

# 積グラフの独立な全域木 Independent Spanning Trees of Product Graphs

小保方 幸次      岩崎 至宏      鮑 豊      五十嵐 善英  
Koji Obokata    Yukihiro Iwasaki    Feng Bao    Yoshihide Igarashi

群馬大学工学部情報工学科  
Department of Computer Science, Gunma University

## 1 はじめに

1組のグラフ  $G_1 = (V_1, E_1)$  と  $G_2 = (V_2, E_2)$  について,  $G_1$  と  $G_2$  の積グラフ  $G_1 \times G_2$  は 頂点集合  $V_1 \times V_2 = \{(x, y) \mid x \in V_1, y \in V_2\}$  と 2つの頂点  $(u_1, u_2)$  と  $(v_1, v_2)$  が  $G_1 \times G_2$  において隣接しているならば  $u_1 = v_1$  と  $u_2v_2 \in E_2$ , または  $u_2 = v_2$  と  $u_1v_1 \in E_1$  のどちらかであるような辺集合をもつグラフである. 2つのグラフの積の定義から  $n$  個のグラフの積を定義することができる.  $G_1 \times G_2 \times G_3$  は  $(G_1 \times G_2) \times G_3$  または  $G_1 \times (G_2 \times G_3)$  である.  $(G_1 \times G_2) \times G_3$  と  $G_1 \times (G_2 \times G_3)$  は同型である.  $n$  個のグラフの積  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  はある  $k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) について,  $(G_1 \times \dots \times G_k) \times (G_{k+1} \times \dots \times G_n)$  を意味する. ここで各  $G_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) は  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  の成分と呼ばれる.

よく知られているネットワークのいくつかは積グラフである. 例えば  $n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$  は  $Q_{n-1} \times K_2 = Q_{n-2} \times K_2 \times K_2 = \dots = K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$  で, 一般  $n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n^t$  は  $Q_{n-1}^t \times K_t = Q_{n-2}^t \times K_t \times K_t = \dots = K_t \times K_t \times \dots \times K_t$  である. ここで  $K_t$  は頂点数  $t$  の完全グラフである.  $(m_1 \times \dots \times m_n)$ -メッシュは  $L_{m_1} \times \dots \times L_{m_n}$  で,  $(m_1 \times \dots \times m_n)$ -トーラスは  $R_{m_1} \times \dots \times R_{m_n}$  である. ここで  $L_i$  と  $R_i$  はそれぞれ頂点数  $i$  の線形グラフと頂点数  $i$  のリングである. hyper de Bruijn グラフ  $HD(m, n)$  は  $Q_m \times D_n$  で, hyper Petersen グラフ  $HP_n$  は  $Q_{n-3} \times P$  である. ここで  $D_n$  と  $P$  はそれぞれ頂点数  $2^n$  の binary de Bruijn グラフ と Petersen グラフである.

グラフ  $G$  の頂点連結度を  $\kappa(G)$  とする. Youssef [6] は 1組のグラフ  $G_1$  と  $G_2$  について,  $\kappa(G_1 \times G_2) = \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$  であることを示した.

グラフの頂点の 1組をつなぐパスの集合において, 集合内の任意の 1組のパスが端点を除き共通の頂点や共通の辺をもたないならば, そのパスの集合は内素であるという. もしグラフ  $G = (V, E)$  の 2本の全域木が同じ頂点  $r$  を根とし,  $V$  の各頂点  $v$  に対して  $r$  から  $v$  への 各木 1本ずつの 2本のパスが内素であるならば, 2本の全域木は独立であるという.  $G$  の全域木の集合において, もしそれらの任意の 2本の全域木が独立ならば, その集合は独立であるという. もしグラフ  $G$  の  $r$  を根とする  $n$ 本の独立な全域木が存在するならば,  $G$  を頂点  $r$  での  $n$ -チャンネルグラフと呼ぶ. もし  $G$  が全ての頂点での  $n$ -チャンネルグラフならば,  $G$  を  $n$ -チャンネルグラフと呼ぶ. 例えば,  $R_3 \times R_3$  は 4チャンネルグラフである.  $R_3 \times R_3$  の頂点  $r$  を根とする 4本の独立な全域木を図 1 に示す.

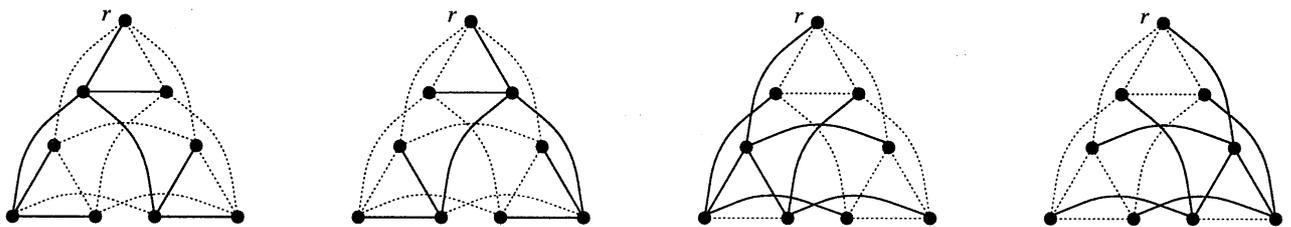


図 1:  $R_3 \times R_3$  の 4本の独立な全域木

Itai と Rodeh [4] は 2-連結グラフにおいて 2本の独立な全域木を見つける線形時間アルゴリズムを与えた. Cheriyan と Maheshwari [3] は  $G = (V, E)$  の 3本の独立な全域木を  $O(|V||E|)$  時間で見つける方法を示した. Zehavi と Itai [7] もまた任意の 3-連結グラフ  $G$  において 任意の頂点  $r$  での 3本の独立な全域木が存在することを示した. 彼らは [7] において 任意の  $k$ -連結グラフは 任意の頂点  $r$  での  $k$ 本の独立な全域木をもっていることを予想した. この問題は  $k > 3$  に対して未解決である.

