

急拡大部をもつ管路流れの安定性と波動の伝播

同志社大・工 岡本 博 (Hiroshi Okamoto)
同志社大・工 水島 二郎 (Jiro Mizushima)
同志社大・工 山口 博司 (Hiroshi Yamaguchi)

1 はじめに

工学的な設備や機械、環境設備において急拡大部をもつ管路流れは数多く見られる。一般的にはその拡大部の中にパイプや板が設置されており、そこで圧力・温度・湿度などの調整が行われたり、排気ガス、塵埃、不純物の除去などが行われる。ここで取り上げる流れは、急拡大部をもつ対称な流路を流れる二次元的な流れであり、実際の設備における流れの最も単純化したモデルである。

一般には対称な管路を流れる流れは低いレイノルズ数においては、中心軸に対して対称で定常な層流である。しかし、レイノルズ数を大きくすると、この流れは不安定となり、より複雑な流れへと変化してゆく。このとき二つのタイプの不安定性が存在する。一つは流れの対称性が破れ、対称性の低下を伴う不安定性で、その結果生じる流れは定常で非対称な層流である。このような流れの遷移はピッチフォーク分岐と呼ばれる。もう一つは流れの中に振動又は波動が生じる不安定性で、その結果、流れは時間的に変動する周期流となる。このような流れの遷移はホップ分岐と呼ばれる。

急拡大部をもつ流路の流れの特別な例として、対称な後方ステップをもつ流路の流れがあり、この流れの不安定性は Fearn, Mullin & Cliffe (1990)¹⁾によって、実験的、解析的に調べられた。この流路の流れは低いレイノルズ数では中心軸に対して対称な定常流で、レイノルズ数が大きくなると不安定になり、非対称な定常流となることが示された。この定常な対称流から、定常で非対称な流れに移る遷移はピッチフォーク分岐であり、流路拡大比 $E = 3$ の場合、その臨界レイノルズ数は $Re_c = 40.45 \pm 0.15\%$ であった（ここでレイノルズ数は $Re = U_{max}h/2\nu$ で定義する。ただし U_{max} は流入口での最大流速、 h は流入口での流路の幅を示す）。また、このピッチフォーク分岐は系がもつわずかな非対称性により不完全ピッチフォーク分岐となることが示された。

Ghaddar, Korczak & Mikic (1993)²⁾は流路の途中に周期的に配置された溝をもつ流れについて、流れの安定性と流路に生じた波動現象を数値シミュレーションを用いて調べた。その結果、最初の分岐としてホップ分岐が起こり周期流へと遷移することがわかった。この臨界レイノルズ数は $Re_c = 975$ で、臨界レイノルズ数以上で発生する波動は T-S 波であった。この T-S 波は、周期的に配置された溝においてケルビン-ヘルムホルツ (Kelvin-Helmholtz) の不安定性から生じることを示した。

対称でなめらかな急拡大部をもつ二次元流路流れの解の分岐は、Sobey & Drazin (1986)³⁾により数値シミュレーションと実験によって調べられた。彼らは滑らかに拡大・縮小する流路が連続的に存在する流れを取り扱った。その結果、低いレイノルズ数のときに存在する対称な流れはレイノルズ数を大きくすると対称性が破れ、不安定になり非対称な定常流れに遷移すること、さらにレイノルズ数を大きくすると非対称な定常流れがホップ分岐により周期流に遷移することを示した。

Roberts(1994)⁴⁾は流路の途中に絞りが周期的に配置されている流路の流れを取り扱った。彼は数値シミュレーションと実験を行い、この流路を流れる流れの遷移について調べた。その結果、低いレイノルズ数では流れは対称であるが、臨界レイノルズ数 $Re_c = 100$ 以上では非対称な周期流へと遷移することがわかった。臨界レイノルズ数以上で発生する波動は、流出口の絞り付近においてケルビン-ヘルムホルツ (Kelvin-Helmholtz) の不安定性により発生する。この非対称な周期流はさらにレイノルズ数を上げると ($Re \simeq 160$), 三次元的な流れへと遷移することが実験によって示された。

ここでは、急拡大部をもつ対称な流路を流れる二次元流れの不安定性と解の分岐を、数値シミュレーションと定常解を数値的に求める方法を用いて調べる。特に、急拡大部の形状により、この流れはピッチフォーク分岐またはホップ分岐を起こすことを示し、さらに、これらの分岐がアスペクト比により入れ換わることを示す。ホップ分岐が生じた後に、急拡大部から生じる波動現象について、その発生機構およびその伝播について調べる。

