数理解析研究所講究録
948巻 1996年 1-10

Cuntz algebra の index が有限な subfactor の構成について

京大数理研　泉　正己 (Masaki Izumi)

§1. Introduction

M を properly infinite factor、N を M の subfactor で、minimum index $[M:N]_0 = 4\cos^2\frac{\pi}{5}$ とする。このとき、$M \supset N$ の principal graph は A_4 であり、次のことが知られている。[I]

<u>Fact</u>　$\rho \in End(M)$ ($End(M)$ は M の endomorphism 全体) が存在して次を満たす。

(i) $\rho(M) = N$

(ii) $[\rho^2] = [id] \oplus [\rho]$

ただし (ii) の意味は、M の isometries S_1, S_2 で次を満たすものが存在するということである。

$$S_1S_1^* + S_2S_2^* = 1,\ S_i^*S_j = \delta_{ij} \tag{1.1}$$

$$S_1 x = \rho^2(x) S_1 \quad \text{for } x \in M \tag{1.2}$$

$$S_2 \rho(x) = \rho^2(x) S_2 \quad \text{for } x \in M \tag{1.3}$$

ここで次のことが考えられる。(1.1) より S_1, S_2 で生成される C^* algebra は Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ である。もし $\rho(S_i) \in C^*(S_1, S_2)$ が満たされていれば、$C^*(S_1, S_2) \supset \rho(C^*(S_1, S_2))$ は "index が有限" な pair ではないだろうか？ C^* algebra の index については、綿谷氏によって一般論が用意されている [W]。これが使えるのではないだろうか？ 答は yes であり、その詳細を報告するのが本文の目的である。

§2. Basic lemma and examples.

次の lemma は、infinite な C^* algebra において index 有限な subalgebra をいかにして作るかということに関して、一つの方針を与える。

<u>Lemma 2.1.</u> A を C^* algebra、V を A の isometry で次を満たすとする。

$$V^* \rho(V) = \pm \frac{1}{d} \qquad (d > 0)$$

$$V x = \rho^2(x) V \qquad \text{for } x \in A$$

このとき次が成立する。

(i) $E(x) = \rho(V^* \rho(x) V)$ とすると、E は A から $\rho(A)$ への conditional expectation である。

(ii) $(d\cdot V^*, d\cdot V)$ はquasi-basisである。つまり

$$x = d^2 V^* E(Vx) = d^2 E(xV^*)V \quad \text{for } x \in A$$

(iii) $\mathrm{Index}\, E = d^2$

証明は単なる計算.

§1の例にもどろう。まず(1.2)の両辺にρをかける。

$$\rho(S_1)\rho(x) = \rho^3(x)\rho(S_1) \quad \text{for } x \in M. \qquad (2.1)$$

これに左からS_1^*をかけると

$$S_1^*\rho(S_1)\rho(x) = S_1^*\rho^3(x)\rho(S_1) = \rho(x)S_1^*\rho(S_1) \qquad (2.2)$$

2番目の等号には(1.2)を使った。よって$S_1^*\rho(S_1) \in \rho(M)' \cap M = \mathbb{C}$が導かれる。次に(2.1)の両辺に$S_2^*$を左からかけると、

$$S_2^*\rho(S_1)\rho(x) = S_2^*\rho^3(x)\rho(S_1) = \rho^2(x)S_2^*\rho(S_1). \qquad (2.3)$$

2番目の等号には(1.3)を使った。よって$S_2^*\rho(S_1)$はρとρ^2の間のintertwinerであり、(1.2)(1.3)より$S_2^*\rho(S_1) \propto S_2$となる。

$$\rho(S_1) = (S_1S_1^* + S_2S_2^*)\rho(S_1) = S_1(S_1^*\rho(S_1)) + S_2(S_2^*\rho(S_1)) \qquad (2.4)$$

より$\rho(S_1) \in C^*(S_1, S_2)$が示せ、同様な議論により$\rho(S_2) \in C^*(S_1, S_2)$も出る。

次に実際に$\rho|C^*(S_1,S_2)$を決定してやろう。上で$S_1^*\rho(S_1) \in \mathbb{C}$を示したが、実はLongoの一般論により[L]、$S_1^*\rho(S_1) = \pm\frac{1}{d}$となることが知られている。($d = [M:N]_0^{\frac{1}{2}}$)。$\rho(S_1^*)\rho(S_1) = 1$, $d^2 = 1 + d$ S_2のphaseの自由度を使えば、$\rho(S_1)$は次のように定まる。

$$\rho(S_1) = \pm\frac{S_1}{d} + \frac{S_2S_2}{\sqrt{d}}.$$

同様に $\rho(S_i^*)\rho(S_j) = \delta_{ij}$, $\rho(S_1)\rho(S_1)^* + \rho(S_2)\rho(S_2)^* = 1$ を使うと、

$$\rho(S_2) = \omega_1\left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} \mp \frac{S_2S_2}{d}\right)S_2^* + \omega_2 S_2 S_1 S_1^*$$