独立な全域木でのブロードキャストは効率良く信頼性が高いことが示されている [1][2][4]. 実際, もし  $G$  が  $n$ -チャンネルグラフであって, 情報源の頂点が故障していないならば,  $n-1$  個までの fail-stop タイプの故障,  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  個までの Byzantine タイプの故障に耐えられるブロードキャストスキームが存在する. このようなブロードキャストスキームによる全ての伝達は 多数決によって正しいメッセージを得ることができ, その通信量は最適である.

一般に, 与えられた  $n$ -連結グラフの同じ頂点を根とする  $n$ 本の独立な全域木を構成するのは非常に困難である. 本稿では, 与えられた積グラフの独立な全域木の構成に着目する.  $G_1$  が  $n_1$ -チャンネルグラフ,  $G_2$  が  $n_2$ -チャンネルグラフならば,

$G_1 \times G_2$  は  $(n_1 + n_2)$ -チャネルグラフであることを示す。この事実を  $G_1$  の  $n_1$  本の独立な全域木と  $G_2$  の  $n_2$  本の独立な全域木から  $G_1 \times G_2$  の  $n_1 + n_2$  本の独立な全域木を構成することにより証明する。この構成は単純ではない。成分グラフの独立な全域木を適当に修正したものを用いることにより  $n_1 + n_2$  本の独立な全域木を構成する。この構成より、各成分グラフ  $G_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して、 $G_i$  の頂点連結度が  $G_i$  の同じ頂点を根とする独立な全域木の数と一致するならば、頂点連結度と  $G_1 \times \dots \times G_n$  の同じ頂点を根とする独立な全域木の数は一致する。

## 2 積グラフの全域木

始めに全域木上の操作 "\*" を定義する。グラフ  $G$  の頂点集合と辺集合をそれぞれ  $V(G)$  と  $E(G)$  とする。集合  $\alpha$  の濃度を  $|\alpha|$  によって示す。 $G_a$  と  $G_b$  を 2 つのグラフとし、 $r_a$  を  $G_a$  の頂点、 $r_b$  を  $G_b$  の頂点とする。 $T_a$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木とし、 $T_b$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とする。 $T_a$  での  $r_a$  の子の数を  $k_a$  とし、 $T_a$  での  $r_a$  の子の集合を  $C_a = \{s_a^1, \dots, s_a^{k_a}\}$  とする。 $v_a$  を  $C_a$  内の頂点とする。各  $i$  ( $1 \leq i \leq k_a$ ) に対して、 $S_a^i$  を  $T_a$  の  $s_a^i$  を根とする部分木とする。 $T_a$  と  $T_b$  から  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする全域木  $T_a(v_a) * T_b$  を次のように構成する。

- (1)  $C_a$  内の各  $u$  に対して、 $(r_a, r_b)$  と  $(u, r_b)$  をつなぐ。
- (2) 各  $y_1 y_2 \in E(T_b)$  に対して、 $u \in C_a$  ならば  $(u, y_1)$  と  $(u, y_2)$  をつなぐ。
- (3) 各  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) に対して、 $x_1 x_2 \in E(S_a^i)$  かつ  $y \in V(G_b)$  ならば  $(x_1, y)$  と  $(x_2, y)$  をつなぐ。
- (4) 各  $y \in V(G_b) - \{r_b\}$  に対して、 $(r_a, y)$  と  $(v_a, y)$  をつなぐ。

$T_b$  での  $r_b$  の子の数を  $k_b$  とし、 $T_b$  での  $r_b$  の子の集合を  $C_b = \{s_b^1, \dots, s_b^{k_b}\}$  とする。 $v_b$  を  $C_b$  内の頂点とする。各  $i$  ( $1 \leq i \leq k_b$ ) に対して、 $S_b^i$  を  $T_b$  の  $s_b^i$  を根とする部分木とする。対称的に  $T_a * T_b(v_b)$  を構成する。