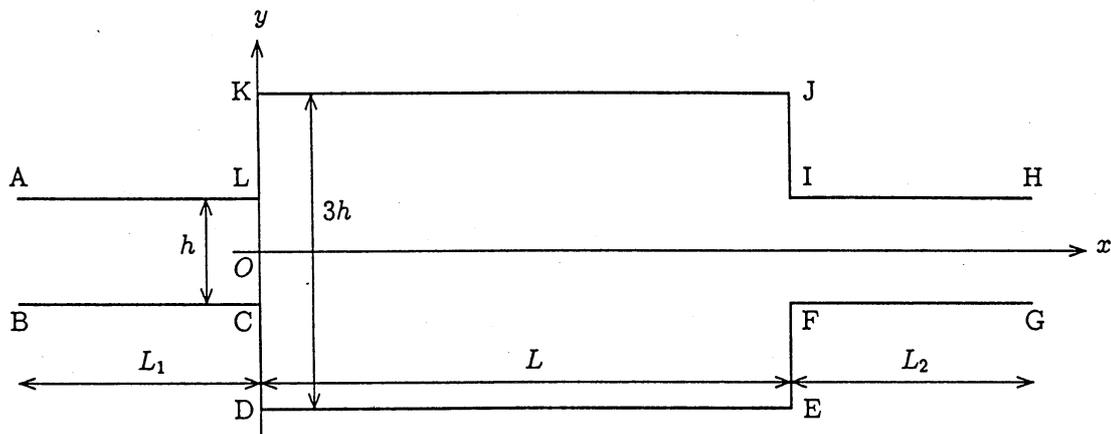


Fig.1. Channel geometry.

2 基礎方程式

Fig.1に示すように対称な拡大部をもつ二次元流路を考える。流れは幅 h の流入口 AB から流入し、同じ幅 h の流出口 GH より流出する。この流路はその中間に急拡大部 DEJK を持っている。ここでは流路拡大比 $E = DK/CL = 3h/h = 3$ の場合のみを取り扱う。その急拡大部の長さを $DE = JK = L$ とし、急拡大部のアスペクト比 A を $A = L/3h$ で定義する。座標軸は Fig.1 に示すように流路の中心軸に x 軸をとり、急拡大部の DK 上に y 軸をとる。流れは二次元非圧縮粘性流とし、固体境界では滑りなしの境界条件とする。流入口の幅の半分 $h/2$ と流入口での最大流速 U_{max} を用いて無次元化を行うと渦度 $\omega(x, y, t)$ と流れ関数 $\psi(x, y, t)$ を支配する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

ここで、レイノルズ数は $Re \equiv U_{max}h/2\nu$ と定義する。ただし、 ν は動粘性係数である。二次元速度は $(u, v) = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$ で表される。流入口 AB で流れは完全に発達したポアズイユ流であると仮定する。その境界条件は

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0,$$

$$\psi = \int_{-1}^y u dy = \int_{-1}^y (1-y^2) dy = y(1-y^2/3) + 2/3 \quad (\text{at } x = -L_1), \quad (3)$$

となる。また、流出口 GH での流出条件は定常流の場合

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{at } x = L + L_2), \quad (4)$$

とする。流れが非定常となる場合、流出口 GH での流出条件はゾンマーフェルト放射条件を用いる。これは流出境界において移流方程式を用いる方法で以下のように示される。

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + c\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} + c\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0 \quad (\text{at } x = L + L_2). \quad (5)$$

ここで c は波の位相速度を示す。本研究ではこの位相速度 c として、その位置での流れ方向の局所流速 u を用いる。各断面における流量は一定であるので、上下の壁における流れ関数は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 = 0 \quad (\text{on } BCDEFG), \quad \psi = \psi_2 = 4/3 \quad (\text{on } HIJKLA), \\ u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{on } BCDEFG \text{ and } HIJKLA). \end{aligned} \quad (6)$$

3 数値計算

本研究では、時間発展方程式の数値シミュレーションと定常方程式の解をSOR法によって直接に求める方法を用いて計算を行った。まず、時間発展方程式の数値シミュレーションを行い、流れの様子を調べた。流れの非線形な振る舞いを代表する物理量として $(x, y) = (L/2, -1), (L/2, 0), (L/2, 1), (L + L_2/2, 0)$ の4点における y 方向の流速 v を採用し、これらの時間的な振る舞いを調べた。その結果、流れが定常である場合、そのレイノルズ数付近の流れをSOR法を用いて求めた。また、低いレイノルズ数で存在する対称な流れは、レイノルズ数が増加すると不安定になり非対称な流れへと遷移する。しかし、この不安定となった対称解は臨界レイノルズ数以上でも基礎方程式の解として存在する。この臨界レイノルズ数以上での不安定な対称解を、流れ場に対称性の仮定を行うことによりSOR法を用いて求める。この対称な解は渦度に対して中心軸 ($x = 0$) において反対称条件を用いることによって得られる。この条件は以下のように示される。

$$\omega(x, y) = -\omega(x, -y) \quad (x > 0), \quad \omega = 0 \quad (\text{on } x = 0). \quad (7)$$

したがって、この場合の渦度に関する計算は $y < 0$ についてのみ行い、 $y > 0$ に対しては上に述べた条件を用いる。

3.1 時間発展方程式の数値シミュレーション

数値計算は、アスペクト比が $A = 4, 3, 8/3, 7/3, 2, 4/3$ の6種類について行った。流入口から急拡大部までの距離 L_1 と急縮小部から流出口までの距離 L_2 はアスペクト比に関わらず一定で、 $L_1 = 3h, L_2 = 3h$ とする。格子間隔は $\Delta x = \Delta y = 0.1$ として、領域を格子状に離散化した。

