数理解析研究所講究録
951 巻 1996 年 94-100

A bifurcation problem of some nonlinear degenerate elliptic equations

徳島大・工　深貝 暢良　(FUKAGAI, Nobuyoshi)
徳島大・総　伊藤 正幸　(ITO, Masayuki)
鳴門教育大　成川 公昭　(NARUKAWA, Kimiaki)

§1. Introduction.

一般に物理的に起こる現象の多くは適当なエネルギー汎関数の最小化によって記述されることが知られており，その手続きを述べた「最小作用の原理」は現象の数学的な定式化を得るのに極めて有用なことが認められている．これによって時間変化を伴う運動の方程式が容易に導かれ，それと共に定常的な状態を示す方程式を得ることもできる．

変分原理を用いて得られる個別の問題は数多く挙げられるであろうが，特に幾何学図形を意識させる典型的な定常問題の中から普段身近に経験するものとして，例えば capillary tube，sessile drop，pendent liquid drop，soap film 等の表面張力に関わる現象をみると，これらは面積汎関数に他の付帯要素を加えた形のエネルギー汎関数によって特徴づけられるために，表面積の最小化に際して得られる極小曲面方程式との兼ね合いで古くから数学的な興味が持たれ続けてきた．

いうまでもなく古典力学や工学では一般に弾性力学の一部分として扱われるべき事柄である．その意識の下で表面張力が一定な現象との対比として我々は表面膜に弾性を仮定した場合の比較的簡単なモデル作りを試みたところ，有界領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ で定義された非負関数 $u \in W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ についてのエネルギー汎関数

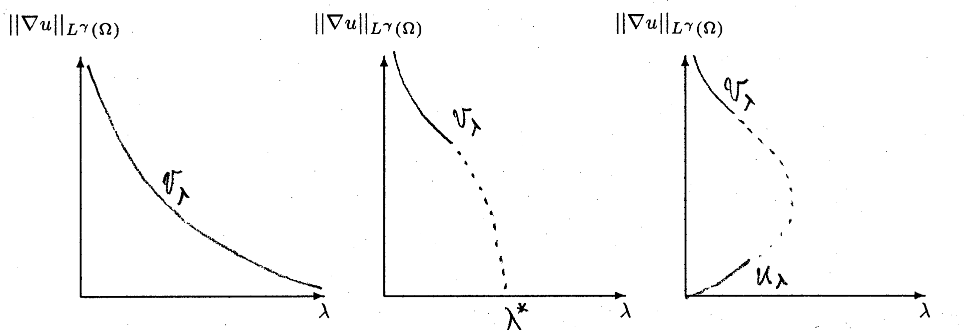
$$I_\lambda[u] = \int_\Omega \left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}-1\right)^\gamma dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \qquad (\gamma > 1) \tag{1}$$

を最小化する問題に至り，極値の特徴付けをするために $f(x,u) = \dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u)$ として対応する Euler 方程式

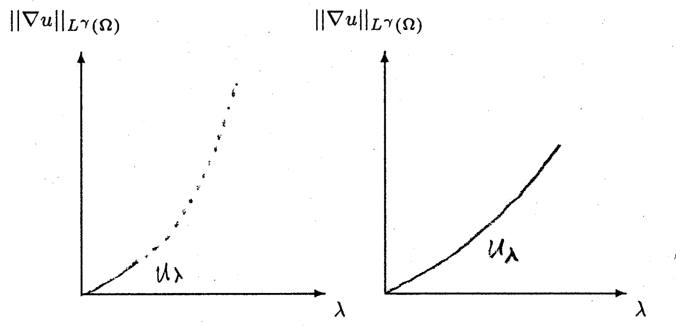
$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\gamma\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}-1\right)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u\right) = \lambda f(x,u) \quad \text{in} \quad \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

を調べ始めた．これは退化楕円型の非線形問題であるから，かなり都合の良い適当な条件付けの下でないと具体的な解の様子をはっきりと把握することは期待できない．

手始めに $\Phi(t)=\left(\sqrt{1+t^{2/\gamma}}-1\right)^{\gamma}$ が $t\geq 0$ の凸関数であることに着目して，非負な解の集合 $\mathcal{S}_+$ の $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ における大局的な構造をみると，$t\to +0$ または $t\to +\infty$ のとき $\Phi(t)/F(x,t)\to 0$ あるいは $F(x,t)/\Phi(t)\to 0$ ならば（部分的にではあるが）ある程度までは弱解の存在および λ に関する依存関係を調べることができる．一例として $F(x,u)=u^q$ をとれば，$\gamma^*=\frac{N\gamma}{N-\gamma}$ $(1<\gamma<N)$, $\gamma^*=\infty$ $(\gamma\geq N)$ とおいて $1<q<\gamma^*$ のときに得られる結果は概ねつぎの図の実線ように描かれる．[5]（ただし，u_λ, v_λ はそれぞれ (1) の安定または不安定な critical point とする．）