$T_a(v_a) * T_b$  と  $T_a * T_b(v_b)$  の例を図 2 に示す。

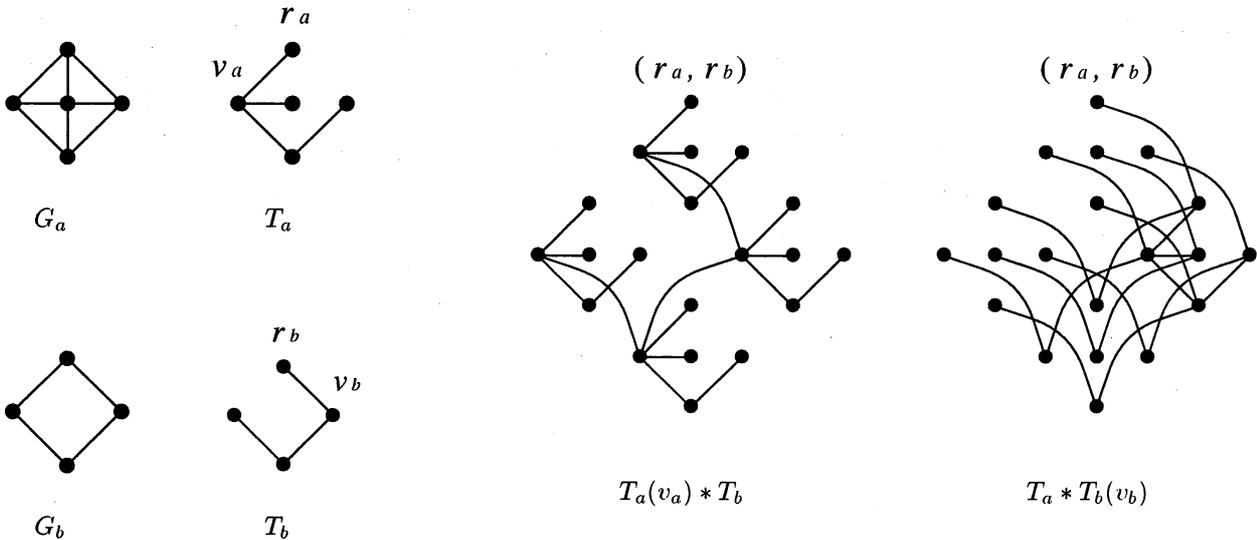


図 2:  $T_a(v_a) * T_b$  と  $T_a * T_b(v_b)$  の例

$G_a \times G_b$  でのパスを特定するため、次の記号を用いる。もし  $x_1 x_2$  が  $G_a$  の部分グラフ  $T$  の辺ならば、 $(x_1, y)$  から  $(x_2, y)$  への長さ 1 のパスを  $(x_1, y) \xrightarrow{T} (x_2, y)$  によって表す。 $\xrightarrow{T}$  の反射かつ推移閉包を  $\xrightarrow{T}$  によって表す。同様に、もし  $y_1 y_2$  が  $G_b$  の部分グラフ  $T'$  の辺ならば、 $(x, y_1)$  から  $(x, y_2)$  への長さ 1 のパスを  $(x, y_1) \xrightarrow{T'} (x, y_2)$  によって表す。 $\xrightarrow{T'}$  の反射かつ推移閉包を  $\xrightarrow{T'}$  によって表す。

**補題 1**  $T_a$  と  $T_b$  をそれぞれ  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木と  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とし、 $v_a$  と  $v_b$  をそれぞれ  $T_a$  での  $r_a$  の子と  $T_b$  での  $r_b$  の子とする。 $T_a(v_a) * T_b$  と  $T_a * T_b(v_b)$  の各々は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする全域木である。

**証明:**  $T_a(v_a) * T_b$  を考える。規則 (1), (2), (3), (4) によって構成される辺の集合は共通の辺をもたなく、その辺の数はそれぞれ  $|C_a|, |C_a||E(T_b)|, (|E(T_a)| - |C_a|)|V(G_b)|, |V(G_b)| - 1$  である。故に、 $T_a(v_a) * T_b$  の辺の数は  $|C_a|(1 + |E(T_b)|) - |V(G_b)| + (|E(T_a)| + 1)|V(G_b)| - 1 = |V(G_a)||V(G_b)| - 1$  である。

$(x, y)$  を  $G_a \times G_b$  の頂点とする. もし  $y = r_b$  ならば,  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_a} (x, r_b)$  である. もし  $x = r_a$  かつ  $y \neq r_b$  ならば, パスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_a} (v_a, r_b) \xrightarrow{T_b} (v_a, y) \xrightarrow{T_a} (r_a, y)$  である.  $x \neq r_a$  かつ  $y \neq r_b$  かつ  $x \in V(S_a^i)$  とする. そのときのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_a} (s_a^i, r_b) \xrightarrow{T_b} (s_a^i, y) \xrightarrow{S_a^i} (x, y)$  である. 故に,  $V(G_a) \times V(G_b)$  での任意の頂点  $(x, y)$  に対して  $T_a(v_a) * T_b$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスが存在する. よって,  $T_a(v_a) * T_b$  は  $G_a \times G_b$  の全域木である.

対称的に  $T_a * T_b(v_b)$  も  $G_a \times G_b$  の全域木であることを証明することができる.  $\square$

**補題 2**  $T_1$  と  $T_2$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする独立な全域木とし,  $v_1$  を  $T_1$  での  $r_a$  の子,  $v_2$  を  $T_2$  での  $r_a$  の子とする.  $T_b$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とする.  $T_1(v_1) * T_b$  と  $T_2(v_2) * T_b$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

**証明:**  $T_1(v_1) * T_b$  と  $T_2(v_2) * T_b$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスを考える. もし  $x = r_a$  かつ  $y \neq r_b$  ならば, これらの 2本のパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_1} (v_1, r_b) \xrightarrow{T_b} (v_1, y) \xrightarrow{T_1} (r_a, y)$  と  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_2} (v_2, r_b) \xrightarrow{T_b} (v_2, y) \xrightarrow{T_2} (r_a, y)$  である.  $T_1$  と  $T_2$  は  $G_a$  の独立な全域木であるから,  $v_1 \neq v_2$  である. 故に, これらの 2本のパスは内素である. もし  $x \neq r_a$  かつ  $y = r_b$  ならば, これらの 2本のパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_1} (x, r_b)$  と  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_2} (x, r_b)$  である.  $T_1$  と  $T_2$  は  $G_a$  の独立な全域木であるから, これらの 2本のパスは内素である.  $x \neq r_a$  かつ  $y \neq r_b$  とする.  $x$  を  $T_1$  での  $r_a$  の子  $s_a^i$  を根とする部分木  $S_a^i$  での頂点かつ  $T_2$  での  $r_a$  の子  $s_a^j$  を根とする部分木  $S_a^j$  での頂点とする.  $T_1(v_1) * T_b$  と  $T_2(v_2) * T_b$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスはそれぞれ  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_1} (s_a^i, r_b) \xrightarrow{T_b} (s_a^i, y) \xrightarrow{S_a^i} (x, y)$  と  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_2} (s_a^j, r_b) \xrightarrow{T_b} (s_a^j, y) \xrightarrow{S_a^j} (x, y)$  である.  $T_1$  と  $T_2$  は  $G_a$  の独立な全域木であるから, これらの 2本のパスは内素である. 故に,  $T_1(v_1) * T_b$  と  $T_2(v_2) * T_b$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.  $\square$

補題 2 と同様に, 根から任意の頂点へのパスを調べることにより以下の 2つの補題が得られる.