渦度輸送方程式を時間項に前進オイラー、空間微分の項は二次精度の中心差分を用いて差分化する。ポアソン方程式に対しては二次精度の中心差分を用いて差分化する。ポアソン方程式の解法には、大型疎行列の計算に適したSOR法を用いる。時間間隔はレイノルズ数が比較的小さい場合 ($Re < 120$) は $\Delta t = 0.001$ とし、レイノルズ数が比較的大きい場合 ($Re \geq 120$) は $\Delta t = 0.0005$ とした。SOR法における緩和係数 ε はアスペクト比、レイノルズ数によらず一定で $\varepsilon = 1.5$ とする。また、SOR法における収束判定は各格子点における流れ関数 $\psi_{i,j}^n$ が繰り返し計算に対して変化が、ある臨界値より小さいときに解が得られたとする。ここでは流れ関数の最大残差が 10^{-5} 以下のときに時刻 $n\Delta t$ における流れ関数が得られたとする。各格子点での流れ関数が時間に対してほとんど変化せず、一定値とみなすことができるときに流れは定常であると判断し計算を終了する。ここでは $\max_{i,j} |\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n| < 10^{-10}$ のときに流れは定常であると判定した。ただし、 $\psi_{i,j}^n \equiv \psi(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ で、時刻 $n\Delta t$ のときの位置 $(x, y) = (i\Delta x, j\Delta y)$ における流れ関数を示す。また、同時に流れの様子を調べるため $(x, y) = (L/2, -1), (L/2, 0), (L/2, 1), (L + L_2/2, 0)$ の4点の y 方向の流速 v の時間変化を調べる。流れが周期流の場合には、これらの4点での流速 v の振幅が時間に対して一定となったときに計算を打ち切る。

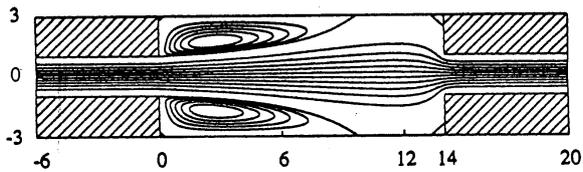
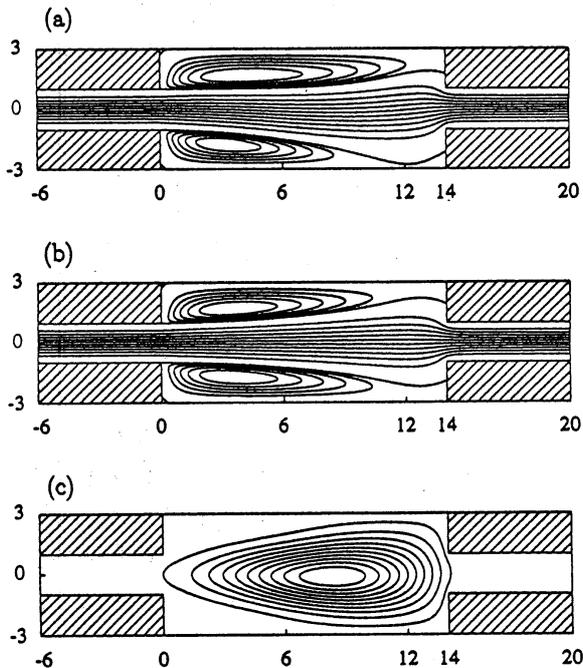
3.2 SOR法による定常解の計算

定常方程式は渦度輸送方程式において、時間微分の項をゼロと置くことにより得られる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (8)$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

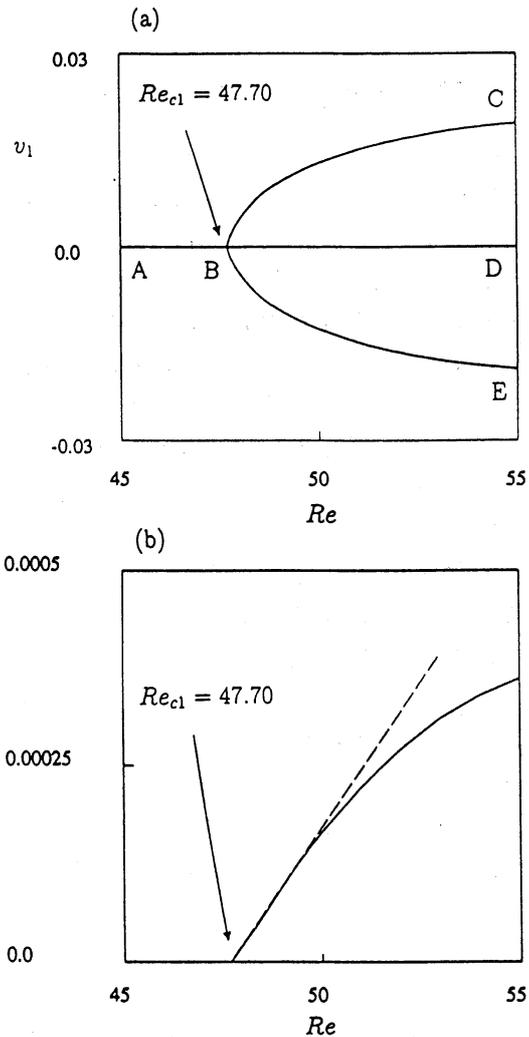
この定常解の方程式を空間に対して四次精度の中心差分を用いて差分化する。計算領域の大きさおよび各領域における格子数は時間発展方程式の数値シミュレーションの場合と同様にする。定常方程式を上で述べたように差分化することによって、連立一次方程式の問題に帰着することができる。この連立一次方程式の解法には大型疎対角行列の演算に適したSOR法を用いる。SOR法における緩和係数 ε はアスペクト比、レイノルズ数に依存し $0.7 \leq \varepsilon \leq 1.0$ とする。このSOR法での解の収束判定は、各格子点における流れ関数 $\psi_{i,j}$ と渦度 $\omega_{i,j}$ が繰り返し計算に対して、その変化がある臨界値より小さくなったときに解が得られたとする。ここでの収束判定は $\max_{i,j} |\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^k| < 10^{-10}$ かつ $\max_{i,j} |\omega_{i,j}^{k+1} - \omega_{i,j}^k| < 10^{-10}$ とする。ここで、 $\psi_{i,j}^k, \omega_{i,j}^k$ は $\psi(i\Delta x, j\Delta y), \omega(i\Delta x, j\Delta y)$ の k 回目の繰り返し計算における値である。