(i) $1<\gamma<q/2$　　(ii) $\gamma=q/2$　　(iii) $q/2<\gamma<q$



(点線は予想)

(iv) $\gamma=q$　　(v) $\gamma>q$

この図で残された部分を埋めるために [4] では領域 $\Omega=B_1(0)$ が単位球のとき $\gamma=q/2$ について自明解 $u=0$ の近くに非自明な解が得られることを示した．そこで調べたように，領域が球の場合には常微分方程式を解くと球対称な解がみつかるため，解の構成手続きを陰関数定理に持ち込むための適当な関数空間の設定が可能で，球対称解の分岐を比較的容易に導くことができたのである．それとは別の立場として今回は弱解 u に対する ∇u の $L^\infty(\Omega)$ 評価を導き完全連続作用素に対する Leray-Schauder の写像度を適用することにより，対称性の仮定をはずした一般領域での結果が得られることを述べる．

§2. Main result.

Ω を $\boldsymbol{R}^N$ の有界領域，$\partial\Omega$ はなめらかとして非線形な楕円型方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) + f(\lambda, x, u) = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

を (λ, u) についての方程式とみなす．特に斉次性をもたせて

$$\phi(t) = t^{p-2}, \quad f(\lambda, x, s) = \lambda |s|^{p-2} s$$

とした場合に

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

の非自明な解 u を持つような λ の値をさがすことは p-Laplacian の固有値問題といわれ，$p > 1$ ならば第 1 固有値 $\lambda = \lambda_*$ が単純で孤立していることが知られている．(Anane [1], Sakaguchi [10] および Lindqvist [7, 8])

ここでは (3) の非自明解を得るために ϕ, f についてつぎの仮定を用意する．

(A0) $p \geq 2$ とする．

(A1) ある $T > 0$ がとれて $\phi(t) \in C^0[0, T) \cap C^1(0, T)$ とする．

(A2) $\displaystyle\lim_{t \to +0} \frac{\phi(t) + t\phi'(t)}{(p-1)\, t^{p-2}} = 1$ が存在する．

(A3) $f(\lambda, x, s) \in C^1(\Lambda \times \Omega \times I)$ とする．但し，Λ と I はそれぞれ $\lambda = \lambda_*$ と $s = 0$ の $\boldsymbol{R}$ における近傍である．

(A4) $\displaystyle\lim_{s \to +0} \frac{f(\lambda, x, s)}{|s|^{p-2} s} = \lambda$ が $(\lambda, x) \in \Lambda \times \Omega$ に対して一様に収束する．

このとき (3) の弱解 $(\lambda, u) \in \Lambda \times W_0^{1,p}(\Omega)$ の全体を $\mathcal{S}$ とし，$\Lambda \times W_0^{1,p}(\Omega)$ の直積位相の下で $(\lambda_0, 0)$ が集合 $\mathcal{S}$ の集積点であるならば $\lambda = \lambda_0$ を (3) の分岐点とよぶことにすると，つぎの結果が得られる．

Theorem 1. 仮定 (A0)–(A4) の下で (4) の第 1 固有値 $\lambda = \lambda_*$ は (3) の分岐点である．

§3. Outline of the proof.

この節では証明のあらすじを述べることにする.

$\boxed{\text{第1段}}$ ϕ, f を拡張してつぎの (B1), (B2), (B3) をみたすように $\tilde{\phi}$, $\tilde{f}$ を作る.

(B1) $\tilde{\phi}|_{[0,T_0)} = \phi,\ \tilde{f}|_{\Lambda\times\Omega\times I} = f \quad (0 < \exists T_0 < T)$

(B2) $\tilde{\phi} \in C^0[0,\infty) \cap C^1(0,\infty)$ であって

$$\tilde{c}_1 t^{p-2} \le \tilde{\phi}(t) + t\tilde{\phi}'(t) \le \tilde{c}_2 t^{p-2}, \qquad \tilde{c}_3 t^{p-2} \le \tilde{\phi}(t) \le \tilde{c}_4 t^{p-2},$$

$$|\tilde{\phi}'(t)| \le \tilde{c}_5 t^{p-3} \quad \text{on } [0,\infty)$$

ただし，$\tilde{c}_i > 0\ (i = 1, ..., 5)$ は定数とする.