**補題 3**  $T_a$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木とする.  $T_1$  と  $T_2$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする独立な全域木とし,  $v_1$  を  $T_1$  での  $r_b$  の子,  $v_2$  を  $T_2$  での  $r_b$  の子とする.  $T_a * T_1(v_1)$  と  $T_a * T_2(v_2)$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

**補題 4**  $T_{a,1}$  と  $T_{a,2}$  を  $G_a$  の独立な全域木とし,  $v_a$  を  $T_{a,1}$  での  $r_a$  の子とする.  $T_{b,1}$  と  $T_{b,2}$  を  $G_b$  の独立な全域木とし,  $v_b$  を  $T_{b,1}$  での  $r_b$  の子とする.  $T_{a,1}(v_a) * T_{b,2}$  と  $T_{a,2} * T_{b,1}(v_b)$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

$G_a$  を  $n_a$ -チャネルグラフ,  $G_b$  を  $n_b$ -チャネルグラフとする.  $T_{a,1}, \dots, T_{a,n_a}$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする  $n_a$  本の独立な全域木とし,  $T_{b,1}, \dots, T_{b,n_b}$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする  $n_b$  本の独立な全域木とする. 各  $i$  ( $1 \leq i \leq n_a$ ) に対して,  $v_{a,i}$  を  $T_{a,i}$  での  $r_a$  の子, 各  $j$  ( $1 \leq j \leq n_b$ ) に対して,  $v_{b,j}$  を  $T_{b,j}$  での  $r_b$  の子とする. 次の  $n_a + n_b$  本の全域木を考える:

$$T_{a,1}(v_{a,1}) * T_{b,1}, T_{a,2}(v_{a,2}) * T_{b,1}, \dots, T_{a,n_a}(v_{a,n_a}) * T_{b,1}$$

$$T_{a,1} * T_{b,1}(v_{b,1}), T_{a,1} * T_{b,2}(v_{b,2}), \dots, T_{a,1} * T_{b,n_b}(v_{b,n_b})$$

補題 2, 補題 3, 補題 4 から, 上の示された中で  $T_{a,1}(v_{a,1}) * T_{b,1}$  と  $T_{a,1} * T_{b,1}(v_{b,1})$  を除く  $n_a + n_b - 2$  本の木は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

本稿の目的は  $n_a$ -チャネルグラフと  $n_b$ -チャネルグラフの積グラフの同じ頂点を根とする  $n_a + n_b$  本の独立な全域木を構成することである. この目的のために全域木上の別の操作 "o" を紹介する.  $T_a$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木とし,  $T_b$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とする.  $v_a$  を  $T_a$  での  $r_a$  の子とする.  $T_a(v_a) \circ T_b$  の頂点集合は  $V(G_a \times G_b)$  であり, 辺集合は次の辺からなる:

- (1) 各  $x_1 x_2 \in E(T_a)$  に対して,  $(x_1, r_b)$  と  $(x_2, r_b)$  をつなぐ.
- (2) 各  $y_1 y_2 \in E(T_b)$  に対して,  $x \in V(T_a) - \{r_a\}$  ならば  $(x, y_1)$  と  $(x, y_2)$  をつなぐ.
- (3) 各  $y \in V(T_b) - \{r_b\}$  に対して,  $(r_a, y)$  と  $(v_a, y)$  をつなぐ.

$v_b$  を  $T_b$  での  $r_b$  の子とし,  $T_a \circ T_b(v_b)$  を対称的に構成する.

$T_a(v_a) \circ T_b$  と  $T_a \circ T_b(v_b)$  の例を図 3 に示す. ここで  $T_a, T_b, v_a, v_b$  は図 2 で与えられたものである.

補題 1 と同様に, 構成する辺の本数と  $(r_a, r_b)$  から任意の頂点へのパスを示すことによって次の補題を得る.

**補題 5**  $T_a$  と  $T_b$  をそれぞれ  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木,  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とし,  $v_a$  と  $v_b$  をそれぞれ  $T_a$  での  $r_a$  の子,  $T_b$  での  $r_b$  の子とする.  $T_a(v_a) \circ T_b$  と  $T_a \circ T_b(v_b)$  の各々は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする全域木である.

補題 2 と同様に以下の 3つの補題が得られる.