Fig. 2. Flow pattern for $Re = 35$, $A = 7/3$.Fig. 3. Flow pattern for $Re = 50$, $A = 7/3$.

- (a) asymmetric flow.
 (b) unstable symmetric flow.
 (c) disturbance.

4 結果および考察

Fig. 2に $A = 7/3$, $Re = 35$ のときの流れの様子を示す. レイノルズ数が低い場合, 急拡大部へ流入するときの剥離流れによって生じる上下の渦は再付着点距離が等しく, 中心軸に対して対称な定常流れである. 流入および流出部における流れは, 完全に発達したポアズイユ流れとなっている. 急縮小部の境界壁においてモハット (Moffatt) 渦が存在することが確認できる. 対称な流れの場合, 上下の再循環流の再付着点距離とモハット渦の長さはレイノルズ数が増加するにつれて長くなる. $A = 7/3$, $Re = 50$ のときの流れの様子を Fig. 3 に示す. Fig. 3(a) では, 急拡大部において対称性が崩れ, 非対称な定常流になっている. このときの再付着点はレイノルズ数が低い場合と異なり, 上下の境界壁上ではなく縮小部の境界壁上に存在する. 流出部では, 急拡大部における非対称性の影響はなく, 平行な流れとなっている. これらのことから, $Re = 35$ と $Re = 50$ の間で流れが遷移していることがわかる. この流れの遷移について詳しく調べるために攪乱の大きさを代表する量として, 急拡大部 CL から $0.4h$ 下流 ($x = 0.8$) における中心軸上での y 方向の流速 v_1 を用いる. レイノルズ数 Re に対して, この v_1 をグラフにしたの

Fig. 4. Vertical velocity v_1 at $x = 0.8$ (a) and v_1^2 (b) v.s. Reynolds number Re , $A = 7/3$.

が Fig.4(a) である。流れが対称な場合、中心軸上では y 方向の流速はゼロとなる (A-B)。しかし、臨界レイノルズ数を越えると流れが非対称になり、 y 方向の流れが生じる。このため v_1 は有限の値をもつようになる。臨界レイノルズ数以上で流れが非対称になるとき、上側に偏る場合と下側に偏る場合の二種類が存在するが、これらの可能性は等しく、レイノルズ数が同じ場合、 v_1 は流れの方向が逆で大きさは等しい。この非対称性は、レイノルズ数が増加するにつれて大きくなる (B-C, B-E)。Fig.4(b) では v_1^2 をレイノルズ数 Re の関数としてグラフにした。この図において v_1^2 は $Re_{c1} = 47.70$ 付近では破線で示すように $v_1^2 \propto (Re - Re_{c1})$ となっておりピッチフォーク分岐が生じていることがわかる。しかし、このピッチフォーク分岐は構造的に不安定で、テストセクションのわずかな非対称性によって、不完全ピッチフォークとなることが Fearn(1990)¹⁾らによって示されている。

対称性の仮定をして計算を行った結果を Fig.3(b) に示す。臨界レイノルズ数以上でも対称性の仮定をすることによって、対称な解が得られることから、基礎方程式において臨界レイノルズ数以上でも対称な解が存在することがわかる。しかし、この対称な流れは臨界レイノルズ数以上では不安定となり、非対称な流れに遷移する。安定性理論との対応では、攪乱は非対称な流れと対称な流れの差となる。 $A = 7/3, Re = 50$ の場合の攪乱の分布を Fig.3(c) に示す。この図では、攪乱は対称軸上に中心が存在し、およそ楕円状に分布しているが、急拡大部の下流側では縮小部の境界壁の影響を受けている。

本研究における特別な場合として $A = \infty$ に対して同様の結果を行った。 $A = \infty$ の場合、臨界レイノルズ数は $Re_{c1} = 40.00$ であった。Fearn (1990)¹⁾らの数値計算による臨界レイノルズ数は $Re_{c1} = 40.45 \pm 0.17\%$ で、本研究の結果とほぼ一致している。また $A = 4$ の場合の臨界レイノルズ数が $Re_{c1} = 40.00$ で $A = \infty$ の場合と同じ値であることから $A = 4$ ではアスペクト比の影響を受けない。 $A = 2.0, 4/3$ では $Re = 50 \sim 100$ において非対称な流れは得られなかった。Fig.5 にアスペクト比に対する臨界レイノルズ数を示す。この図より、非対称な定常流が存在する臨界アスペクト比は $A_c \simeq 2.3$ で、この臨界アスペクト比以下では非対称な定常流は存在しない。

