数理解析研究所講究録
951 巻 1996 年 76-84

Nehari's principle and the critical exponent

鳴門教育大　成川　公昭　(NARUKAWA, Kimiaki)
大阪大・理　鈴木　貴　(SUZUKI, Takashi)

1 Introduction

半線形楕円型境界値問題

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}
$$

について考える. ここで, Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ の有界領域, 非線形項 f は

$$
f(x,u) = a(x)u + g(x,u), \quad a(x) \in L^\infty(\Omega), \quad g(x,u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})
$$

なる形であり次の条件 (f1)~(f3) をみたすものとする.

<u>$f(x,u)$ に対する仮定</u>

(f1) ある定数 $\delta > 0$ が存在し, 不等式

$$
\int_\Omega \{|\nabla v|^2 - a(x)v^2\}dx \geq \delta \int_\Omega |\nabla v|^2 dx
$$

が任意の $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して成り立つ.

(f2) $g(x,u)$ は u に関し奇関数であり, x に関し一様に

$$
g(x,u) = o(u) \quad \text{as} \quad u \to 0.
$$

更に, ある定数 $c > 0$ が存在し, $u > 0$ に対し不等式

$$
0 < g(x,u) \leq c\left(u^{\frac{n+2}{n-2}} + 1\right)
$$

が成り立つ.

(f3) 任意の $u > 0$ と $x \in \Omega$ に対して

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{g(x,u)}{u}\right] > 0
$$

が成り立つ.

仮定 (f2) における不等式は $f(x,u)$ がソボレフの埋蔵定理に於ける限界指数を巾に持つ場合を含んでいることに注意する．この問題に関しては, Brezis-Nirenberg [3] が $g(x,u) = u^{\frac{n+2}{n-2}} + o(u^{\frac{n+2}{n-2}})$, $u \to \infty$ の場合に峠の補題を用いて解析を行い, それに続いて Schoen [8] が

$$g(x,u) = K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}} + o\left(u^{\frac{n+2}{n-2}}\right) \quad \text{as} \quad u \to \infty,$$

$(K(x) > 0)$ の場合を考えた．更に, 関係するものとして Deng [4], Escobar [5], Escobar-Schoen [6] などがある．しかしながら $g(x,u)$ が完全に非斉次の場合は深く研究されているようには思われない．また, このような問題に対して Nehari の方法を適用しているものは余り見受けられない．そこで, ここではそのことを念頭にいれ, この問題に Nehari の方法 (Nehari[7]) を適用することを考える．

まず, エネルギー汎関数 J_a と Nehari 多様体 N_a を次のように定義する．

• エネルギー汎関数

$$\begin{aligned} J_a(u) &\equiv \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{|\nabla u|^2 - a(x)u^2\right\} dx - \int_\Omega G(x,u)dx, \quad u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

ここで,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt, \quad G(x,u) = \int_0^u g(x,t)dt.$$

• Nehari 多様体

$$N_a \equiv \left\{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \mid I_a(v) = 0\right\}.$$

ここで,

$$I_a(v) = \int_\Omega \left\{|\nabla v|^2 - a(x)v^2\right\} dx - \int_\Omega vg(x,v)dx.$$

さらに,

$$d_a = \inf_{v \in N_a} J_a(v)$$

とおく．また,

$$\begin{aligned} N_a^i &= \{v \in X \mid I_a(v) > 0\}, \quad N_a^e = \{v \in X \mid I_a(v) < 0\}, \\ B(v) &= \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}vg(x,v) - G(x,v)\right\} \end{aligned}$$

とおくと, 次の基本的性質が成り立つ．

• Nehari 多様体に対する基本性質

1. $N_a^i \cup \{0\}$ は $H_0^1(\Omega)$ に於ける 0 の近傍である．

2. 任意の $v \in N_a$ に対し $J_a(tv)$ は $t > 0$ に関し単調増大である.

3. $d_a > 0$.

4. N_a 上において $B = J_a$ である.

5. 任意の $v(\neq 0) \in H_0^1(\Omega)$ に対し, $t_v v \in N_a$ をみたす $t_v > 0$ がただ一つ存在し,

$$\begin{cases} v \in N_a^i & \Longleftrightarrow & t_v < 1 \\ v \in N_a & \Longleftrightarrow & t_v = 1 \\ v \in N_a^e & \Longleftrightarrow & t_v > 1. \end{cases}$$

これらのもとで, 次の Nehari 原理が成り立つ.

Nehari 原理: d_a がある $u_0 \in N_a$ によって到達されれば, u_0 は J_a の停留点となる. 即ち, u_0 は (P) の弱解となる.