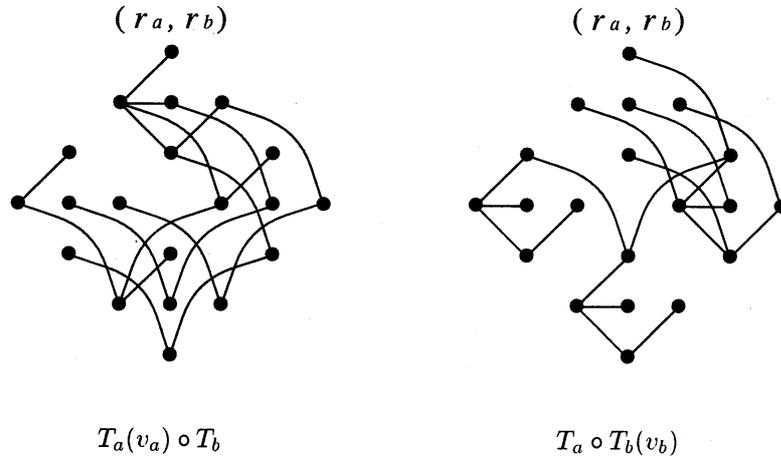


図 3:  $T_a(v_a) \circ T_b$  と  $T_a \circ T_b(v_b)$  の例

**補題 6**  $T_a$  と  $T_b$  をそれぞれ  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木と  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とする。  $v_a$  と  $v_b$  をそれぞれ  $T_a$  での  $r_a$  の子と  $T_b$  での  $r_b$  の子とする。  $T_a(v_a) \circ T_b$  と  $T_a \circ T_b(v_b)$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である。

**補題 7**  $T_1$  と  $T_2$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする独立な全域木とし、  $v_1$  と  $v_2$  をそれぞれ  $T_1$  での  $r_a$  の子と  $T_2$  での  $r_a$  の子とする。  $T_b$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とする。  $T_1(v_1) \circ T_b$  と  $T_2(v_2) * T_b$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である。

**補題 8**  $T_a$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木とする。  $T_1$  と  $T_2$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする独立な全域木とし、  $v_1$  と  $v_2$  をそれぞれ  $T_1$  での  $r_b$  の子と  $T_2$  での  $r_b$  の子とする。  $T_a \circ T_1(v_1)$  と  $T_a * T_2(v_2)$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である。

次の  $n_a + n_b$  本の  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする全域木を考える：

$$T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_{b,1}, T_{a,2}(v_{a,2}) * T_{b,1}, \dots, T_{a,n_a}(v_{a,n_a}) * T_{b,1}$$

$$T_{a,1} \circ T_{b,1}(v_{b,1}), T_{a,1} * T_{b,2}(v_{b,2}), \dots, T_{a,1} * T_{b,n_b}(v_{b,n_b})$$

これらの全域木はこの節での前回の  $n_a + n_b$  本の全域木での  $T_{a,1}(v_{a,1}) * T_{b,1}$  と  $T_{a,1} * T_{b,1}(v_{b,1})$  をそれぞれ  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_{b,1}$  と  $T_{a,1} \circ T_{b,1}(v_{b,1})$  に置き換えたものである。これらの全域木の集合はまだ  $G_a \times G_b$  の独立な全域木ではない。  $n_a + n_b$  の独立な全域木を構成するためにさらに修正を必要とする。

### 3 独立全域木の構成

$T_{a,1}, \dots, T_{a,n_a}$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする  $n_a$  本の独立な全域木とし、  $T_b$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする全域木とする。各  $i$  ( $1 \leq i \leq n_a$ ) に対して、  $k_a^i$  を  $T_{a,i}$  での  $r_a$  の子の数とし、  $C_{a,i} = \{s_{a,i}^1, \dots, s_{a,i}^{k_a^i}\}$  を  $T_{a,i}$  での  $r_a$  の子の集合とする。  $C_a = C_{a,1} \cup C_{a,2} \cup \dots \cup C_{a,n_a}$  とする。各  $v \in V(T_{a,1}) - \{r_a\}$  に対して、  $p_{a,1}(v)$  を  $T_{a,1}$  での  $v$  の親とする。

$T_{a,1}$  の変形  $var(T_{a,1})$  は頂点集合  $V(T_{a,1})$ 、辺集合  $E(T_{a,1}) \cup \{r_a x \mid x \in C_a - C_{a,1}\} - \{p_{a,1}(x)x \mid x \in C_a - C_{a,1}\}$  のグラフである。  $p_{a,1}(x)x$  は  $G_a$  での  $p_{a,1}(x)$  と  $x$  をつなぐ辺であり、  $r_a x$  は  $G_a$  での  $r_a$  と  $x$  をつなぐ辺である。明らかに  $var(T_{a,1})$  も  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木である。  $var(T_{a,1})$  と  $var(T_{b,1})$  の例を図 4 に示す。

$T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b$  を修正する。ここで  $v_{a,1}$  は  $T_{a,1}$  での  $r_a$  の子の 1 つである。各  $x \in C_{a,i}$  ( $2 \leq i \leq n_a$ ) と各  $y_1 y_2 \in E(T_b)$  に対して、  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b$  の辺  $(x, y_1)(x, y_2)$  も  $T_{a,i}(v_{a,i}) * T_b$  で使われている。各  $x \in C_a - C_{a,1}$  と各  $y_1 y_2 \in E(T_b)$  に対して、  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b$  から辺  $(x, y_1)(x, y_2)$  を削除し、各  $x \in C_a - C_{a,1}$  と各  $y \in V(G_b) - \{r_b\}$  に対して、辺  $(p_{a,1}(x), y)(x, y)$  を加える。この修正を変換と呼ぶ。変換によって  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_{b,1}$  から得られたグラフを  $tr(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b)$  とする。より形式的に、  $tr(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b)$  は頂点集合  $V(G_a \times G_b)$  と次の辺集合からなるグラフである：

$$E(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b) \cup \{(p_{a,1}(x), y)(x, y) \mid x \in C_a - C_{a,1}, y \in V(G_b) - \{r_b\}\}$$