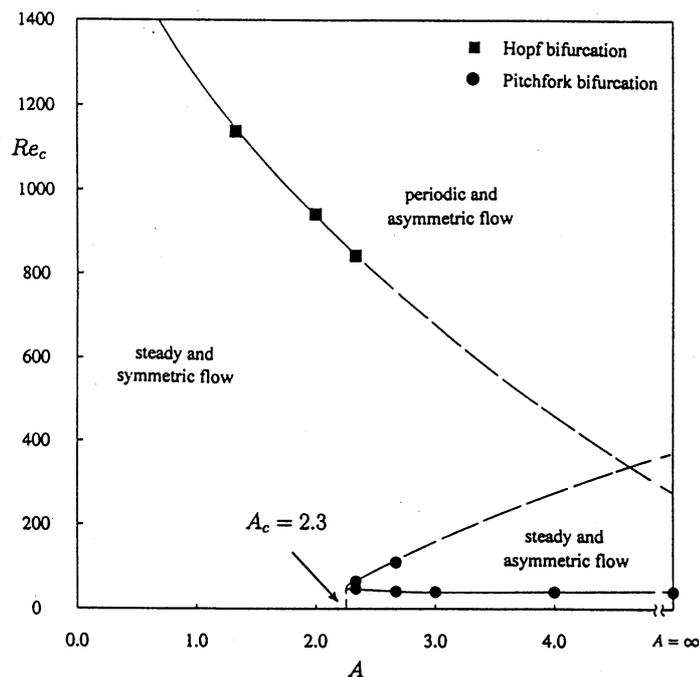


Fig.5. Critical Reynolds number Re_c v.s. aspect ratio A .

さらにレイノルズ数を増加させて非対称な定常流からの流れの遷移について調べる。 $A = 7/3$, $Re = 70$ のときの流れの様子を Fig.6 に示す。 $A = 7/3$ の場合では非対称な流れはレイノルズ数が増加するにつれて非対称性は小さくなり、対称な流れに戻る。したがって $Re = 55$, $Re = 70$ の間で非対称な定常流から対称な定常流へ遷移している。この流れの遷移について調べるために、先に定義した代表振幅 v_1 ($x = 0.8$, $y = 0$ における y 方向の流速) を用いる。 Fig.7 に $A = 7/3$ のときのレイノルズ数 Re に対する v_1 を示す。 Fig.7(a) では、レイノルズ数の増加につれて非対称性が小さくなり (C-D, E-D), v_1 は減少する。臨界レイノルズ数 $Re_{c2} = 65.24$ 以上では $v_1 = 0$ となり、対称な流れになる。 Fig.7(b) から、 $Re_{c2} = 65.24$ 付近において $v_1^2 \propto (Re_{c2} - Re)$ となっているため、この定常な非対称流から定常な対称流への分岐は逆ピッチフォーク分岐であることがわかる。 Fig.5 示したように、この非対称な定常流はアスペクト比が大きくなるにつれて存在するレイノルズ数の範囲は広がる。 $A = \infty$ の場合では非対称な定常流れが非定常な非対称流に遷移することが Fearn(1990) ¹⁾らによって実験で示されている。したがって、二次分岐においてアスペクト比によって非対称な定常流れが定常な対称流に移る場合と、非対称な定常流れが非対称な非定常流れに遷移する場合がある。以上のことから、この二つの現象が入れ替わる臨界アスペクト比が存在することが考えられる。

次に、 $A = 7/3$ で比較的レイノルズ数が高い場合について調べる。代表振幅として縮小部から $1.5h$ 下流 ($x = 17.0$) における y 方向の流速 v_2 を用いる。 Fig.8 に $A = 7/3$, $Re = 875$ の場合の流速 v_2 の時間変化を示す。この図より、流速 v_2 は周期的に振動していることがわかる。したがって $Re = 120$ と $Re = 875$ の間で流れが対称な定常流から非定常な周期流へと遷移している。この流れの遷移について詳しく調べるために v_2 の最大

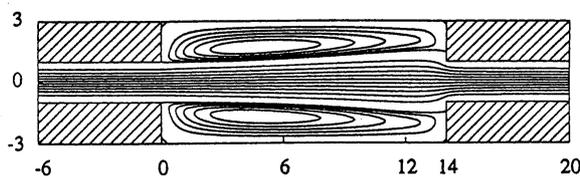


Fig.6. Flow pattern for $Re = 70$, $A = 7/3$.