となる ($|\omega_1| = |\omega_2| = 1$)。(1.2), (1.3) を使うと、$\omega_1 = \omega_2 = 1$ となり次の例を得る。

<u>例1</u>　$A = \mathcal{O}_2 = C^*(S_1, S_2)$, $d = 2\cos\frac{\pi}{4}$. ρを次で定める。

$$\rho(S_1) = \frac{S_1}{d} + \frac{S_2S_2}{\sqrt{d}}$$

$$\rho(S_2) = \left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} - \frac{S_2S_2}{d}\right)S_2^* + S_2S_1S_1^*$$

このとき $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{O}_2)$ となり次を満たす。

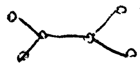
$$S_1 x = \rho^2(x) S_1$$

$$S_2\rho(x) = \rho^2(x) S_2$$

$\mathcal{O}_2$ 上の $\mathbb{T}$ action γ を次で定める。

$$\gamma_t(S_1) = e^{2it}S_1, \quad \gamma_t(S_2) = e^{it}S_2.$$

γとρが可換なことに注意されたい。このγは、後で表現を作るときに、重要な役割を演じる。

同様に $D_5^{(1)}$ () をモデルにすると次の例を得る。

<u>例2</u> $A = \mathcal{O}_3 = C^*(S_1, S_2, S_3)$, $d = 2$. $a \in \mathbb{T}$

$$\rho_a(S_1) = \frac{S_1+S_2}{2} + \frac{S_3S_3}{\sqrt{2}}$$

$$\rho_a(S_2) = \left(\frac{S_1+S_2}{2} - \frac{S_3S_3}{\sqrt{2}}\right)\sqcup$$

$$\rho_a(S_3) = \bar{a}\,\frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}}\,S_3^* + a S_3 (S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)$$

ここで $U = S_1 S_1^* + S_2 S_2^* - S_3 S_3^*$

$\mathbb{Z}_2$ action α と $\mathbb{T}$ action γ を次で定める。

$$\alpha(S_1) = S_2,\ \alpha(S_2) = S_1,\ \alpha(S_3) = -S_3$$

$$\gamma_t(S_1) = e^{2it} S_1,\ \gamma_t(S_2) = e^{2it} S_2,\ \gamma_t(S_3) = e^{it} S_3.$$

このとき次が成立する。

$$S_1 x = \rho_a^2(x) S_1$$

$$S_2 \alpha(x) = \rho_a^2(x) S_2$$

$$S_3 \rho_{\bar{a}^2}(x) = \rho_a^2(x) S_3$$

$$\alpha \circ \rho_a(x) = \rho_a(x),\ \rho_a \circ \alpha(x) = \mathrm{Ad}\,U \circ \rho_a(x)$$

$$\gamma_t \circ \rho_a = \rho_a \circ \gamma_t.$$

§3. Representations.

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}_+^n$ とし、$\mathcal{O}_n$ 上の $\mathbb{R}$ action γ^ω を、次で定義する。

$$\gamma_t^\omega (S_j) = e^{it\omega_j} S_j$$

§2では、我々の例には、このタイプの actionが自然に現われることを見た。ここでは、γ^ω の KMS state を使って、Cuntz algebra の pairから III型 factor の pairを作ることを考える。

$\omega_0=(1,1,\dots,1)$ とすると、γ^{ω_0}は有名なCuntz algebraのゲージ変換であり、$\mathcal{O}_n^{\gamma^{\omega_0}}$ (fixed point algebra) は、UHF algebra $\bigotimes_{k\geq 1}^{\infty} M_n$ と自然に同型であることは、よく知られている。ここで

$$\pi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_t^{\omega_0}(x)\,dt \qquad \text{for } x\in\mathcal{O}_n$$

とすると、πは $\mathcal{O}_n$ から $\mathcal{O}_n^{\gamma^{\omega_0}}$ へのconditional expectationとなる。一般の $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{R}_+^n$ に対して、$\beta>0$ を、

$$\sum_j e^{-\beta\omega_j}=1$$

で定め、$\bigotimes_{k\geq 1}^{\infty} M_n$ 上の state ψ^ω を次で定義する

$$\psi^\omega=\bigotimes_{k\geq 1}^{\infty}\mathrm{Tr}(A_\omega\,\cdot\,),\quad A_\omega=\begin{bmatrix} e^{-\beta\omega_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\beta\omega_n}\end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}_n$ 上の state φ^ω を $\varphi^\omega=\psi^\omega\circ\pi$ で定義すると、次のことが知られている。

定理3.1 (D. Evans [E]) φ^ωはγ^ωのuniqueなKMS stateである。

このことから、φ^ωはすべてfactor stateであるが、特殊な場合については、型が決定できる。

定理3.2 次が成立。

(i) $\omega=(\omega_1,\omega_1,\dots,\omega_1,\omega_2,\omega_2,\dots,\omega_2,\omega_3,\dots,\omega_k)\in\mathbb{N}^n$ で，

$\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k$ は relatively prime

$\Longrightarrow$ φ^ω は type $\mathrm{III}_{e^{-\beta}}$ state.