実際, $g(x,u)$ は u の奇関数であるから, $I_a(u) = I_a(|u|)$, $J_a(u) = J_a(|u|)$ である. u_0 のかわりに $|u_0|$ を考えることにより, $u_0 \geq 0$ と仮定してよい. 仮定 (f3) により,

$$\begin{aligned} I_a'(u_0)[u_0] &= \int_\Omega \left\{ 2|\nabla u_0|^2 - f(x,u_0)u_0 - u_0^2 f_u(x,u_0) \right\} dx \\ &= \int_\Omega \left\{ \frac{f(x,u_0)}{u_0} - f_u(x,u_0) \right\} u_0^2 dx \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

従って, Lagrange の乗数法によりある定数 κ が存在し, 等式

$$J_a'(u_0)[v] - \kappa I_a'(u_0)[v] = 0$$

が任意の $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して成り立つ. ここで, $v = u_0 \in N_a$ ととり, $J_a'(u_0)[u_0] = I_a[u_0] = 0$ に注意すると, $\kappa = 0$ を得る. 従って $J_a'(u_0) = 0$. これは u_0 が方程式をみたすことを意味する. 最後に, 最大値原理により, $u_0 > 0$ を得, これが (P) の解となる.

この Nehari 原理により我々の問題は, 下限 d_a が Nehari 多様体 N_a の中で到達されるための条件を求めることとなる.

2 Main Results

前述の仮定 (f1) $\sim$ (f3) のうえに, さらに次を仮定する.

$g(x,u)$ に対する仮定

(g1) g は各 $x \in \Omega$ をとめるごとに, u に関し凸である.

(g2) 定数 $\varepsilon > 0$ が存在し, 不等式

$$\frac{1}{2}ug(x,u) \geq (1+\varepsilon)G(x,u)$$

が, 各 $x \in \Omega$ と $u \geq 0$ に対して成立する.

(g3) 定数 $\gamma > 1$ が存在し, 各 $x \in \Omega$ に対し,

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{g(x,u)}{u^\gamma} > 0.$$

(g4) 各 $x \in \Omega$ に対し, $\log g(x,u)$ は u に関し凹である.

以上の仮定 (f1)~(f3), (g1)~(g4) のもとで, 次の定理が成り立つ.

定理 1 もし $d_a < d_0$ ならば, d_a は N_a において到達される. 即ち, (P) の弱解が存在する.

さらに,

定理 2 非線形項 $f(x,u) = a(x)u + g(x,u)$ は仮定 $(f1), (f3), (g1), (g4)$ をみたし, 更に

(f2') $g(x,u)$ は u に関し奇関数であり, $0 < \alpha \leq \beta < \frac{n}{n-2}\alpha$ をみたす定数 α, β が存在し, 不等式

$$\alpha u^{\frac{n+2}{n-2}} \leq g(x,u) \leq \beta u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

が任意の $u > 0$ に対して成り立つ,

とする.

この時, もし不等式

$$A_a < \left[\frac{n}{2}\left(1 - \frac{n-2}{n}\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]^{\frac{2}{n}} S_0$$

が成り立つならば, (P) の弱解が存在する.

ここで,

$$A_a = \inf\left\{\int_\Omega \{|\nabla v|^2 - a(x)v^2\}dx \;\middle|\; \int_\Omega |v|^{\frac{2n}{n-2}}dx = 1\right\}$$

であり, S_0 はソボレフ定数である. 即ち,

$$S_0 = \inf\left\{\frac{||\nabla v||_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{||v||_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)}} \;\middle|\; v \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}\right\}.$$

3 Outline of the Proof of the Theorems

証明のための key lemma として, Lieb の補題 (Brezis-Lieb[2]) の一般化である次の補題をつかう.

補題 1 $j(x,t)$ を t に関して凸で, 任意の $x \in \Omega$ に対し $j(x,0)=0$ をみたす $\Omega \times \mathbb{R}$ 上の連続関数とする. さらに, $\{g_k\}$ を

$$g_k \to 0 \quad a.e.,$$

および, k によらないある定数 $C>0$ と $\sigma>1$ に対し, 不等式

$$\int_\Omega |j(x,\sigma g_k(x)) - \sigma j(x,g_k(x))| dx \le C < \infty$$

を成り立たせるような Ω 上の可測関数列とする.

このとき, 可測関数 fが, 任意の $M \in \mathbb{R}$ と 1 に収束する点列 $\{\rho_k\}$ に対して

$$\int_\Omega \sup_{|q-1|\le 1} |j(x, Mqf(x))| dx < \infty$$

をみたすならば,

$$\int_\Omega |j(x, g_k+\rho_k f) - j(x,g_k) - j(x,f)| dx \to 0 \quad as \quad k\to\infty$$

が成り立つ.