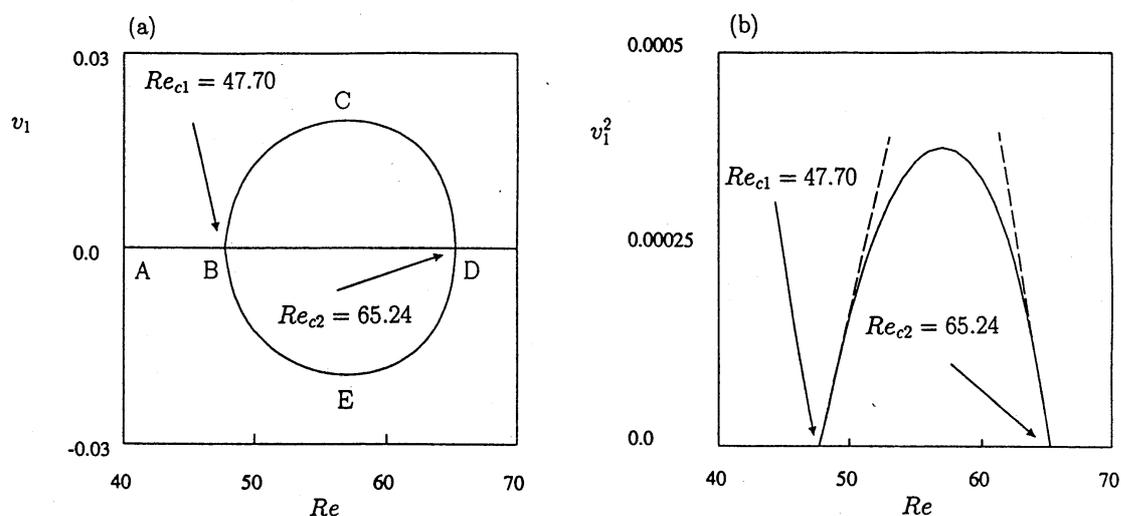


Fig.7. Vertical velocity v_1 at $x = 0.8$ (a) and v_1^2 (b) v.s. Reynolds number Re , $A = 7/3$.

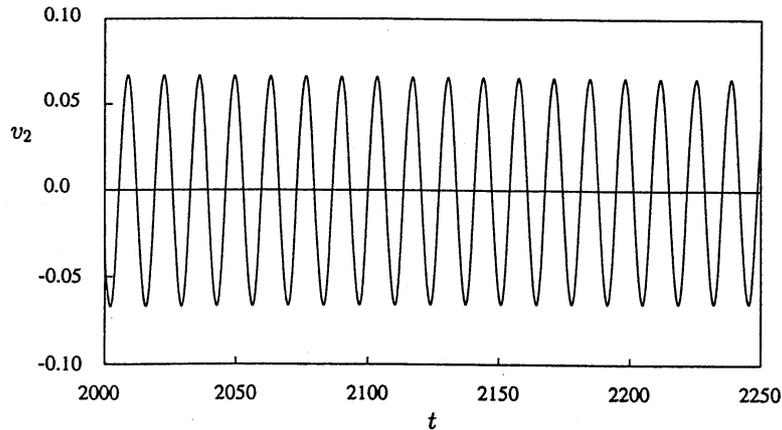


Fig.8. Vertical velocity v_2 at $x = 17.0$ v.s. time t for $Re = 875$, $A = 7/3$.

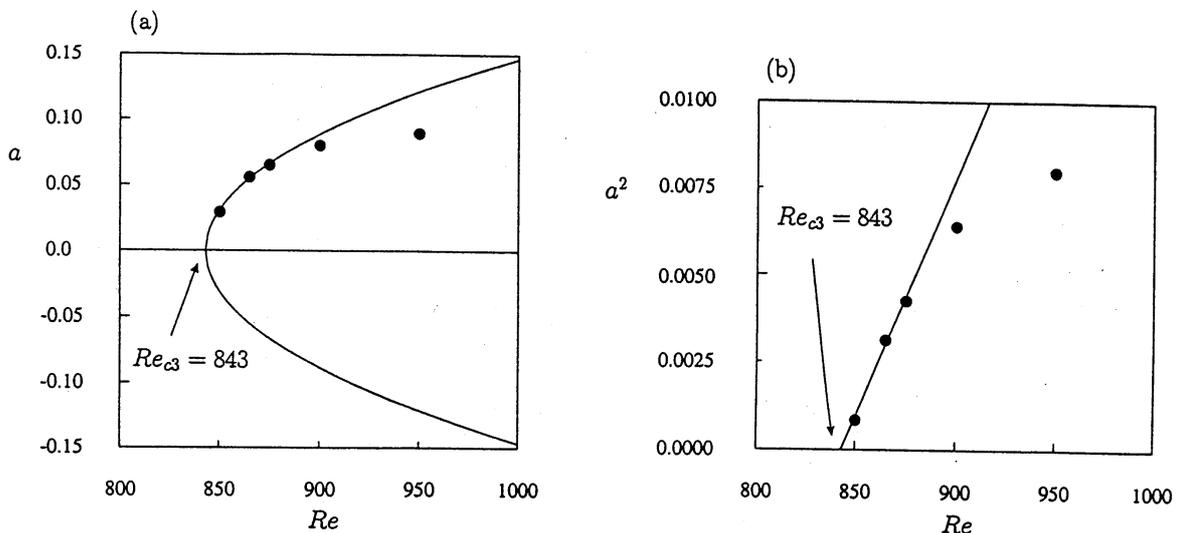


Fig.9. Amplitude a (a) and a^2 (b) v.s. Reynolds number Re , $A = 7/3$.