(ii) $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)$, $\omega_i/\omega_j\notin\mathbb{Q}$ $(i\neq j)$

$\Longrightarrow$ φ^ω は type III_1 state.

証明の point は，$\mathcal{O}_n^{\gamma^\omega}$ が factor であることを示し，$\Gamma(\sigma)=Sp(\gamma)$ を使うところであるが，それは次の方針でできる。

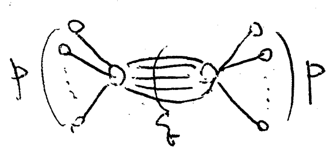
(i) $\mathcal{O}^{\gamma^\omega}$ が AF algebra であることを示し，trace が unique であることを言う。

(ii) UHF algebra の議論に帰着。

例1，例2を見るとわかるように，我々にとって重要なのは，$\omega=\omega_{p,q}=(\overbrace{2,2,\dots,2}^{p},\overbrace{1,1,\dots,1}^{q})$ となる場合である。実際，筆者が構成した Cuntz algebra の endomorphism で，Lemma 2.1 を満たすものは，ある p,q に対して，$\gamma^{\omega_{p,q}}$ と可換になるものばかりである。具体的には

$(p,q)=(1,1),(1,2),(2,2),(m,m-1),(m,0)$

という値が出ている。このことは，偶然ではなく，次の事実からの必然である。$\mathcal{G}_{p,q}$ を下図のグラフとする。



<u>命題3.3</u> $\mathcal{O}_n^{\gamma^{\omega_{p,q}}}$ は $\mathcal{G}_{p,q}$ のstring algebraと同型。

Cuntzは $\mathcal{O}_n$ を導入したときに、$\mathcal{O}_n$ が $\bigotimes_{k=1} M_n$ と $\mathbb{Z}$ との"crossed product"であることを示した。同様な意味で、命題3.3は、$\mathcal{O}_n$ が、$\mathcal{G}_{p,q}$ $(p+q=n)$ のstring algebra と $\mathbb{Z}$ との"crossed product"という表示を持つことを示している。

次の定理により、Cuntz algebra のpairからIII型factorのpairが構成できる。

<u>定理3.4</u> $\omega = \omega_{p,q}$ 、ρ を $\mathcal{O}_n$ のendomorphismで次を満たすとする。

$$S_1 x = \rho_1^2(x) S_1$$

$$S_1^* \rho(S_1) = \pm \frac{1}{d}, \quad (d > 0)$$

$$\gamma^\omega \circ \rho = \rho \circ \gamma^\omega.$$

このとき、$(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ を φ^ω での $\mathcal{O}_n$ のG.N.S.表現とすると、ρ は $\pi_\omega(\mathcal{O}_n)''$ 上のnormal endomorphismに拡張可能である。

この定理によりexpectation $E(x) = \rho(S_1^* \rho(x) S_1)$ もnormalに拡張可能であり、その結果、type III_λ AFD factorのindex有限なsubfactorを得る。ここで λ は、$p\lambda^2 + q\lambda = 1$ により定まる。

$N\subset M$をII$_1$ factorのindex有限なpairとし、

$$N\subset M\subset M_1\subset M_2\subset M_3\subset\cdots$$

を$N\subset M$から定まるtowerとする。A. Ocneanuは、$M_n\cap M'$(or $M_n\cap N'$)のminimal projectionを、bimodule間のintertwinerのrange projectionとみなすことにより、connectionの概念を得ている。これに対し、我々のCuntz algebraでのapproachは、intertwiner自体がalgebraの内部にある場合を考えているのである。残念ながらCuntz algebra上のendomorphismでLemma 2.1を満たす例は今のところ多いとは言えない。(それでも無限個は存在する)しかし、string algebraにintertwinerを1つ付加することによりinfiniteなC*algebraを定義し(特別な場合はCuntz algebraになる)そのalgebra上で、Lemma 2.1を満たすendomorphismを構成するという試みは、筆者により成功している。

Reference

[E] D. Evans: On O_n, Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ., 16 (1980), 915-927

[I] M. Izumi: Some results on classification of subfactors, preprint.

[L] R. Longo: Index of subfactors and statistics of quantum fields II, Comm. Math. Phys. 130 (1990), 285–309.

[W] Y. Watatani: Index for C^*-subalgebras, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 83, 424.