(B3) $\tilde{f}(\lambda, x, s) \in C^1(\Lambda \times \Omega \times \boldsymbol{R})$ は有界

$\boxed{\text{第2段}}$ $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ に方程式 $-\operatorname{div}(\tilde{\phi}(|\nabla u|)\nabla u) = h$ in Ω, $u = 0$ on $\partial\Omega$ の弱解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ を対応させて連続な作用素 $R_{\tilde{\phi}}(h) = u$ を考え，さらに $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して $F(\lambda, u)(x) = \tilde{f}(\lambda, x, u(x))$ で Nemyckii operator を定めておくと，修正した問題

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\tilde{\phi}(|\nabla u|)\nabla u) + \tilde{f}(\lambda, x, u) = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

が方程式 $u = R_{\tilde{\phi}}(F(\lambda, u))$ と同等になるために，作用素 $R_{\tilde{\phi}}(F(\lambda, \cdot))$ の不動点が問題となる. ここで $1 < r < p^*$ とすれば埋め込み $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ および $L^{r'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ のコンパクト性と $F(\lambda, \cdot) : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ の連続性から $R_{\tilde{\phi}}(F(\lambda, \cdot)) : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ は完全連続な作用素となるので，この問題に Leray-Schauder の写像度を適用することができる.

$$\begin{tikzcd} L^r(\Omega) \arrow[r, "F(\lambda,\cdot)", "\text{continuous}"'] & L^{r'}(\Omega) \arrow[d, "\substack{\text{compact} \\ \text{embedding}}"] & \\ W_0^{1,p}(\Omega) \arrow[u, "\substack{\text{compact} \\ \text{embedding}}"] \arrow[r, "F(\lambda,\cdot)", "\text{(compl. conti.)}"'] & W^{-1,p'}(\Omega) \arrow[r, "R_{\tilde{\phi}}", "\text{continuous}"'] & W_0^{1,p}(\Omega) \end{tikzcd} \qquad (1 < r < p^*) \tag{6}$$

$\boxed{\text{第3段}}$ 修正した境界値問題 (5) の弱解について u および ∇u の一様評価を行なう. そのとき u の評価は比較的容易で Lindqvist [8] にしたがって Ladyzhenskaya-Ural'tseva [9,

p. 71] の Lemma 5.1 を適用すればよく，∇u の評価は手間が掛かるが DiBenedetto [3] と Tolksdorf [11] の手続きを見直すことで得られる．ここでは結果のみを書いておこう．

Proposition 1. $\{(\lambda_n, u_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda \times W_0^{1,p}(\Omega)$ は方程式 (5) の弱解の列とする．このとき，

(i) $||\nabla u_n||_{L^p(\Omega)}$ が有界ならば $||u_n||_{L^\infty(\Omega)}$ および $||\nabla u_n||_{L^\infty(\Omega)}$ も有界である．

(ii) $||\nabla u_n||_{L^p(\Omega)} \to 0$ ならば $||u_n||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ および $||\nabla u_n||_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ が導かれる．

さらに，この命題を用いるとつぎが判る．

Proposition 2. $(\lambda_0, 0) \in \Lambda \times W_0^{1,p}(\Omega)$ が (3) の分岐点ならば λ_0 は (4) の固有値である．

$\boxed{\text{第 4 段}}$ 以上の準備の下で Leray-Schauder の写像度を用いて (4) の第 1 固有値 λ_* が (3) の分岐点であることが示される．以下の証明では背理法を適用する．

はじめに，

$$\psi_\mu(t) = \mu\tilde{\phi}(t) + (1-\mu)t^{p-2} \quad (0 \le \mu \le 1)$$

$$F_\mu(\lambda, u)(x) \equiv f_\mu(\lambda, x, u) = \mu\tilde{f}(\lambda, x, s) + (1-\mu)\lambda|s|^{p-2}s$$

として $(\lambda, v) \in \Lambda \times W_0^{1,p}(\Omega)$ に対し $H_\lambda^\mu(v) = R_{\psi_\mu}(F_\mu(\lambda, v))$ とおく．すなわち，$u = H_\lambda^\mu(v)$ を方程式

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\psi_\mu(|\nabla u|)\nabla u) + f_\mu(\lambda, x, v) = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

の弱解で定義する．そこで，定理の結果を否定すると

$$\begin{aligned} &\exists\varepsilon > 0,\ \exists\delta_0 > 0 \quad \text{s.t.} \\ &|\lambda - \lambda_*| \le \varepsilon,\ ||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \le \delta_0,\ u - H_\lambda^1(u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \equiv 0 \end{aligned} \tag{8}$$

であるから，写像度の性質として

$$u - H_\lambda^1(u) \ne 0 \quad \text{on} \quad \partial B_\delta(0) \quad (\subset W_0^{1,p}(\Omega)) \tag{9}$$

$$\deg_{W_0^{1,p}(\Omega)}(I - H_\lambda^1, B_\delta(0), 0) = \text{const.} \tag{10}$$

が $0<\delta\le\delta_0$, $|\lambda-\lambda_*|\le\varepsilon$ で成り立つ.