振幅 a をレイノルズ数に対して示したのが Fig.9(a) で、 a^2 をレイノルズ数に対して示したのが Fig.9(b) である。臨界レイノルズ数 $Re_{c3} = 843$ 以下では、流れは対称な定常流であるから v_2 の最大振幅 a はゼロとなるが、臨界レイノルズ数以上では非定常な周期流へと遷移したため、最大振幅 a で v_2 が振動している。Fig.9(b) では $a^2 \propto (Re - Re_{c2})$ となっており、この対称な定常流から非定常な周期流への遷移はホップ分岐であることがわかる。Fig.10(a) に v_2 が最大振幅となるときの流れ場を示す。 $Re = 875$ では対称性が破れて非定常な周期流へと遷移している。流入区間ではポアズユ流れであるが、急拡大部の下流において波が発生している。Fig.10(b) は一周期の時間平均流で、中心軸に対し対称な流れとなっている。Fig.10(c) に v_2 が最大振幅となるときの攪乱の様子を示す。攪乱はある時刻における流れから対称な時間平均流を差し引いたものである。この図からも急拡大部において波が発生していることがわかる。この波の発生機構について調べるために $Re = 875$ のときの一周期の流れの様子を調べたところ、急拡大部の上下の循環渦は周期運動をしていた。したがって、急拡大部から発生する波はこの上下の渦の周期運動によって発生する。このときの波の周期は $T = 13.50$ であった。

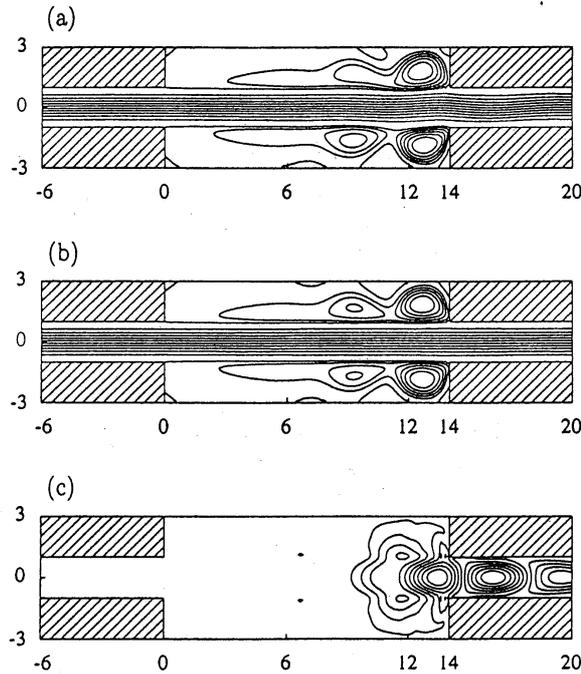


Fig.10. Flow pattern for $Re = 875$, $A = 7/3$.
 (a) instantaneous flow field. (b) time average flow field. (c) disturbance.

Table 1. The comparison of plane Poiseuille flow and present work for $A = 7/3$, $Re = 875$.

spatial decay rate	frequency	wave number
$\sigma_{TS} = 0.1272$	$f_{TS} = 0.07481$	$\alpha_{TS} = 1.255$
$\sigma = 0.1519$	$f = 0.07407$	$\alpha = 1.004$

平行な平板間を流れる流れは臨界レイノルズ数 $Re_c = 5772$ において T-S 波と呼ばれる波が発生することが知られているが、 $A = 7/3$ の臨界レイノルズ数は $Re_{c2} = 843$ で、かなり低い値となっている。このため、急拡大部から発生する波は下流に行くにしたがって減衰すると考えられる。この波の伝播について調べるため急縮小部から流出口までの距離 L_2 を $L_2 = 15h$ として計算を行ったところ、急拡大部から発生した波は下流に行くにつれて急速に減衰していた。平面ポアズイユ流で発生する T-S 波との比較を Table 1 に示す。T-S 波における空間減衰率は Gaster 変換を用いて時間モードから空間モードへ変換することによって求めることができる。Gaster 変換は線形増幅率が小さい場合用いることができ、以下のような関係で示される。

$$\alpha_i = \frac{\alpha c_i}{c_r + \alpha \partial c_r / \partial \alpha} \quad (10)$$

ここで α_i , c_r , αc_i , α は空間減衰率、攪乱の位相速度、時間増幅率、波数を示す。急拡大部から発生する波動の空間減衰率は平面ポアズイユ流の場合と比べると少し大きい。

線形増幅率が最大となる波数は、少し小さいが、振動数はほぼ T-S 波と一致している。したがって、この急拡大部から発生する波は T-S 波の性質を持っていることがわかる。

5 Discussion

対称な流路を持つ流れは低いレイノルズ数では、対称な流れであることは一般的によく知られている。この対称な流れの上下のどちらかの壁付近において圧力差が生じた場合、レイノルズ数が低い場合は流体の粘性の影響によってこの攪乱は減衰してゆくが、レイノルズ数が大きくなると攪乱の増幅率は増加し、粘性との平衡状態が破れる。その結果 y 方向の流れが生じ、流れは非対称な流れへと遷移すると考えられる。