いま, $\{v_k\}(\subset N_a)$ を J_a の最小化列とすると, $I_a(v_k)=0$ と $\{J_a(v_k)\}$ が上から有界であることより,$\{v_k\}$ は $H_0^1(\Omega)$ で有界であることがわかる. 従って,$\{v_k\}$ の部分列 $\{v_{k_j}\}$ および $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在し, $\{v_{k_j}\}$ は v にほとんど至るところ, かつ, $H_0^1(\Omega)$ で弱収束する.

この点列に補題 1 を適用すると, 次の補題を得る.

補題 2 もし, $d_a \equiv \inf_{v\in N_a} J_a(v)$ が到達されなかったとすると, $v=0$ である. すなわち, 0 に $H_0^1(\Omega)$ で弱収束し, $J_a(v_k)\to d_a$ をみたす点列 $\{v_k\}(\subset N_a)$ が存在する.

補題 2 に於ける点列 $\{v_k\}$ に対し, $w_k = q_k v_k \in N_0$ と置くと, $q_k \to 1$ が成り立つことがわかる. したがって,

補題 3 もし, d_a が到達されなかったとすると, 0 に $H_0^1(\Omega)$ で弱収束し, $J_0(w_k)\to d_a$ となる点列 $\{w_k\}$ が N_0 の中に存在する.

以上の補題により定理 1, 2 の証明ができる.

定理 1, 2 の証明: d_a が到達されなかったとすると, 補題 3 により N_0 に含まれる点列 $\{w_k\}$ が存在し, $J_0(w_k) \to d_a$ をみたす. したがって, $d_0 \le d_a$. すなわち, $d_a < d_0$ ならば, d_a は到達される.

次に, 仮定 (f2') のもとで評価

$$d_0 \left(\equiv \inf_{w \in N_0} J_0(w) \right) \ge \frac{n(\alpha - \beta) + 2\beta}{2n\alpha^{\frac{n}{2}}} S_0^{\frac{n}{2}}$$

および,

$$d_a \le \frac{1}{n\alpha^{\frac{n-2}{n}}} A_a$$

を示すことができる. したがって, 定理 1 により, 定理 2 が示される.

4 Some Remarks

定理 1 において, d_a が到達されるための条件として, $a = 0$ のときの値 d_0 との比較を行ったが, ここで $a = 0$ である必然性はない. 実際, まったく同様の証明により次の定理が示される.

定理 3 仮定 *(f1)〜(f3),(g1)〜(g4)* がみたされているとする. また, $c(x)$ をある定数 $\delta > 0$ が存在し, 任意の $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して不等式

$$\int_\Omega \{|\nabla v|^2 - c(x)v^2\} dx \ge \delta \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

をみたす有界可測関数とする.

このとき, もし $d_a < d_c$ ならば, d_a は N_a で到達される.

定理 3 中の条件をみたす関数 $c(x)$ 全体からなる集合を $\mathcal{M}$, すなわち,

$$\mathcal{M} = \left\{ c(x) \in L^\infty(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある定数}\delta > 0 \text{ が存在し, 任意の } v \in H_0^1(\Omega) \text{ に対して不等式} \\ \int_\Omega \{|\nabla v|^2 - c(x)v^2\} dx \ge \delta \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ \text{が成立する.} \end{array} \right\},$$

$\mathcal{K}$ をその部分集合とし, さらに

$$\overline{d}_{\mathcal{K}} = \sup_{c \in \mathcal{K}} d_c, \quad \overline{d}_{\mathcal{M}} = \sup_{c \in \mathcal{M}} d_c.$$

とおく. 後で示すように, $\overline{d}_{\mathcal{K}}$ と $\overline{d}_{\mathcal{M}}$ は $+\infty$ をとる場合もある.

定理 3 を見直すと次のようになる.

i) もし, ある $a \in \mathcal{K}$ が存在し, d_a が N_a で到達されないならば, $\overline{d}_{\mathcal{K}}$ と $\overline{d}_{\mathcal{M}}$ は d_a により到達される. すなわち, $\overline{d}_{\mathcal{K}} = \overline{d}_{\mathcal{M}} = d_a$.

ii) もし $\overline{d}_{\mathcal{K}}$ が $\mathcal{K}$ で到達されないならば, d_c は任意の $c \in \mathcal{K}$ に対して到達される.

iii) もし d_a が $\overline{d}_{\mathcal{M}}$ よりも小さいならば, d_a は N_a で到達される.

iv) $a, b \in \mathcal{M}$ が不等式 $a(x) \leq b(x)$ を満足するならば, $d_a \geq d_b$ である.

しかし,
a) $d_a = d_b$.
b) d_a は N_a で到達される.
c) d_b は N_b で到達されない.
の 3 条件を同時にみたす $a, b \in \mathcal{M}$ が存在するかどうかは未解決である.