$$- \{(x, y_1)(x, y_2) \mid x \in C_a - C_{a,1}, y_1 y_2 \in E(T_b)\}$$

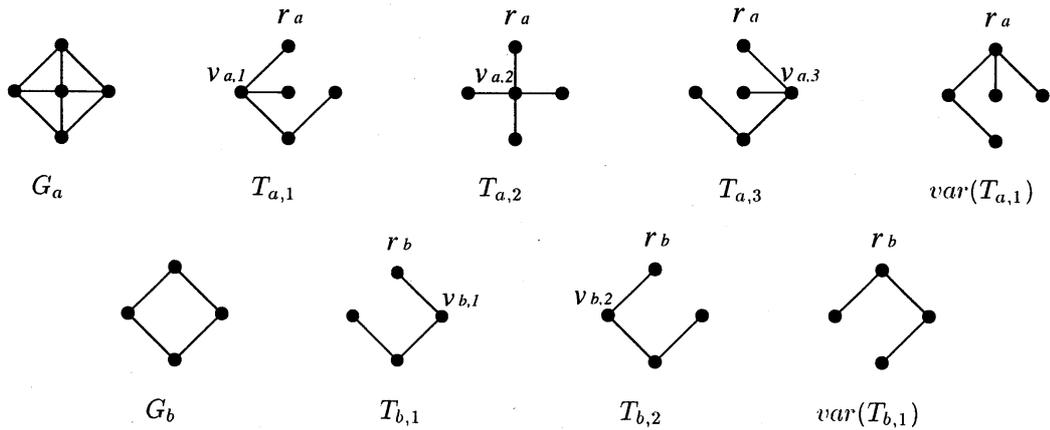


図 4:  $var(T_{a,1})$  と  $var(T_{b,1})$  の例

各  $x \in C_a - C_{a,1}$  と各  $y \in V(G_b) - \{r_b\}$  に対して,  $p_{a,1}(x)$  は  $T_{a,1}$  の辺であるから,  $(p_{a,1}(x), y)(x, y)$  は  $G_a \times G_b$  の辺である.  $tr(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ T_b)$  の構成から, それも  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする全域木である.

$T_{b,1}, \dots, T_{b,n_b}$  を  $G_b$  の  $r_b$  を根とする  $n_b$  本の独立な全域木とし,  $T_a$  を  $G_a$  の  $r_a$  を根とする全域木とする. 各  $i$  ( $1 \leq i \leq n_b$ ) に対して,  $k_b^i$  を  $T_{b,i}$  での  $r_b$  の子の数とし,  $C_{b,i} = \{s_{b,i}^1, \dots, s_{b,i}^{k_b^i}\}$  を  $T_{b,i}$  での  $r_b$  の子の集合とする.  $C_b = C_{b,1} \cup C_{b,2} \cup \dots \cup C_{b,n_b}$  とする. 各  $v \in V(T_{b,1}) - \{r_b\}$  に対して,  $p_{b,1}(v)$  を  $T_{b,1}$  での  $v$  の親とする. 対称的に  $var(T_{b,1})$  と  $tr(T_a \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  を定義する. ここで  $v_{b,1}$  を  $T_{b,1}$  での  $r_b$  の子の 1 つとする.

$T_{a,1}(v_{a,1}) \circ var(T_{b,1})$  と  $tr(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ var(T_{b,1}))$  の例を図 5 に示す. ここで  $T_{a,1}, T_{b,1}, v_{a,1}$  は図 4 で与えられたものである.

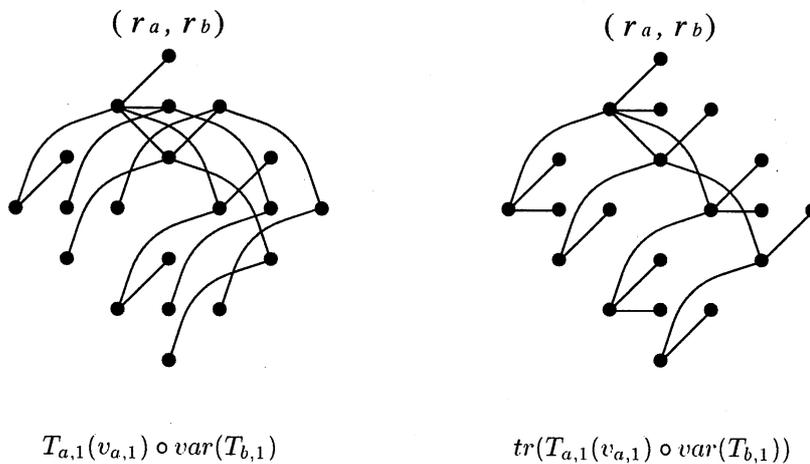


図 5:  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ var(T_{b,1})$  と  $tr(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ var(T_{b,1}))$  の例

$G_a$  を  $n_a$ -チャネルグラフ,  $G_b$  を  $n_b$ -チャネルグラフとする. 次の  $n_a + n_b$  のグラフを考える:

$$tr(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ var(T_{b,1})), T_{a,2}(v_{a,2}) * var(T_{b,1}), \dots, T_{a,n_a}(v_{a,n_a}) * var(T_{b,1})$$

$$tr(var(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1})), var(T_{a,1}) * T_{b,2}(v_{b,2}), \dots, var(T_{a,1}) * T_{b,n_b}(v_{b,n_b}),$$

ここで各  $i$  ( $1 \leq i \leq n_a$ ) に対して,  $v_{a,i}$  は  $T_{a,i}$  での  $r_a$  の子の 1 つであり, 各  $j$  ( $1 \leq j \leq n_b$ ) に対して,  $v_{b,j}$  は  $T_{b,j}$  での  $r_b$  の子の 1 つである. 補題 1, 補題 5 と以上の議論から, これらのグラフは  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする  $n_a + n_b$  本の全域木である. これらの  $n_a + n_b$  本の全域木が  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木であることを示す.