対称な急拡大部を有する流路流れではアスペクト比により、流れの性質は異なる。アスペクト比が比較的小さい $A = 4/3$ および 2 の場合においては、非対称な定常流は存在しない。これは再付着点距離と関係があると考えられる。 $A = \infty$ のとき $Re = 40$ 付近における再付着点距離はおおよそ $x_r = 12$ で、これは $A = 2$ の場合の急拡大部の長さと同じ。したがって $A = 2$ のとき $Re = 40$ では再付着点は縮小部の壁上に存在すると考えられる。流れが非対称になる場合、上下どちらか片方の渦は長くなり、もう片方は短くなる。しかし、 $A = 2$ のとき、 $Re = 50$ 程度のレイノルズ数では縮小部の影響を受けて渦は長くなることができない。このためアスペクト比 A がある臨界アスペクト比 A_{c1} より小さいときは非対称な流れは起こらない。これらのことから非対称な流れの起こる臨界アスペクト比は $A_{c1} \simeq 2.3$ であると考えられる。 $A \leq A_{c1}$ で存在する対称な定常流はレイノルズ数を上げると不安定になり、ホップ分岐を起こし周期流へと遷移する。しかし、臨界アスペクト比 A_{c1} 以上 ($A_{c1} < a \leq A_{c2}$, $A_{c2} \simeq O(10)$) では低いレイノルズ数で存在する対称な定常流はレイノルズ数の増加と共に不安定になり、ピッチフォーク分岐を起こし、非対称な定常流へと遷移する。この非対称な定常流はレイノルズ数を上げることにより非対称性が減少し、逆ピッチフォーク分岐を起こし対称な定常流へと遷移する。そして、この対称流はさらにレイノルズ数を上げることによって、ホップ分岐を起こし、周期流へと遷移する。アスペクト比がさらに大きい場合 ($A > A_{c2}$, $A_{c2} \simeq O(10)$) は、定常な対称流がピッチフォーク分岐を起こし、非対称な定常流へと遷移するが、さらにレイノルズ数を上げた場合、対称な流れに遷移せず非対称な周期流になることが考えられる。したがって、アスペクト比を変化させることによって流れの遷移の性質は以上のような三つの場合に分けられることがわかった。

ホップ分岐が生じた場合、急拡大部の後方において波が発生する。平面ポアズイユ流の臨界レイノルズ数と比較すると、ホップ分岐が生じる臨界レイノルズ数はかなり低い。この波は指数関数的に減衰する。また、平面ポアズイユ流で発生する T-S 波と比較した結果、急拡大部から発生する波は T-S 波と同じ性質を持っている。

対称な急拡大部をもつ流れは、流路拡大比 E によって臨界レイノルズ数は異なる。流路拡大比が大きいときは、対称な定常流から非対称な定常流へ遷移する臨界レイノルズ数は小さいが、流路拡大比を小さくすると臨界レイノルズ数は増加し、ある流路拡大比以下では、流路の拡大の影響を受けず平面ポアズイユの臨界レイノルズ数と等しくなる。流路拡大比による臨界レイノルズ数の変化は、境界の影響によるものである。したがって、流路拡大比が小さい場合、流体の粘性による境界の影響は流れを安定化させる効果がある。このため臨界レイノルズ数は大きくなる。しかし、流路拡大比が大きくなると流体の粘性による境界の影響は小さくなり、臨界レイノルズ数は小さくなる。この境界

の影響は流路拡大比だけでなく、厚さ方向の境界からの影響も考えられる。厚さ方向の長さが、流路の幅 h の約10倍のときは流れは二次元的であるが、 h と等しいときは流れは三次元的な流れとなり、このときの臨界レイノルズ数は二次元的な流れのときの約5倍ぐらいにまで上がる ($Re_c \simeq 200$)。

急拡大部のアスペクト比の変化は、乱流状態にも影響を与える。アスペクト比が小さい場合は、レイノルズ数を上げると非対称な定常流れと対称な定常流れになる場合がある。しかし、この非対称な流れは、さらにレイノルズ数を上げることによって対称な定常流へ遷移する。そして、この対称な定常流はホップ分岐を起こし周期流へと遷移し、さらに分岐を繰り返して乱流状態へ遷移する。この乱流状態では時間平均流は対称な流れとなると考えられる。しかし、アスペクト比がかなり大きい場合は、対称な定常流から非対称な定常流へと遷移するが、次に生じる分岐はホップ分岐でこの非対称な定常流は周期流へと遷移する。その後、さらに分岐を繰り返し、乱流に遷移する。このときの乱流状態での時間平均流は非対称な流れとなる。したがって、アスペクト比を変化させることは乱流状態にも影響を及ぼす。

参考文献

- 1) R. M. Fearn, T. Mullin & K. A. Cliffe: Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion, *J. Fluid Mech.* **211**(1990) 595-608.
- 2) N. K. Ghaddar, K. Z. Korczak & B. B. Mikic: Numerical investigation of incompressible flow in grooved channels. Part 1. Stability and self-sustained oscillations, *Phys. Fluids A* **5** (10), 1993.
- 3) I. J. Sobey & P. G. Drazin: Bifurcations of two-dimensional channel flows, *J. Fluid Mech.* **171** (1986) 263-287.
- 4) E. P. L. Roberts: A numerical and experimental study of transition processes in an obstructed channel flow, *J. Fluid Mech.* **260** (1994) 185-209.