一方, (4) の第 1 固有値は単純で孤立しているから $\varepsilon>0$ をあらかじめ十分小さくとっておくことにより $|\lambda-\lambda_*|\le\varepsilon$ をみたす固有値は $\lambda=\lambda_*$ のみであるとしてよいことに注意すると, $\lambda_\pm=\lambda_*\pm\varepsilon$ については

$$\exists\delta_{\lambda_\pm}>0 \quad \text{s.t.} \quad u-H^\mu_{\lambda_\pm}(u)\neq 0 \quad \text{on} \quad \partial B_{\delta_\pm}(0)\setminus\{0\} \tag{11}$$

が示される. なぜならば, 逆にもし $\mu=\mu_n$ および $u=u_n$ がそれぞれ $\lambda=\lambda_\pm$ に対する (4) の固有値および固有関数であって

$$\mu_n\to\mu_0\in[0,1], \quad u_n(\neq)\to 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

とするならば Proposition 1 を用いた若干の議論により

$$w_n=\frac{u_n}{||\nabla u_n||_{L^p(\Omega)}}\overset{\text{subseq.}}{\to}\exists w_0\neq 0 \quad \text{in } W_0^{1,p}(\Omega)$$

が導かれ, $\lambda=\lambda_\pm$ は (4) の固有値, w_0 は対応する固有関数となるが, これは $|\lambda-\lambda_*|\le\varepsilon$ での固有値が λ_* のみであるようにしたことと矛盾するからである.

したがって, 写像度のホモトピー不変性と Del Pino-Manásevich [2, Prop. 2.2] により $0\le\mu\le 1$ ならば

$$\begin{aligned}\deg_{W_0^{1,p}(\Omega)}(I-H^\mu_{\lambda_\pm},B_{\delta_{\lambda_\pm}}(0),0) &= \deg_{W_0^{1,p}(\Omega)}(I-H^0_{\lambda_\pm},B_{\delta_{\lambda_\pm}}(0),0)\\ &= \begin{cases}1 & (\lambda_+=\lambda_*+\varepsilon)\\ -1 & (\lambda_-=\lambda_*-\varepsilon)\end{cases}\end{aligned} \tag{12}$$

を得るが, これは $\mu=1$ のとき (10) と矛盾する.

最後に (5) は $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ が小さければ Proposition 1 と (B1) から (3) に一致することに注意して Theorem 1 の証明を終える.

Remark 1. 境界値問題 (3) について $\phi(t)=1$ の場合に Laplacian の固有値で非自明解が分岐することは以前からよく知られている. Del Pino-Manásevich [2] はその結果を拡張して主要部が p-Laplacian (i.e. $\phi(t)=t^{p-2}$) の場合を扱った. さらに我々は主要部の摂動を加えたわけである.

Remark 2. p-Laplacian の固有値問題に関しては [1, 7, 8, 10] の他にも多くの文献がある.

References

[1] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valueur propre du p-laplacien avec poids*, C.R. Acad. Sci., Paris, 305, Sér. 1 (1987), 725–738.

[2] M. A. Del Pino and R. F. Manásevich, *Global bifurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian*, J. Differential Equations, 92 (1991), 226–251.

[3] E. DiBenedetto, *$C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal., 7 (1983), 827–850.

[4] N. Fukagai, M. Ito and K. Narukawa, *Bifurcation of radially symmetric solutions of degenerate quasilinear elliptic equations*, Diff. Int. Equations, 8 (1995), 1709–1732.

[5] N. Fukagai and K. Narukawa, *Nonlinear eigenvalue problem for a model equation of an elastic surface*, Hiroshima Math. J., 25 (1995), 19–41.

[6] N. Fukagai and K. Narukawa, *On a model equation of one-dimensional elasticity*, Adv. Math. Sci. Appl., (1996), to appear.

[7] P. Lindqvist, *On the equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$*, Proc. Amer. Math. Soc., 109 (1990), 157–164.

[8] P. Lindqvist, *Addendum to "On the equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$"*, Proc. Amer. Math. Soc., 116 (1992), 583–584.

[9] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press, New York-London, 1968.

[10] S. Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., Seire IV, 14 (1987), 403–421.

[11] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. in Partial Differential Equations, 8 (1983), 773–817.