**補題 9** 各  $i$  ( $2 \leq i \leq n_a$ ) と各  $j$  ( $2 \leq j \leq n_b$ ) に対して,  $T_{a,i}(v_{a,i}) * var(T_{b,1})$  と  $var(T_{a,1}) * T_{b,j}(v_{b,j})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

証明: 補題 4 より,  $T_{a,i}(v_{a,i}) * T_{b,1}$  と  $T_{a,1} * T_{b,j}(v_{b,j})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.  $T_{a,i}(v_{a,i}) * T_{b,1}$  と  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスを考える. もし前者のパスが  $s \in C_{a,i}$  かつ  $t \in C_b - C_{b,1}$  であるような任意の頂点  $(s, t)$  を含まないならば, これらの 2 本のパスは同じである. 前者のパスが  $s \in C_{a,i}$  かつ  $t \in C_b - C_{b,1}$  であるような頂点  $(s, t)$  を含んでいるとする.  $x$  を  $S_{a,i}^h$  ( $T_{a,i}$  の  $s_{a,i}^h$  を根とする部分木) 内の頂点とする. 前者のパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{a,i}} (s_{a,i}^h, r_b) \xrightarrow{T_{b,1}} (s_{a,i}^h, t) \xrightarrow{T_{b,1}} (s_{a,i}^h, y) \xrightarrow{S_{a,i}^h} (x, y)$  である. 一方, 後者のパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{a,i}} (s_{a,i}^h, r_b) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (s_{a,i}^h, t) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (s_{a,i}^h, y) \xrightarrow{S_{a,i}^h} (x, y)$  である.  $(s_{a,i}^h, t) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (s_{a,i}^h, y)$  と  $(s_{a,i}^h, t) \xrightarrow{T_{b,1}} (s_{a,i}^h, y)$  は同じパスであるから, 後者のパスは前者のパスから  $(s_{a,i}^h, r_b) \xrightarrow{T_{b,1}} (s_{a,i}^h, t)$  を削除し, 辺  $(s_{a,i}^h, r_b)(s_{a,i}^h, t)$  を加えることによって得られる. 辺  $(s_{a,i}^h, r_b)(s_{a,i}^h, t)$  は  $\text{var}(T_{a,1}) * T_{b,j}(v_{b,j})$  において使われていない.  $T_{a,1} * T_{b,j}(v_{b,j})$  と  $\text{var}(T_{a,1}) * T_{b,j}(v_{b,j})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスに対して, 同様に適用することができる. 故に, 各  $(x, y) \in V(G_a \times G_b)$  に対して,  $T_{a,1}(v_{a,1}) * \text{var}(T_{b,1})$  と  $\text{var}(T_{a,1}) * T_{b,1}(v_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは内素である. よって,  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  と  $\text{var}(T_{a,1}) * T_{b,j}(v_{b,j})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.  $\square$

次の 3 つの補題の証明を容易にするために関数  $A_{a,1}$  と  $A_{b,1}$  を定義する.  $p_{a,1}(v)$  と  $p_{b,1}(v)$  はそれぞれ  $T_{a,1}$  と  $T_{b,1}$  での  $v$  の親である. 各  $v \in V(T_{a,1}) - \{r_a\}$  に対して,

$$A_{a,1}(v) = \begin{cases} A_{a,1}(p_{a,1}(v)) & \text{if } v \in C_a - C_{a,1} \\ v & \text{if } v \notin C_a - C_{a,1}. \end{cases}$$

同様に,  $A_{b,1}(v)$  を定義する.

補題 10  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  と  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

証明: 補題 5 と補題 7 の同様の議論より,  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1})$  と  $\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  と  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスを考える. もし  $x \notin C_a - C_{a,1}$  かつ  $y \notin C_b - C_{b,1}$  ならば,  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  と  $T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは同じであり,  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  と  $\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは同じである. 故に, この場合において  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  と  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは内素である. もし  $x \notin C_a - C_{a,1}$  かつ  $y \in C_b - C_{b,1}$  ならば,  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{a,1}} (x, r_b) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (x, y)$  であり,  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{b,1}} (r_a, A_{b,1}(y)) \xrightarrow{\text{var}(T_{a,1})} (x, A_{b,1}(y)) \xrightarrow{T_{b,1}} (x, y)$  である. これらの 2 本のパスは内素である. もし  $x \in C_a - C_{a,1}$  かつ  $y \in C_b - C_{b,1}$  ならば,  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{a,1}} (A_{a,1}(x), r_b) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (A_{a,1}(x), y) \xrightarrow{T_{a,1}} (x, y)$  であり,  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{b,1}} (r_a, A_{b,1}(y)) \xrightarrow{\text{var}(T_{a,1})} (x, A_{b,1}(y)) \xrightarrow{T_{b,1}} (x, y)$  である. これらのパスも内素である. よって  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  と  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.  $\square$

補題 9, 補題 10 の証明と同様の議論から以下の 2 つの補題が得られる.

補題 11 各  $i$  ( $2 \leq i \leq n_a$ ) に対して,  $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,1}))$  と  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

補題 12 各  $j$  ( $2 \leq j \leq n_b$ ) に対して,  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  と  $\text{var}(T_{a,1}) * T_{b,j}(v_{b,j})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

補題 13 各  $i$  ( $1 \leq i \leq n_a$ ) に対して,  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  と  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である.