最後に, 定理 3 の状況を把握するため,

$$f(x,u) = a(x)u + u^p, \qquad 1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$$

の場合に Brezis-Nirenberg[3] が与えた結果との比較を行う. この場合には,

$$d_a = \frac{1}{n} S_a^{\frac{n}{2}}$$

で与えられることが簡単な計算によりわかる. ここで,

$$S_a \equiv \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 - a(x)u^2 \right\} dx}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}}$$

である. いま, ディリクレ境界条件付きの $-\Delta$ の第一固有値 λ_1 に対して

$$\mathcal{K} = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda < \lambda_1 \}$$

とおくと, 上述 iv) より

$$\overline{d}_{\mathcal{K}} = \overline{d}_{\mathcal{M}}.$$

ここで, $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ の場合には, $\overline{d}_{\mathcal{K}} = \infty$ である.
実際, 埋蔵写像 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ のコンパクト性により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在し, 不等式

$$\left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_\Omega |u|^2 dx$$

が任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対して成り立つ. したがって, $\kappa = -\lambda$ と置くことにより, 不等式

$$\begin{aligned} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \kappa \int_\Omega |u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}} &\geq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \kappa \int_\Omega |u|^2 dx}{\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_\Omega |u|^2 dx} \\ &= \frac{t + \kappa}{\varepsilon t + C_\varepsilon} \end{aligned}$$

が任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対して成り立つ. ここで,

$$t = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx} > 0.$$

定数 κ を $C_\varepsilon/\varepsilon$ より大きくとれば,

$$\inf_{t>0} \frac{t+\kappa}{\varepsilon t + C_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

したがって, $\lambda < -C_\varepsilon/\varepsilon$ に対し,

$$S_\lambda \equiv \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right\} dx}{\left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p+1}}} \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

ゆえに,

$$d_\lambda = \frac{1}{n} S_\lambda^{\frac{n}{2}} \geq \frac{1}{n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}}.$$

このことより

$$\overline{d}_{\mathcal{K}} \left(\equiv \sup_{\lambda \in \mathcal{K}} d_\lambda \right) = \infty$$

となる.

したがって, 上述 iii) より任意の $a \in \mathcal{M}$ に対し, d_a は N_a の中で到達され, 結局, $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ の場合には, 任意の $a \in \mathcal{M}$ に対して (P) の解が存在することになる.

一方, $p = \frac{n+2}{n-2}$ の場合には話は少々微妙である. Brezis-Nirenberg は S_λ $(\lambda < \lambda_1)$ が S_0 より小さいという仮定のもとで (P) の解の存在を示し, さらに, $n \geq 4$ のときには,

$$S_\lambda = \begin{cases} = & S_0 \quad (\lambda \leq 0) \\ < & S_0 \quad (\lambda > 0) \end{cases}$$

であり, $n = 3$ のときにはある $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$ が存在し,

$$S_\lambda = \begin{cases} = & S_0 \quad (\lambda \leq \lambda^*) \\ < & S_0 \quad (\lambda > \lambda^*) \end{cases}$$

であることを示した. (Brezis[1] も参照せよ.)

このことを我々の立場からみれば, 次のように解釈される. すなわち,

$$\overline{d}_{\mathcal{K}} = \overline{d}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{n} S_0^{\frac{1}{n}}$$

であり, $n \geq 4$ のときには任意の $\lambda \in (0, \lambda_1)$ に対して, $n = 3$ のときには $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ に対して, 不等式

$$d_\lambda < \overline{d}_{\mathcal{M}}$$

が成り立つ. したがって, このそれぞれの場合に応じて d_λ が到達されることがわかる.

以上が $f(x,u) = a(x)u + u^p$, $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$ に対する結果であるが, 一般の非線形項 $g(x,u)$ に対しては, $\overline{d}_{\mathcal{M}}$ および $\overline{d}_{\mathcal{K}}$ は領域 Ω の形状に依存しており計算結果を得ていない.

参考文献

[1] H. Brezis, *Some variational problems with lack of compactness*, Proc. Symp. in Pure Math., **45**, Part 1 (1986), 165-201.

[2] H. Brezis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., **88** (1983), 486-490.

[3] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. on Pure and Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[4] Y. Deng, *Existence of multiple positive solutions of inhomogeneous semi-linear elliptic problems involving critical exponents*, Comm. in Partial Differential Equations, **17** (1992), 33-53.

[5] J. Escobar, *Positive solutions for some semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents*, Comm. on Pure Appl. Math., **40** (1987), 623-657.

[6] J. Escobar and R. Schoen, *Conformal metrics with prescribed scalar curvature*, Inventiones Math., **86** (1986), 243-254.

[7] Z. Nehari, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **95** (1960), 101-123.

[8] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geometry, **20** (1984), 479-495.