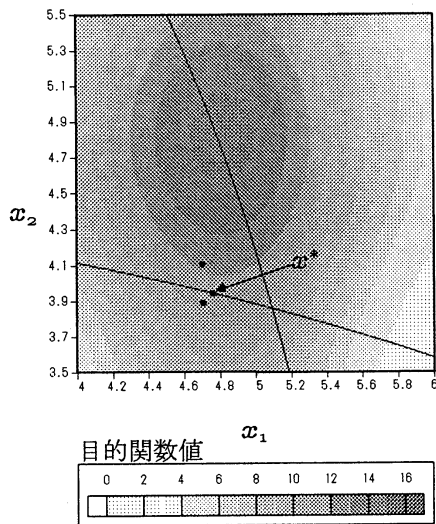


図 4 図 3 の変数定義域を x^* の近傍に縮小した場合

6 むすび

非線形計画問題を離散化して変換される非線形ナップザック問題と、通常非線形ナップザック問題とを比較すると、前者では「解の近傍」という概念が存在し大域的最適解の近傍に変数の定義域を縮小できるが、後者では解の近傍という概念が存在しないところが大きな違いである。

非線形計画問題を離散化し、離散最適化問題として解けば原問題の凸性や微分可能性の仮定は必要ないので、本手法は従来困難であった非凸計画問題の大域的最適解の近傍の探索に有効であると考えられる。

参考文献

- [1] F. Glover : “Surrogate constraints”, Oper. Res. **16**, pp.741-749 (1968)
- [2] D. G. Luenberger : “Quasi-convex programming”, SIAM J. of Applied Mathematics, **16**, No.5, pp.1090-1095 (1968).
- [3] 仲川勇二, 疋田光伯, 鎌田弘 : “代理双対問題を解くためのアルゴリズム”, 信学論(A) **J67-A**, No.1, pp.53-59 (1984).
- [4] 仲川勇二 : “離散最適化問題のための新解法”, 信学論(A) **J73-A**, No.3, pp.550-556 (1990).
- [5] 仲川勇二, 疋田光伯, 岩崎彰典 : “多重選択ナップザック問題の高速厳密解法”, 信学論(A) **J75-A**, No.11, pp.1752-1754 (1992).
- [6] 疋田光伯, 岩崎彰典, 仲川勇二 : “モジュラ法の非線形計画問題への適用”, 信学論(A) **J76-A**, No.1, pp.64-67 (1993).
- [7] 岩崎彰典, 太田垣博一, 仲川勇二, 宮下文彬, 成久洋之 : “代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用”, 信学論(A) **J78-A**, No.8, pp.1065-1068 (1995).
- [8] 岩崎彰典, 太田垣博一, 白髪利晴, 仲川勇二, 成久洋之 : “多次元非線形ナップザック問題のヒューリスティック解法”, 日本経営工学会 平成7年度秋季研究大会予稿集, pp.204-205 (1995).