証明:  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  と  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスを考える.  $x = r_a$  または  $y = r_b$  ならば, これらの 2 つのパスが内素であることは明らかである.  $x \notin C_a \cup \{r_a\}$  かつ  $y \notin C_b \cup \{r_b\}$  かつ  $x$  を部分木  $S_{a,i}^h$  内の頂点とする. これらの 2 つのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{b,1}} (r_a, y) \xrightarrow{\text{var}(T_{a,1})} (x, y)$  と  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{a,i}} (s_{a,i}^h, r_b) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (s_{a,i}^h, y) \xrightarrow{S_{a,i}^h} (x, y)$  である.  $T_{a,1}$  と  $T_{a,i}$  は  $G_a$  の  $r_a$  を根とする独立な全域木であるから,  $(r_a, y) \xrightarrow{\text{var}(T_{a,1})} (x, y)$  と  $(s_{a,i}^h, y) \xrightarrow{T_{a,i}} (x, y)$  は  $(x, y)$  を除く共通の頂点をもたない. 故に, この場合において  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  と  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは内素である.  $y \in C_{b,1}$  ならば, 以上と同様に適用することができ, この場合においても 2 つのパスは内素である.  $y \in C_b - C_{b,1}$  かつ  $x$  を部分木  $S_{a,i}^h$  内の頂点とする.  $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$  へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{b,1}} (r_a, A_{b,1}(y)) \xrightarrow{\text{var}(T_{a,1})} (x, A_{b,1}(y)) \xrightarrow{T_{b,1}} (x, y)$  であり,  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  での  $(r_a, r_b)$  から  $(x, y)$

へのパスは  $(r_a, r_b) \xrightarrow{T_{a,i}} (s_{a,i}^h, r_b) \xrightarrow{\text{var}(T_{b,1})} (s_{a,i}^h, y) \xrightarrow{S_{a,i}^h} (x, y)$  である。故に、これらの2つのパスも内素である。よって、 $\text{tr}(\text{var}(T_{a,1}) \circ T_{b,1}(v_{b,1}))$  と  $T_{a,i}(v_{a,i}) * \text{var}(T_{b,1})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である。□

対称的に、次の補題が得られる。

**補題 14** 各  $j$  ( $1 \leq j \leq n_b$ ) に対して、 $\text{tr}(T_{a,1}(v_{a,1}) \circ \text{var}(T_{b,j}))$  と  $\text{var}(T_{a,1}) * T_{b,j}(v_{b,j})$  は  $G_a \times G_b$  の  $(r_a, r_b)$  を根とする独立な全域木である。

**定理 1**  $G_a$  が  $n_a$ -チャネルグラフ、 $G_b$  が  $n_b$ -チャネルグラフならば、 $G_a \times G_b$  は  $(n_a + n_b)$ -チャネルグラフである。

証明: 補題 2-4 と 補題 9-14 より直接得られる。□

## 4 結言

$n_a$ -チャネルグラフ  $G_a$  と  $n_b$ -チャネルグラフ  $G_b$  の積グラフの  $n_a + n_b$  本の独立な全域木の構成を  $G_a$  の  $n_a$  本の独立な全域木と  $G_b$  の  $n_b$  本の独立な全域木から示した。故に、各  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) に対して、 $G_i$  の  $n_i$  本の独立な全域木が与えられるならば、その構成を何度も適用することで  $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$  の  $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$  本の独立な全域木を構成することができる。情報源の頂点からグラフの  $n$  本の独立な全域木に沿ってメッセージの複数のコピーを送るブロードキャストスキームは効率が良い。実際にその通信量は  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$  個の Byzantine タイプの故障まで耐えられるのに最適である。

もし一般のグラフについて考えるならば次の2つの問題は本稿のアプローチから生じる。

- (1) 任意のグラフの同じ頂点を根とする独立な全域木をどのように構成することができるか？ これは非常に困難な問題である。全ての  $n$ -連結グラフが  $n$ -チャネルグラフであるかどうかは未解決問題である。この問題は  $k \leq 3$  についてのみ解かれている [3][4][7]。さらに、たとえグラフのいくつかのクラスの独立な全域木を構成する方法が分かったとしても、その方法によって得られる独立な全域木が良い特徴を持っていないかもしれない。実用的には、規則性のある構造をもった高さの低い全域木が望ましい。
- (2) 独立全域木でのメッセージ伝達をもとにした効率の良いブロードキャストスキームプロトコルを、特に1ポートブロードキャストスキームに対してどのように設計するかという問題が考えられる。そのようなブロードキャストスキームは独立な全域木の各々を通過するサブブロードキャストからなっているので、各頂点が短時間のブロードキャストをどのように達成するかというヒントは今までの研究ではほとんど得られない。

これらの問題はさらなる研究に値するものである。

## 参考文献

- [1] F. Bao, Y. Igarashi, and K. Katano, Broadcasting in hypercubes with randomly distributed Byzantine faults, 9th International Workshop on Distributed Algorithms, Le Mont-Saint-Michel, LNCS vol.972, pp.215-229, 1995.
- [2] F. Bao, Y. Igarashi, and S. R. Öhring, Reliable broadcasting in product networks, IEICE Technical Report COMP 95-18, pp.57-66, 1995.
- [3] J. Cheriyan and S. N. Maheshwari, Finding nonseparating induced cycles and independent spanning trees in 3-connected graphs, J. Algorithms vol.9, pp.507-537, 1988.
- [4] A. Itai and M. Rodeh, The multi-tree approach to reliability in distributed networks, Information and Computation, vol.79, pp.43-59, 1988.
- [5] S. Khuller and B. Schieber, On independent spanning trees, Information Processing Letters, vol.42, pp.321-323, 1992.
- [6] A. Youssef, Cartesian product networks, the 1991 International Conference on Parallel Processing, vol. I, pp. 684-685, 1991.
- [7] A. Zehavi and A. Itai, Three tree-paths, J. Graph Theory, vol.13, pp.175-188, 1989.